3 Ehrenfeucht-Fraïssé Spiele

Ehrenfeucht-Fraïssé Spiele (kurz: EF-Spiele): eine Methode, zum Beweis, dass bestimmte Probleme *nicht* durch Formeln einer bestimmten Logik (z.B. FO) definierbar sind.

Der Einfachheit halber betrachten wir in diesem Kapitel oft *relationale* Signaturen, d.h. Signaturen, die keine Konstantensymbole enthalten. (Dies ist keine wesentliche Einschränkung, da man jedes Konstantensymbol c durch ein 1-stelliges Relationssymbol C repräsentieren kann, das durch eine 1-elementige Menge interpretiert wird.)

3.1 Das EF-Spiel für die Logik erster Stufe

3.1.1 Vorbemerkungen

Bevor wir die Spielregeln des EF-Spiels einführen, legen wir zunächst einige nützliche Begriffe fest.

3.1 Proposition. *Jede endliche Struktur ist bis auf Isomorphie in der Logik erster Stufe definierbar, d.h. für jede Signatur σ und jede endliche σ-Struktur $\mathfrak{A}$ gibt es einen* FO$[\sigma]$-*Satz $\varphi_{\mathfrak{A}}$, so dass für alle endlichen σ-Strukturen $\mathfrak{B}$ gilt:* $\mathfrak{B} \models \varphi_{\mathfrak{A}} \iff \mathfrak{B} \cong \mathfrak{A}$.

Beweis: *Übung*. □

Zur Konstruktion der Formel $\varphi_{\mathfrak{A}}$ im Beweis von Proposition 3.1 benötigt man in etwa so viele Quantoren wie es Elemente im Universum von $\mathfrak{A}$ gibt.

3.2 Definition (Quantorenrang). Der *Quantorenrang* (auch: Quantorentiefe) $qr(\varphi)$ einer FO-Formel φ ist die maximale Anzahl von ineinander geschachtelten Quantoren, die in der Formel φ vorkommen.

3.3 Beispiele.

- $qr\big(\exists x\, \forall y\, (\, x = y \,\vee\, R(x, y, z)\,)\big) \;=\; 2$,
- $qr\big(\exists x\, \big(T(x) \,\vee\, \forall y\, R(x, y, z)\big)\big) \;=\; 2$,
- $qr\big((\,\exists x\, T(x)\,) \,\vee\, \forall y\, (\, R(y, y, z) \to y = z\,)\big) \;=\; 1$.

3.4 Definition (m-Äquivalenz). Sei σ eine Signatur und sei $m \in \mathbb{N}$. Zwei σ-Strukturen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ heißen *m-äquivalent* (kurz: $\mathfrak{A} \equiv_m \mathfrak{B}$), falls sie die gleichen FO$[\sigma]$-Sätze der Quantorentiefe m erfüllen.

3.5 Bemerkungen. (a) Für jedes $m \in \mathbb{N}$ ist $\equiv_m$ eine *Äquivalenzrelation* auf der Klasse aller σ-Strukturen.

(b) Für alle natürlichen Zahlen $m \leqslant n$ gilt: Falls $\mathfrak{A} \equiv_n \mathfrak{B}$, so auch $\mathfrak{A} \equiv_m \mathfrak{B}$.
Umgekehrt heißt das: Falls $\mathfrak{A} \not\equiv_m \mathfrak{B}$, so $\mathfrak{A} \not\equiv_n \mathfrak{B}$.

Zum Nachweis, dass bestimmte Probleme *nicht* FO-definierbar sind, kann man sich folgende Beobachtung zu Nutze machen:

3.6 Proposition. *Sei σ eine Signatur und S eine Klasse von σ-Strukturen. Sei $\mathsf{C} \subseteq \mathsf{S}$ eine Teilklasse von S, so dass es für jedes $m \in \mathbb{N}$ ein $\mathfrak{A}_m \in \mathsf{C}$ und ein $\mathfrak{B}_m \in \mathsf{S} \setminus \mathsf{C}$ mit $\mathfrak{A}_m \equiv_m \mathfrak{B}_m$ gibt. Dann ist C nicht FO-definierbar in S.*

Beweis: Angenommen C ist FO-definierbar in S, d.h. es gibt einen FO$[\sigma]$-Satz φ mit $\mathsf{C} = \mathrm{Mod}_{\mathsf{S}}(\varphi)$. Sei $m := qr(\varphi)$ der Quantorenrang von φ. Laut Voraussetzung gibt es Strukturen $\mathfrak{A}_m \in \mathsf{C}$ und $\mathfrak{B}_m \in \mathsf{S} \setminus \mathsf{C}$, so dass $\mathfrak{A}_m \equiv_m \mathfrak{B}_m$. Wegen $\mathfrak{A}_m \in \mathsf{C} = \mathrm{Mod}_{\mathsf{S}}(\varphi)$, gilt $\mathfrak{A}_m \models \varphi$ und $\mathfrak{B}_m \not\models \varphi$. Da $qr(\varphi) = m$ ist, widerspricht dies aber der Aussage $\mathfrak{A}_m \equiv_m \mathfrak{B}_m$. $\square$

3.7 Definition (Partieller Isomorphismus). Sei σ eine Signatur und $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ σ-Strukturen.

(a) Eine Abbildung
$$\pi \ : \ \mathrm{def}(\pi) \ \to \ \mathrm{bild}(\pi)$$
mit $\mathrm{def}(\pi) \subseteq A$ und $\mathrm{bild}(\pi) \subseteq B$ heißt *partieller Isomorphismus* von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$, falls gilt:

(a) π ist *bijektiv*

(b) für jedes Konstantensymbol $c \in \sigma$ ist $c^{\mathfrak{A}} \in \mathrm{def}(\pi)$ und $\pi(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}}$,

(c) für jedes Relationssymbol $R \in \sigma$ der Stelligkeit $k := ar(R)$ und alle k-Tupel $\vec{a} \in \mathrm{def}(\pi)^k$ gilt[1]
$$\vec{a} \ \in \ R^{\mathfrak{A}} \quad \Longleftrightarrow \quad \pi(\vec{a}) \ \in \ R^{\mathfrak{B}}\,.$$

(b) $\mathrm{Part}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ bezeichnet die Menge aller partiellen Isomorphismen von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$.

3.8 Bemerkungen.

(a) Ein partieller Isomorphismus π von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$ ist ein Isomorphismus von $\mathfrak{A}_{|\mathrm{def}(\pi)}$ auf $\mathfrak{B}_{|\mathrm{bild}(\pi)}$. (Hier bezeichnen wir für jede Struktur $\mathfrak{C}$ und jede Menge $U \subseteq C$ die von U induzierte Substruktur von $\mathfrak{C}$ mit $\mathfrak{C}_{|U}$; vgl. Aufgabe 4 von Übungsblatt 2.)

(b) Oft schreiben wir
$$\pi \ : \ a_1, \ldots, a_m \ \mapsto \ b_1, \ldots, b_m \qquad \text{bzw.} \qquad \pi \ : \ \big(a_i \mapsto b_i \big)_{i=1,\ldots,m}$$
um die Abbildung π mit $\mathrm{def}(\pi) = \{a_1, \ldots, a_m\}$ und $\pi(a_i) = b_i$, für alle $i \in \{1, \ldots, m\}$, zu bezeichnen.

[1] Zur Erinnerung: Für $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ ist $\pi(\vec{a}) := \big(\pi(a_1), \ldots, \pi(a_k)\big)$.

(c) Oft identifizieren wir eine Abbildung π mit ihrem Graph

$$\{\, \big(a, \pi(a)\big) \;\mid\; a \in \mathrm{def}(\pi)\,\}.$$

Insbesondere bedeutet dann

$$\pi \;\subseteq\; \pi'\,,$$

dass π' eine *Erweiterung* von π ist (d.h. $\mathrm{def}(\pi) \subseteq \mathrm{def}(\pi')$ und für alle $a \in \mathrm{def}(\pi)$ ist $\pi'(a) = \pi(a)$).

3.9 Proposition. *Sei σ eine Signatur. $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ seien σ-Strukturen.*

(a) $\pi := \varnothing$ (d.h. die Abbildung mit leerem Definitionsbereich) ist genau dann ein partieller Isomorphismus von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$, wenn σ keine Konstantensymbole enthält.

(b) Sei $\vec{a} = (a_1, .., a_m) \in A^m$ und $\vec{b} = (b_1, .., b_m) \in B^m$. Dann sind äquivalent:

(1) $\pi \;:\; a_1, .., a_m \mapsto b_1, .., b_m$ ist ein partieller Isomorphismus von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$.

(2) Für alle atomaren *σ-Formeln $\alpha(x_1, .., x_m)$ mit frei$(\alpha) \subseteq \{x_1, .., x_m\}$ gilt:* $\mathfrak{A} \models \alpha[\vec{a}] \iff \mathfrak{B} \models \alpha[\vec{b}]$.

(3) Für alle quantorenfreien FO$[\sigma]$*-Formeln $\varphi(x_1, .., x_m)$ mit frei$(\varphi) \subseteq \{x_1, .., x_m\}$ gilt:* $\mathfrak{A} \models \varphi[\vec{a}] \iff \mathfrak{B} \models \varphi[\vec{b}]$.

Beweis: Klar. □

Man beachte: Die Existenz eines partiellen Isomorphismus $\pi\; a_1, .., a_m \mapsto b_1, .., b_m$ bedeutet *nicht*, dass auch Formeln mit Quantoren erhalten werden. Ein partieller Isomorphismus sagt also etwas über $\equiv_0$ aus, aber nicht über $\equiv_m$ für $m > 0$.

3.1.2 Das m-Runden EF-Spiel auf $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$

Sei σ eine Signatur und seien $m, k \in \mathbb{N}$. Seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zwei σ-Strukturen und seien $\vec{a}' = a'_1, .., a'_k \in A$ und $\vec{b}' = b'_1, .., b'_k \in B$.

Spielregeln und Gewinnbedingung:

Das m-Runden EF-Spiel[2] $\mathcal{G}_m(\mathfrak{A}, \vec{a}', \mathfrak{B}, \vec{b}')$ wird von zwei Spielern, *Spoiler* und *Duplicator* (auch: Spieler I und Spieler II) auf den beiden Strukturen $(\mathfrak{A}, \vec{a}')$ und $\mathfrak{B}, \vec{b}')$ gespielt.

Spoilers Ziel: Zeige, dass die beiden Strukturen verschieden sind.
Genauer: Zeige, dass $(\mathfrak{A}, \vec{a}') \not\equiv_m (\mathfrak{B}, \vec{b}')$.

Duplicators Ziel: Vertusche einen (etwaigen) Unterschied zwischen den beiden Strukturen.
Genauer: Zeige, dass $(\mathfrak{A}, \vec{a}') \equiv_m (\mathfrak{B}, \vec{b}')$.

[2] Im Fall $k = 0$ schreiben wir oft $\mathcal{G}_m(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ an Stelle von $\mathcal{G}_m(\mathfrak{A}, \vec{a}', \mathfrak{B}, \vec{b}')$.

Eine *Partie* des Spiels besteht aus m *Runden*.
In jeder Runde $i \in \{1, .., m\}$ geschieht folgendes:
Zunächst wählt Spoiler entweder ein Element aus A, das im Folgenden mit a_i bezeichnet wird, oder er wählt ein Element aus B, das im Folgenden mit b_i bezeichnet wird. Danach antwortet Duplicator mit einem Element aus dem Universum der anderen Struktur, d.h. er wählt ein Element $b_i \in B$, falls Spoiler ein $a_i \in A$ gewählt hat, bzw. ein Element $a_i \in A$, falls Spoiler ein $b_i \in B$ gewählt hat.

Nach der m-ten Runde wird der Gewinner ermittelt:
Duplicator hat gewonnen, falls die Abbildung

$$\pi : \left\{ \begin{array}{lcll} a_i & \mapsto & b_i & \text{für alle } i \in \{1, .., m\} \\ c^{\mathfrak{A}} & \mapsto & c^{\mathfrak{B}} & \text{für alle Konstantensymbole } c \in \sigma \\ a'_j & \mapsto & b'_j & \text{für alle } j \in \{1, .., k\} \end{array} \right\}$$

ein *partieller Isomorphismus* von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$ ist.
Ansonsten hat *Spoiler* gewonnen.

Gewinnstrategien:

Eine *Strategie* für einen der beiden Spieler ist eine Vorschrift, die ihm sagt, welchen Zug er als nächstes machen soll. Formal:

Eine Strategie für Spoiler ist eine Abbildung

$$f_S : \bigcup_{i=0}^{m-1} \left(A^i \times B^i\right) \to A \dot{\cup} B.$$

(Sind $\vec{a} := a_1, .., a_i$ und $\vec{b} := b_1, .., b_i$ die in den ersten i Runden gewählten Elemente, so gibt $f_S(\vec{a}, \vec{b})$ an, welches Element Spoiler in der $i{+}1$-ten Runde wählen soll.)

Eine Strategie für Duplicator ist eine Abbildung

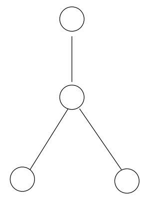
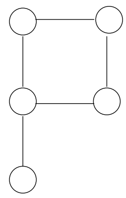
$$f_D : \bigcup_{i=0}^{m-1} \left((A^i \times B^i) \times (A \dot{\cup} B)\right) \to A \dot{\cup} B,$$

so dass für alle $\vec{a}, \vec{b}, c$ gilt: $f_D(\vec{a}, \vec{b}, c) \in B \iff c \in A$.
(Sind $\vec{a} := a_1, .., a_i$ und $\vec{b} := b_1, .., b_i$ die in den ersten i Runden gewählten Elemente und ist c das von Spoiler in der $i{+}1$-ten Runde gewählte Element, so gibt $f_D(\vec{a}, \vec{b}, c)$ an, mit welchem Element Duplicator in der $i{+}1$-ten Runde antworten soll.)

Eine *Gewinnstrategie* ist eine Strategie für einen der beiden Spieler, mit der er alle Partien des Spiels $\mathcal{G}_m(\mathfrak{A}, \vec{a}', \mathfrak{B}, \vec{b}')$ gewinnt.
Wir sagen: Spoiler (bzw. Duplicator) *gewinnt* $\mathcal{G}_m(\mathfrak{A}, \vec{a}', \mathfrak{B}, \vec{b}')$, falls er eine Gewinnstrategie im m-Runden EF-Spiel auf $(\mathfrak{A}, \vec{a}', \mathfrak{B}, \vec{b}')$ hat.

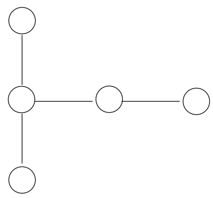
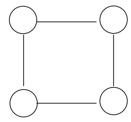
3.10 Beispiele.

(a) *Spoiler* gewinnt das 2-Runden EF-Spiel auf den folgenden ungerichteten Graphen

$\mathfrak{A}$:  $\mathfrak{B}$: 

indem er in Runde 1 den Knoten a_1 in $\mathfrak{A}$ wählt, der zu allen anderen Knoten benachbart ist. In Runde 2 wählt er dann einen Knoten b_2, der nicht zu Knoten b_1 benachbart ist und gewinnt somit.

(b) *Duplicator* gewinnt das 2-Runden EF-Spiel auf den folgenden ungerichteten Graphen

$\mathfrak{A}$:  $\mathfrak{B}$: 

denn in beiden Graphen gibt es zu jedem Knoten sowohl einen Nachbarn als auch einen Nicht-Nachbarn.

(c) *Spoiler* gewinnt das 3-Runden EF-Spiel auf den Graphen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ aus (b), indem er in den ersten drei Runden drei verschiedene nicht benachbarte Knoten in $\mathfrak{A}$ wählt (etwa $a_1 := 1$, $a_2 := 4$, $a_3 := 5$).

(d) Für $\mathfrak{A} := (\{0, .., 8\}, <, 0, 8)$ und $\mathfrak{B} := (\{0, .., 7\}, <, 0, 7)$ gilt: Duplicator gewinnt $\mathcal{G}_2(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ und Spoiler gewinnt $\mathcal{G}_3(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$.

3.11 Satz.
Für jedes $m \geqslant 1$ und alle geordneten endlichen Strukturen $\mathfrak{A} = (A, <^{\mathfrak{A}}, 0^{\mathfrak{A}}, max^{\mathfrak{A}})$ und $\mathfrak{B} = (B, <^{\mathfrak{B}}, 0^{\mathfrak{B}}, max^{\mathfrak{B}})$ gilt:

$$\text{Duplicator gewinnt das Spiel } \mathcal{G}_m(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) \iff |A| = |B| \text{ oder } |A|, |B| > 2^m.$$

Beweis: "$\Longleftarrow$": Falls $|A| = |B| := n$ ist, so können wir sowohl $\mathfrak{A}$ als auch $\mathfrak{B}$ mit der Struktur $(\{0, .., n-1\}, <, 0, n-1)$ identifizieren. Duplicator gewinnt das m-Runden Spiel, indem er in jeder Runde Spoilers Zug einfach "kopiert".
Im Folgenden betrachten wir den Fall, dass sowohl $|A|$ als auch $|B|$ größer als 2^m ist.
Für $\mathfrak{C} := \mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{C} := \mathfrak{B}$ betrachten wir die folgende auf $C \times C$ definierte *Distanzfunktion*

$$\text{Dist}(a, a') := |\{ b \in C \mid (a <^{\mathfrak{C}} b \leqslant^{\mathfrak{C}} a') \text{ oder } (a' <^{\mathfrak{C}} b \leqslant^{\mathfrak{C}} a)\}|.$$

Wir zeigen nun, dass Duplicator so spielen kann, dass für jedes $i \in \{0, .., m\}$ die folgende Invariante $(*)_i$ erfüllt ist:

$(*)_i$: Sind $a_1, .., a_i$ und $b_1, .., b_i$ die in den Runden $1, .., i$ gewählten Elemente in A und B und ist $a_0 := 0^{\mathfrak{A}}$, $a_{max} := max^{\mathfrak{A}}$, $b_0 := 0^{\mathfrak{B}}$ und $b_{max} := max^{\mathfrak{B}}$, so gilt für alle $j, j' \in \{0, max, 1, .., i\}$:

(a) $a_j <^{\mathfrak{A}} a_{j'} \iff b_j <^{\mathfrak{B}} b_{j'}$ und

(b) $\text{Dist}(a_j, a_{j'}) = \text{Dist}(b_j, b_{j'})$ oder $\text{Dist}(a_j, a_{j'}),\ \text{Dist}(b_j, b_{j'}) \geqslant 2^{m-i}$.

Der Beweis folgt per Induktion nach i.

$\underline{i = 0}$: Die Bedingung $(*)_0$ ist erfüllt, da $\text{Dist}(a_0, a_{max}) = |A| - 1 \geqslant 2^m$ und $\text{Dist}(b_0, b_{max}) = |B| - 1 \geqslant 2^m$.

$\underline{i \to i{+}1}$: Gemäß Induktionsannahme sind bereits i Runden gespielt und die Bedingung $(*)_i$ ist nach der i-ten Runde erfüllt.

Fall 1: Spoiler wählt in der $i{+}1$-ten Runde ein Element a_{i+1} in A.
Falls $a_{i+1} = a_j$ für ein $j \in \{0, max, 1, .., i\}$, so antwortet Duplicator mit $b_{i+1} := b_j$ und hat damit bewirkt, dass die Bedingung $(*)_{i+1}$ gilt.
Ansonsten gibt es Indices $j, j' \in \{0, max, 1, .., i\}$ so, dass $a_j <^{\mathfrak{A}} a_{i+1} <^{\mathfrak{A}} a_{j'}$ und für alle $j'' \in \{0, max, 1, .., i\}$ gilt: $a_{j''} \leqslant^{\mathfrak{A}} a_j$ oder $a_{j'} \leqslant^{\mathfrak{A}} a_{j''}$.
Da die Bedingung $(*)_i$ gemäß Induktionsannahme erfüllt ist, gilt

(1.) $\text{Dist}(a_j, a_{j'}) = \text{Dist}(b_j, b_{j'})$ oder

(2.) $\text{Dist}(a_j, a_{j'}),\ \text{Dist}(b_j, b_{j'}) \geqslant 2^{m-i}$.

In Fall (1.) gibt es ein Element b_{i+1} in B, so dass $b_j <^{\mathfrak{B}} b_{i+1} <^{\mathfrak{B}} b_{j'}$ und $\text{Dist}(b_j, b_{i+1}) = \text{Dist}(a_j, a_{i+1})$ und $\text{Dist}(b_{i+1}, b_{j'}) = \text{Dist}(a_{i+1}, a_{j'})$. Offensichtlich ist die Bedingung $(*)_{i+1}$ erfüllt, wenn Duplicator in der $i{+}1$-ten Runde dieses b_{i+1} wählt.

In Fall (2.) muss es mindestens ein Element c in B geben, so dass $b_j <^{\mathfrak{B}} c <^{\mathfrak{B}} b_{j'}$ und $\text{Dist}(b_j, c) \geqslant \frac{2^{m-i}}{2} = 2^{m-(i+1)}$ und $\text{Dist}(c, b_{j'}) \geqslant \frac{2^{m-i}}{2} = 2^{m-(i+1)}$.

- Falls $\text{Dist}(a_j, a_{i+1}) \geqslant 2^{m-(i+1)}$ und $\text{Dist}(a_{i+1}, a_{j'}) \geqslant 2^{m-(i+1)}$, so wählt Duplicator in der $i{+}1$-ten Runde $b_{i+1} := c$.

- Falls $\text{Dist}(a_j, a_{i+1}) < 2^{m-(i+1)}$, so wählt Duplicator das $b_{i+1} >^{\mathfrak{B}} b_j$ mit $\text{Dist}(b_j, b_{i+1}) = \text{Dist}(a_j, a_{i+1})$.

- Falls $\text{Dist}(a_{i+1}, a_{j'}) < 2^{m-(i+1)}$, so wählt Duplicator das $b_{i+1} <^{\mathfrak{B}} b_{j'}$ mit $\text{Dist}(b_{i+1}, b_{j'}) = \text{Dist}(a_{i+1}, a_{j'})$.

Man kann leicht nachprüfen, dass in jedem der 3 Fälle die Bedingung $(*)_{i+1}$ erfüllt ist.

Fall 2: Spoiler wählt in der $i{+}1$-ten Runde ein Element b_{i+1} in B.

Duplicators Antwort a_{i+1} in A wird analog zu Fall 1 ermittelt.

Damit sind wir fertig mit dem Induktionsschritt. Wir haben also bewiesen, dass Duplicator so spielen kann, dass nach jeder Runde $i \in \{0,..,m\}$ die Bedingung $(*)_i$ erfüllt ist. Insbesondere ist nach m Runden die Bedingung $(*)_m$ erfüllt und Duplicator hat daher die Partie gewonnen.

"$\Longrightarrow$": Offensichtlich genügt es, folgendes zu zeigen: Falls $|A| < |B|$ und $|A| \leqslant 2^m$, so hat *Spoiler* eine Gewinnstrategie im m-Runden EF-Spiel auf $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$.
Beweis: *Übung*. $\square$

3.1.3 Der Satz von Ehrenfeucht

Ziel dieses Abschnitts ist zu zeigen, dass

$$\mathfrak{A} \equiv_m \mathfrak{B} \iff \text{Duplicator gewinnt das } m\text{-Runden EF-Spiel auf } \mathfrak{A} \text{ und } \mathfrak{B}.$$

Wegen Proposition 3.6 kann man also EF-Spiele verwenden, um zu zeigen, dass bestimmte Probleme nicht FO-definierbar sind.

3.12 Definition. Sei σ eine Signatur, $\mathfrak{A}$ eine σ-Struktur, $k \in \mathbb{N}$, $\vec{a} = a_1,..,a_k$ eine Sequenz von Elementen aus $\mathfrak{A}$ und $\vec{x} = x_1,..,x_k$ eine Sequenz von k verschiedenen Variablen erster Stufe.
Wir definieren induktiv für jedes $m \in \mathbb{N}$ eine FO-Formel $\varphi^m_{\mathfrak{A},\vec{a}}(\vec{x})$ der Quantorentiefe m wie folgt:[3]

$$\varphi^0_{\mathfrak{A},\vec{a}}(\vec{x}) \;:=\; \bigwedge \left\{ \psi(\vec{x}) \;\middle|\; \begin{array}{l} \psi \text{ ist atomare oder negierte atomare } \sigma\text{-Formel mit} \\ \textit{frei}(\psi) \subseteq \{x_1,..,x_k\} \text{ und } \mathfrak{A} \models \psi[\vec{a}] \end{array} \right\}$$

und für $m > 0$

$$\varphi^m_{\mathfrak{A},\vec{a}}(\vec{x}) \;:=\; \bigwedge_{a\in A} \exists x_{k+1}\, \varphi^{m-1}_{\mathfrak{A},\vec{a}a}(\vec{x},x_{k+1}) \;\wedge\; \forall x_{k+1} \bigvee_{a\in A} \varphi^{m-1}_{\mathfrak{A},\vec{a}a}(\vec{x},x_{k+1})\,.$$

Die Formel $\varphi^m_{\mathfrak{A},\vec{a}}(\vec{x})$ heißt *m-Isomorphietyp* (oder *m-Hintikka-Formel*) von $\vec{a}$ in $\mathfrak{A}$.

3.13 Bemerkungen.

(a) In der obigen Definition ist k=0 erlaubt. Der m-Isomorphietyp ist dann ein *Satz* $\varphi^m_{\mathfrak{A}}$.

(b) Ist $\mathfrak{A}$ aus dem Kontext klar, so schreiben wir manchmal $\varphi^m_{\vec{a}}(\vec{x})$ an Stelle von $\varphi^m_{\mathfrak{A},\vec{a}}(\vec{x})$.

(c) Für alle $k, m \in \mathbb{N}$ ist die Menge

$$m\text{-Typen}_k \;:=\; \{\, \varphi^m_{\mathfrak{A},\vec{a}}(\vec{x}) \;\mid\; \mathfrak{A} \text{ ist eine } \sigma\text{-Struktur und } \vec{a} \in A^k \,\}$$

endlich.
(Klar für m=0, da es nur endlich viele verschiedene *atomare* σ-Formeln über den Variablen $x_1,..,x_k$ gibt. Für $m > 0$ folgt die Endlichkeit dann per Induktion.)

[3] Für eine endliche Menge M von Formeln schreiben wir $\bigwedge M$, um die Formel $\bigwedge_{\psi\in M} \psi$ zu bezeichnen.

(d) $\mathfrak{A} \models \varphi^m_{\mathfrak{A},\vec{a}}[\vec{a}]$.

3.14 Theorem (Satz von Ehrenfeucht, 1961). *Sei σ eine Signatur. $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ seien σ-Strukturen, $k, m \in \mathbb{N}$ und $\vec{a} = a_1, .., a_k \in A$ und $\vec{b} = b_1, .., b_k \in B$. Dann sind äquivalent:*

(a) Duplicator gewinnt $\mathcal{G}_m(\mathfrak{A}, \vec{a}, \mathfrak{B}, \vec{b})$.

(b) $\mathfrak{B} \models \varphi^m_{\mathfrak{A},\vec{a}}[\vec{b}]$.

(c) $(\mathfrak{A}, \vec{a}) \equiv_m (\mathfrak{B}, \vec{b})$,
d.h. für alle $\mathrm{FO}[\sigma]$-Formeln $\psi(x_1, .., x_k)$ mit frei$(\psi) \subseteq \{x_1, .., x_k\}$ und qr$(\psi) \leqslant m$ gilt: $\mathfrak{A} \models \psi[\vec{a}] \iff \mathfrak{B} \models \psi[\vec{b}]$.

Beweis: "(c) $\Longrightarrow$ (b)": Es gilt $qr(\varphi^m_{\mathfrak{A},\vec{a}}) = m$ und $\mathfrak{A} \models \varphi^m_{\mathfrak{A},\vec{a}}[\vec{a}]$. Aus (c) folgt daher $\mathfrak{B} \models \varphi^m_{\mathfrak{A},\vec{a}}[\vec{b}]$.

<u>"(b) $\Longleftrightarrow$ (a)":</u> Beweis per Induktion nach m.

<u>m=0:</u>

$$
\begin{array}{ll}
 & \text{Duplicator gewinnt } \mathcal{G}_0(\mathfrak{A}, \vec{a}, \mathfrak{B}, \vec{b}) \\
\overset{\text{Gewinnbed.}}{\iff} & \pi \;:\; \vec{a}, (c^{\mathfrak{A}})_{c\in\sigma} \;\mapsto\; \vec{b}, (c^{\mathfrak{B}})_{c\in\sigma} \;\in\; \mathrm{Part}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) \\
\overset{\text{Wahl von } \varphi^0_{\mathfrak{A},\vec{a}}}{\iff} & \mathfrak{B} \models \varphi^0_{\mathfrak{A},\vec{a}}[\vec{b}]\,.
\end{array}
$$

<u>$m \mapsto m{+}1$:</u>

$$
\begin{array}{ll}
 & \text{Duplicator gewinnt } \mathcal{G}_{m+1}(\mathfrak{A}, \vec{a}, \mathfrak{B}, \vec{b}) \\
\iff & \text{für alle } a \in A \text{ ex. } b \in B \text{, so dass Duplicator } \mathcal{G}_m(\mathfrak{A}, \vec{a}a, \mathfrak{B}, \vec{b}b) \text{ gewinnt, und} \\
 & \text{für alle } b \in B \text{ ex. } a \in A \text{, so dass Duplicator } \mathcal{G}_m(\mathfrak{A}, \vec{a}a, \mathfrak{B}, \vec{b}b) \text{ gewinnt} \\
\overset{\text{Ind.ann.}}{\iff} & \text{für alle } a \in A \text{ gibt es ein } b \in B \text{, so dass } \mathfrak{B} \models \varphi^m_{\mathfrak{A},\vec{a}a}[\vec{b}, b] \text{, und} \\
 & \text{für alle } b \in B \text{ gibt es ein } a \in A \text{, so dass } \mathfrak{B} \models \varphi^m_{\mathfrak{A},\vec{a}a}[\vec{b}, b]. \\
\iff & \mathfrak{B} \;\models\; \Big(\bigwedge_{a\in A} \exists x_{k+1}\, \varphi^m_{\mathfrak{A},\vec{a}a}(\vec{x}, x_{k+1}) \;\wedge\; \forall x_{k+1} \bigvee_{a\in A} \varphi^m_{\mathfrak{A},\vec{a}a}(\vec{x}, x_{k+1}) \Big)[\vec{b}] \\
\overset{\text{Def. } \varphi^{m+1}_{\mathfrak{A},\vec{a}}}{\iff} & \mathfrak{B} \;\models\; \varphi^{m+1}_{\mathfrak{A},\vec{a}}[\vec{b}].
\end{array}
$$

Somit sind wir fertig mit dem Beweis von "(b) $\Longleftrightarrow$ (a)".

<u>"(a) $\Longrightarrow$ (c)":</u> Per Induktion nach m.

<u>m=0:</u> Wie bei "(b) $\Longleftrightarrow$ (a)".

<u>$m \mapsto m{+}1$:</u> Gemäß Voraussetzung gewinnt Duplicator $\mathcal{G}_{m+1}(\mathfrak{A}, \vec{a}, \mathfrak{B}, \vec{b})$. Sei $\psi(\vec{x})$ eine FO-Formel mit *frei*$(\psi) \subseteq \{x_1, .., x_k\}$ und *qr*$(\psi) \leqslant m{+}1$. Wir müssen zeigen, dass

$$(*) \qquad \mathfrak{A} \models \psi[\vec{a}] \iff \mathfrak{B} \models \psi[\vec{b}].$$

Klar: Die Menge aller Formeln ψ, die die Bedingung $(*)$ erfüllen, ist abgeschlossen unter Booleschen Kombinationen $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ und enthält gemäß Induktionsannahme alle Formeln der Quantorentiefe $\leqslant m$.
Wir müssen daher nur noch den Fall betrachten, dass ψ von der Form

$$\psi \quad = \quad \exists x_{k+1}\, \chi(\vec{x}, x_{k+1})$$

ist.
Wir betrachten nur den Fall, dass $\mathfrak{A} \models \psi[\vec{a}]$ und zeigen, dass dann auch $\mathfrak{B} \models \psi[\vec{b}]$.
(Der andere Fall kann analog behandelt werden.)
Wegen $\mathfrak{A} \models \psi[\vec{a}]$ gibt es ein $a \in A$ mit $\mathfrak{A} \models \chi[\vec{a}, a]$. Da Duplicator $\mathcal{G}_{m+1}(\mathfrak{A}, \vec{a}, \mathfrak{B}, \vec{b})$ gewinnt, muss es ein $b \in B$ geben, so dass Duplicator das Spiel $\mathcal{G}_m(\mathfrak{A}, \vec{a}a, \mathfrak{B}, \vec{b}b)$ gewinnt. Gemäß Induktionsannahme gilt dann $\mathfrak{A} \models \chi[\vec{a}, a] \iff \mathfrak{B} \models \chi[\vec{b}, b]$. Es gilt also $\mathfrak{B} \models \chi[\vec{b}, b]$ und daher $\mathfrak{B} \models \exists x_{k+1}\chi\,[\vec{a}]$, d.h. $\mathfrak{B} \models \psi[\vec{b}]$. □

3.15 Bemerkung. Aus Theorem 3.14 und Bemerkung 3.13 (c) folgt direkt, dass für jedes $m \in \mathbb{N}$ und jede Signatur σ die Relation $\equiv_m$ nur *endlich* viele Äquivalenzklassen auf der Klasse aller σ-Strukturen hat. σ-STRUKTUREN ist also eine Vereinigung von *endlich* vielen Äquivalenzklassen von $\equiv_m$. Die Äquivalenzklasse, zu der eine gegebene Struktur $\mathfrak{A}$ gehört, wird dabei durch den Satz $\varphi^m_{\mathfrak{A}}$ definiert.

Die nächste Folgerung aus dem Satz von Ehrenfeucht wird oft benutzt um zu zeigen, dass bestimmte Probleme *nicht* FO-definierbar sind.

3.16 Korollar. *Ist σ eine Signatur und S eine Klasse von σ-Strukturen und $\mathsf{C} \subseteq \mathsf{S}$, so sind äquivalent:*

(a) C ist nicht FO-definierbar in S.

(b) Für alle $m \in \mathbb{N}$ gibt es $\mathfrak{A}_m \in \mathsf{C}$ und $\mathfrak{B}_m \in \mathsf{S} \setminus \mathsf{C}$, so dass $\mathfrak{A}_m \equiv_m \mathfrak{B}_m$.

(c) Für alle $m \in \mathbb{N}$ gibt es $\mathfrak{A}_m \in \mathsf{C}$ und $\mathfrak{B}_m \in \mathsf{S} \setminus \mathsf{C}$, so dass Duplicator das m-Runden EF-Spiel auf $\mathfrak{A}_m$ und $\mathfrak{B}_m$ gewinnt.

Beweis: "(b) $\iff$ (c)": Folgt direkt aus Theorem 3.14.

"(b) $\Longrightarrow$ (a)": Das ist gerade die Aussage von Proposition 3.6.

"(a) $\Longrightarrow$ (b)": Angenommen (b) gilt nicht. Dann gibt es ein $m \in \mathbb{N}$, so dass für alle Strukturen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \mathsf{S}$ gilt: Falls $\mathfrak{A} \in \mathsf{C}$ und $\mathfrak{A} \equiv_m \mathfrak{B}$, so $\mathfrak{B} \in \mathsf{C}$. Die Klasse C ist also eine Vereinigung von Äquivalenzklassen von $\equiv_m$ und wird daher durch den FO-Satz

$$\psi \quad := \quad \bigvee \{\, \varphi^m_{\mathfrak{A}} \;\mid\; \mathfrak{A} \text{ ist eine } \sigma\text{-Struktur mit } \mathfrak{A} \in \mathsf{C} \,\}$$

definiert. Es gilt also: $\mathsf{C} = \mathrm{Mod}_{\mathsf{S}}(\psi)$. □

Als Anwendung erhalten wir, dass die folgenden Probleme nicht FO-definierbar sind:

3.17 Korollar. *Für die Strukturklassen*

$\mathsf{S}_<$	:	*Klasse aller endlichen linearen Ordnungen*,
$\mathsf{Even}_<$	:	*Klasse aller endlichen linearen Ordnungen gerader Länge*,
UGraphs	:	*Klasse aller endlichen ungerichteten Graphen,*
Conn	:	*Klasse aller endlichen ungerichteten zusammenhängenden Graphen*,
RGraphs	:	*Klasse aller endlichen Graphen* $G = (V, E^G, S^G, T^G)$ *mit* $S^G, T^G \subseteq V$,
Reach	:	*Klasse aller* $G \in$ RGraphs*, in denen es einen Pfad von einem Knoten in* S^G *zu einem Knoten in* T^G *gibt.*

gilt:

(a) $\mathsf{Even}_<$ *ist nicht* FO*-definierbar auf* $\mathsf{S}_<$.

(b) Conn *ist nicht* FO*-definierbar in* UGraphs.

(c) Reach *ist nicht* FO*-definierbar in* RGraphs.

Beweis: (a): Für jedes $m \in \mathbb{N}$ sei $\mathfrak{A}_m$ eine lineare Ordnung auf $2^m{+}2$ Elementen und $\mathfrak{B}_m$ eine lineare Ordnung auf $2^m{+}1$ Elementen. Somit ist $\mathfrak{A}_m \in \mathsf{Even}_<$ und $\mathfrak{B}_m \in \mathsf{S}_< \setminus \mathsf{Even}_<$. Aus Satz 3.11 folgt, dass $\mathfrak{A}_m \equiv_m \mathfrak{B}_m$. Gemäß Korollar 3.16 ist daher $\mathsf{Even}_<$ nicht FO-definierbar in $\mathsf{S}_<$.
(b): Folgt direkt aus (a) und Beispiel 2.78.
(c): Folgt genauso aus (a) und der Reduktion aus Beispiel 2.72 (a). $\square$