Eine Klasse C von τ-Strukturen, eine Klasse D von σ-Strukturen und eine "logisch definierbare" Reduktion $I : \tau\text{-}\mathsf{STRUKTUREN} \to \sigma\text{-}\mathsf{STRUKTUREN}$, so dass für alle τ-Strukturen $\mathfrak{A}$ gilt: $\mathfrak{A} \in \mathsf{C} \iff \mathcal{I}(\mathfrak{A}) \in \mathsf{D}$.
Analog zur Eigenschaft von Polynomialzeit-Reduktionen

"Falls $f : A \leqslant_p B$ und $A \notin$ PTIME, so auch $B \notin$ PTIME."

soll für logische Reduktionen gelten:

"Falls $I : \mathsf{C} \leqslant \mathsf{D}$ und C nicht FO-definierbar, so ist auch D nicht FO-definierbar."

Solche logischen Reduktionen werden durch den folgenden Begriff realisiert:

2.71 Definition (Interpretation von σ in τ). Sei $\mathscr{L}$ eine Logik, σ und τ Signaturen, $\sigma = \{R_1, .., R_m\}$, wobei R_i ein r_i-stelliges Relationssymbol sei (für $1 \leqslant i \leqslant m$).[6] Sei $k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$.

(a) Eine (einfache, k-dimensionale) *$\mathscr{L}$-Interpretation I* von σ in τ ist eine Sequenz

$$\big(\varphi_{\text{Univ}}(\vec{x}),\ \varphi_{R_1}(\vec{x}_1, .., \vec{x}_{r_1}),\ \ldots,\ \varphi_{R_m}(\vec{x}_1, .., \vec{x}_{r_m})\big)$$

von $\mathscr{L}[\tau]$-Formeln, wobei $\vec{x}, \vec{x}_1, .., \vec{x}_{r_i}$ jeweils Tupel aus k verschiedenen Variablen erster Stufe sind (d.h. $\vec{x} = x_1, .., x_k$ und $\vec{x}_j = x_{j,1}, .., x_{j,k}$).

(b) Eine Interpretation I von σ in τ definiert eine Abbildung

$$I \ :\ \tau\text{-}\mathsf{STRUKTUREN} \ \to\ \sigma\text{-}\mathsf{STRUKTUREN},$$

die jeder τ-Struktur $\mathfrak{A}$ die folgendermaßen definierte σ-Struktur $I(\mathfrak{A})$ zuordnet:

- Das *Universum U* von $I(\mathfrak{A})$ ist die Menge

$$U \ :=\ \varphi_{\text{Univ}}(\mathfrak{A}) \ =\ \{\vec{a} \in A^k \mid \mathfrak{A} \models \varphi_{\text{Univ}}[\vec{a}]\}.$$

- Für jedes $R_i \in \sigma$ ist $R_i^{I(\mathfrak{A})}$ die r_i-stellige Relation

$$R_i^{I(\mathfrak{A})} \ :=\ \varphi_{R_i}(\mathfrak{A}) \cap U^{r_i} \ =\ \{(\vec{a}_1, .., \vec{a}_{r_i}) \in U^{r_i} \mid \mathfrak{A} \models \varphi_{R_i}[\vec{a}_1, .., \vec{a}_{r_i}]\}.$$

(c) Sei $\mathfrak{A}$ eine τ-Struktur, $\mathfrak{B}$ eine σ-Struktur und I eine Interpretation von σ in τ. Wir sagen *I interpretiert $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{A}$*, falls $\mathfrak{B} \cong I(\mathfrak{A})$ (d.h. $\mathfrak{B}$ ist isomorph zu $I(\mathfrak{A})$).

2.72 Beispiele.
Sei $\tau := \{<\}$ die Signatur für lineare Ordnungen und S die Klasse aller endlichen linearen Ordnungen $\mathfrak{A} = (A, <^{\mathfrak{A}})$.

[6] Wir erlauben der Einfachheit halber in σ keine Konstantensymbole; der Begriff der Interpretation kann aber leicht modifiziert werden für Signaturen σ, die auch Konstantensymbole enthalten, indem man jedes Konstantensymbol c wie ein 1-stelliges Relationssymbol C behandelt.

(a) Sei $\sigma_1 := \{E, S, T\}$ die Signatur, die aus einem 2-stelligen Relationssymbol E und zwei 1-stelligen Relationssybolen S und T besteht.
Wir definieren eine FO-Interpretation I_1 von σ_1 in τ, die jeder endlichen linearen Ordnung $\mathfrak{A} = (A, <^{\mathfrak{A}})$ eine σ-Strukutur $I_1(\mathfrak{A}) = G = (V, E^G, S^G, T^G)$ zuordnet, so dass gilt:

$|A|$ ist ungerade $\iff$ im Graphen G gibt es einen Pfad von einem Knoten in S^G zu einem Knoten in T^G.

<u>Idee:</u> Ist $A = \{0, .., n\}$, so $V := A$, in E^G gibt es eine Kante von Knoten i zu Knoten $i{+}2$ (für alle $i \leqslant n{-}2$), S^G besteht aus dem kleinsten Element in A und T^G aus dem größten Element in A.

<u>Formal</u> ist die FO-Interpretation I_1 von σ_1 in τ folgendermaßen definiert:

$$I_1 \;=\; \big(\varphi_{\text{Univ}}(x),\ \varphi_E(x,y),\ \varphi_S(x),\ \varphi_T(x)\big)$$

mit

$$\begin{aligned}
\varphi_{\text{Univ}}(x) &:= x{=}x \\
\varphi_E(x,y) &:= \exists z \Big(x < z \land z < y \land \forall u \big((x < u \land u < y) \to u = z \big) \Big) \\
\varphi_S(x) &:= \neg\exists y\, y < x \\
\varphi_T(x) &:= \neg\exists y\, x < y.
\end{aligned}$$

(b) Sei $\sigma_2 := \{E\}$ die Signatur für Graphen. Wir definieren eine FO-Interpretation I_2 von σ_2 in τ, die jeder endlichen linearen Ordnung $\mathfrak{A} = (A, <^{\mathfrak{A}})$ einen ungerichteten[7] Graphen $I_2(\mathfrak{A}) = G = (V, E^G)$ zuordnet, so dass gilt

$|A|$ ist gerade $\iff$ G ist zusammenhängend.

<u>Idee:</u> Ist $A = \{0, .., n\}$, so ist $V := A$ und in G gibt es eine Kante zwischen den Knoten

(1) i und $i{+}2$, für alle $i \leqslant n{-}2$,

(2) n und 0,

(3) $n{-}1$ und 1.

Dann gilt: Ist n gerade (also $|A|$ ungerade), so zerfällt G in zwei disjunkte Kreise $C_1 = \{0, 2, 4, .., n\}$ und $C_2 = \{1, 3, 5, .., n{-}1\}$. Ist n ungerade (also $|A|$ gerade), so besteht G aus einem Kreis $C = \{0, 2, 4, .., n{-}1, 1, 3, 5, .., n\}$.

[7] Ein Graph $G = (V, E)$ heißt *ungerichtet*, falls für alle $v, w \in V$ gilt: $(v, v) \notin E$ und falls $(v, w) \in E$, so auch $(w, v) \in E$.

<u>Formal</u> ist die FO-Interpretation I_2 von σ_2 in τ folgendermaßen definiert:

$$I_2 \;=\; \big(\psi_{\text{Univ}}(x),\; \psi_E(x,y)\big)$$

mit

$$\begin{aligned}
\psi_{\text{Univ}}(x) &:= \; x = x \\
\psi_E(x,y) &:= \; \varphi_E(x,y) \,\vee\, \varphi_E(y,x) && (1)\\
&\quad \vee \big((\text{“}x{=}min\text{”} \wedge \text{“}y{=}max\text{”}) \,\vee\, (\text{“}y{=}min\text{”} \wedge \text{“}x{=}max\text{”})\big) && (2)\\
&\quad \vee \big((\text{“}x{=}min{+}1\text{”} \wedge \text{“}y{=}max{-}1\text{”}) \,\vee\, (\text{“}y{=}min{+}1\text{”} \wedge \text{“}x{=}max{-}1\text{”})\big) && (3)
\end{aligned}$$

Dabei ist $\varphi_E(x,y)$ die Formel aus (a) und

$$\begin{aligned}
\text{“}x{=}min\text{”} &:= \neg\,\exists z\; z < x\,,\\
\text{“}y{=}max\text{”} &:= \neg\,\exists z\; y < z\,,\\
\text{“}x{=}min{+}1\text{”} &:= \exists x' \,\big(\, x' < x \,\wedge\, \forall z\,(z < x \rightarrow z = x')\big)\,,\\
\text{“}y{=}max{-}1\text{”} &:= \exists y' \,\big(\, y < y' \,\wedge\, \forall z\,(y < z \rightarrow z = y')\big)\,.
\end{aligned}$$

2.73 Definition ($\mathscr{L}$-Reduktion). Sei $\mathscr{L}$ eine Logik und sei $k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$. Seien σ und τ Signaturen mit $\sigma = \{R_1,..,R_m\}$. Sei S_1 eine Klasse von τ-Strukturen und S_2 eine Klasse von σ-Strukturen und sei $\mathsf{C} \subseteq \mathsf{S}_1$ und $\mathsf{D} \subseteq \mathsf{S}_2$.
Eine (einfache, k-dimensionale) *$\mathscr{L}$-Reduktion von* $\mathsf{C} \subseteq \mathsf{S}_1$ *auf* $\mathsf{D} \subseteq \mathsf{S}_2$ ist eine (einfache, k-dimensionale) $\mathscr{L}$-Interpretation I von σ in τ, so dass für alle $\mathfrak{A} \in \mathsf{S}_1$ gilt:

(1.) $I(\mathfrak{A}) \in \mathsf{S}_2$ und

(2.) $\mathfrak{A} \in \mathsf{C} \iff I(\mathfrak{A}) \in \mathsf{D}$.

2.74 Beispiel. Die Interpretation I_2 aus Beispiel 2.72 (b) liefert eine 1-dimensionale FO-Reduktion von $\mathsf{Even}_< \subseteq \mathsf{S}_<$ auf $\mathsf{Conn} \subseteq \mathsf{UGraphs}$, wobei

$\mathsf{Even}_<$	die Klasse aller endlichen linearen Ordnungen gerader Länge,
$\mathsf{S}_<$	die Klasse aller endlichen linearen Ordnungen,
Conn	die Klasse aller endlichen ungerichteten zusammenhängenden Graphen,
$\mathsf{UGraphs}$	die Klasse aller endlichen ungerichteten Graphen ist.

Im Folgenden wird nun der Zusammenhang zwischen $\mathscr{L}$-Reduktionen (bzw. $\mathscr{L}$-Interpretationen) und der $\mathscr{L}$-Definierbarkeit von Problemen hergestellt.

2.75 Definition. Sei $k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$, σ und τ Signaturen mit $\sigma = \{R_1,..,R_m\}$ und $\mathscr{L}$ eine der Logiken FO, SO, LFP, IFP, PFP, TC, DTC. Eine k-dimensionale $\mathscr{L}$-Interpretation

$$I \;=\; \big(\varphi_{\text{Univ}}(\vec{x}),\; \varphi_{R_1}(\vec{x}_1,..,\vec{x}_{r_1}),\; \ldots,\; \varphi_{R_m}(\vec{x}_1,..,\vec{x}_{r_m})\big)$$

von σ in τ definiert eine Abbildung

$$\cdot^I \;:\; \mathscr{L}[\sigma] \;\to\; \mathscr{L}[\tau]\,,$$

die jeder $\mathscr{L}[\sigma]$-Formel ψ die folgendermaßen per Induktion nach dem Formelaufbau definierte $\mathscr{L}[\tau]$-Formel ψ^I zuordnet:

(A1) Ist ψ von der Form $R_i(y_1,..,y_{r_i})$ für $R_i \in \sigma$, so $\psi^I := \varphi_{R_i}(\vec{y}_1,..,\vec{y}_{r_i})$, wobei $\vec{y}_j = y_{j,1},..,y_{j,k}$, für alle $j \in \{1,..,r_i\}$.

(A2) Ist ψ von der Form $y = z$ für $y, z \in \mathrm{Var}_1$, so $\psi^I := \bigwedge_{j=1}^{k}(y_j = z_j)$.

(A3) Ist ψ von der Form $X(y_1,..,y_r)$, für eine r-stellige Relationsvariable $X \in \mathrm{Var}_2$, so $\psi^I := \hat{X}(\vec{y}_1,..,\vec{y}_r)$, wobei $\hat{X}$ eine $(r{\cdot}k)$-stellige Relationsvariable und $\vec{y}_j := y_{j,1},..,y_{j,k}$, für alle $j \in \{1,..,r\}$.

(BC) Ist ψ von der Form $\neg\psi_1$ bzw. von der Form $(\psi_1 * \psi_2)$ mit $* \in \{\wedge,\vee,\to,\leftrightarrow\}$, so ist $\psi^I := \neg\,\psi_1^I$ bzw. von der Form $(\psi_1^I * \psi_2^I)$.

(Q1) Ist ψ von der Form $\exists y\,\psi_1$ für eine Variable $y \in \mathrm{Var}_1$, so ist

$$\psi^I \;:=\; \exists y_1 \cdots \exists y_k \,\big(\,\varphi_{\mathrm{Univ}}(y_1,..,y_k) \;\wedge\; \psi_1^I\,\big).$$

Ist ψ von der Form $\forall y\,\psi_1$, so ist

$$\psi^I \;:=\; \forall y_1 \cdots \forall y_k \,\big(\,\varphi_{\mathrm{Univ}}(y_1,..,y_k) \;\to\; \psi_1^I\,\big).$$

(Q2) Ist ψ von der Form $\exists X\,\psi_1$ bzw. $\forall X\,\psi_1$ für eine r-stellige Relationsvariable X, so ist, für eine $(r{\cdot}k)$-stellige Relationsvariable $\hat{X}$,

$$\psi^I \quad:=\quad \exists \hat{X}\,\Big(\forall\vec{z}_1\cdots\forall\vec{z}_r\,\big(\,\hat{X}(\vec{z}_1,..,\vec{z}_r) \to \bigwedge_{j=1}^{k}\varphi_{\mathrm{Univ}}(\vec{z}_j)\big)\;\;\wedge\;\psi_1^I\Big)$$

bzw.

$$\psi^I \quad:=\quad \forall \hat{X}\,\Big(\forall\vec{z}_1\cdots\forall\vec{z}_r\,\big(\,\hat{X}(\vec{z}_1,..,\vec{z}_r) \to \bigwedge_{j=1}^{k}\varphi_{\mathrm{Univ}}(\vec{z}_j)\big)\;\to\;\psi_1^I\Big).$$

(FP) Ist ψ von der Form $[\mathbf{fp}_{R,x_1,..,x_r}\,\psi_1(R,x_1,..,x_r)](t_1,..,t_r)$, für $\mathbf{fp} \in \{\mathbf{lfp},\mathbf{ifp},\mathbf{pfp}\}$ und eine r-stellige Relationsvariable R, so

$$\psi^I \;:=\; \Big[\,\mathbf{fp}_{\hat{R},\vec{x}_1,..,\vec{x}_r}\;\psi_1^I(\hat{R},\vec{x}_1,..,\vec{x}_r) \;\wedge\; \bigwedge_{j=1}^{r}\varphi_{\mathrm{Univ}}(\vec{x}_j)\Big](\vec{t}_1,..,\vec{t}_r)\,,$$

wobei $\hat{R}$ eine $(r{\cdot}k)$-stellige Relationsvariable ist.

((D)TC) Ist ψ von der Form $[(\mathbf{d})\mathbf{tc}_{x_1,..,x_r,y_1,..,y_r}\,\psi_1](s_1,..,s_r,t_1,..,t_r)$, für $(\mathbf{d})\mathbf{tc} \in \{\mathbf{tc},\mathbf{dtc}\}$ und $r \geqslant 1$, so

$$\psi^I \;:=\; \Big[(\mathbf{d})\mathbf{tc}_{\vec{x}_1,..,\vec{x}_r,\vec{y}_1,..,\vec{y}_r}\;\psi_1^I \wedge \bigwedge_{j=1}^{r} \varphi_{\text{Univ}}(\vec{x}_j) \wedge \bigwedge_{j=1}^{r} \varphi_{\text{Univ}}(\vec{y}_j)\Big](\vec{s}_1,..,\vec{s}_r,\vec{t}_1,..,\vec{t}_r)\,.$$

Obige Definition ist gerade so gewählt, dass gilt:

2.76 Lemma. *Sei $\mathscr{L}$ eine der Logiken* FO, SO, LFP, IFP, PFP, TC, DTC. *Seien σ und τ Signaturen mit $\sigma = \{R_1,..,R_m\}$, und sei I eine $\mathscr{L}$-Interpretation von σ in τ. Dann gilt für jede τ-Struktur $\mathfrak{A}$ und jeden $\mathscr{L}[\sigma]$-Satz ψ:*

$$\mathfrak{A} \models \psi^I \quad\Longleftrightarrow\quad I(\mathfrak{A}) \models \psi\,.$$

Beweis: *Übung.* □

2.77 Korollar (Reduktionslemma). *Sei $\mathscr{L}$ eine der Logiken* FO, SO, LFP, IFP, PFP, TC, DTC. *Seien σ und τ Signaturen mit $\sigma = \{R_1,..,R_m\}$. Sei S_1 eine Klasse von τ-Strukturen, S_2 eine Klasse von σ-Strukturen und sei I eine $\mathscr{L}$-Reduktion von $\mathsf{C} \subseteq \mathsf{S}_1$ auf $\mathsf{D} \subseteq \mathsf{S}_2$. Dann gilt:*

(a) Falls D $\mathscr{L}$-definierbar in S_2, dann ist auch C $\mathscr{L}$-definierbar in S_1.

(b) Falls C nicht $\mathscr{L}$-definierbar in S_1, dann ist auch D nicht $\mathscr{L}$-definierbar in S_2.

Beweis: (b) ist nur eine andere (äquivalente) Formulierung der Aussage von (a). Zum Beweis von (a) sei ψ ein $\mathscr{L}[\sigma]$-Satz, der D in S_2 definiert, d.h. es gilt für alle σ-Strukturen $\mathfrak{B} \in \mathsf{S}_2$:

$$(*) \qquad \mathfrak{B} \in \mathsf{D} \iff \mathfrak{B} \models \psi.$$

Da I eine $\mathscr{L}$-Reduktion von $\mathsf{C} \subseteq \mathsf{S}_1$ auf $\mathsf{D} \subseteq \mathsf{S}_2$ ist, gilt für alle τ-Strukturen $\mathfrak{A} \in \mathsf{S}_1$, dass $I(\mathfrak{A}) \in \mathsf{S}_2$ und

$$\mathfrak{A} \in \mathsf{C} \iff I(\mathfrak{A}) \in \mathsf{D} \overset{(*)}{\iff} I(\mathfrak{A}) \models \psi \overset{\text{Lemma 2.76}}{\iff} \mathfrak{A} \models \psi^I.$$

Der $\mathscr{L}[\tau]$-Satz ψ^I ist also eine $\mathscr{L}$-Definition von C in S_1. □

Hat man gezeigt, dass ein Problem $\mathsf{C} \subseteq \mathsf{S}_1$ *nicht* $\mathscr{L}$-definierbar ist, so kann man unter Verwendung von Korollar 2.77 durch Angabe einer $\mathscr{L}$-Reduktion von $\mathsf{C} \subseteq \mathsf{S}_1$ auf $\mathsf{D} \subseteq \mathsf{S}_2$ nachweisen, dass auch das Problem $\mathsf{D} \subseteq \mathsf{S}_2$ *nicht* $\mathscr{L}$-definierbar ist.

2.78 Beispiel. Aus Beispiel 2.74 und Korollar 2.77 folgt:
Falls $\mathsf{Even}_<$ *nicht* FO-definierbar in $\mathsf{S}_<$, so ist auch Conn *nicht* FO-definierbar in $\mathsf{UGraphs}$. D.h.: Falls man in der Logik erster Stufe nicht beschreiben kann, dass die Länge einer linearen Ordnung *gerade* ist, dann kann man auch nicht beschreiben, dass ein Graph *zusammenhängend* ist.

Abschließend zeigen wir, wie man *jede* σ-Struktur (für jede beliebige Signatur σ) durch einen *Graphen* (also eine $\{E\}$-Struktur) interpretieren kann.

2.79 Satz. *Sei $\sigma = \{R_1,..,R_m\}$ eine beliebige relationale Signatur und sei $\tau := \{E\}$ die Signatur, die aus einem 2-stelligen Relationssymbol E besteht. Dann gibt es eine* FO-*Interpretation I von $\{E\}$ in σ und eine* FO-*Interpretation J von σ in $\{E\}$, so dass für alle σ-Strukturen $\mathfrak{A}$ mit $|A| \geqslant 2$ gilt:*

$$I(\mathfrak{A}) \text{ ist ein ungerichteter Graph} \quad \text{und} \quad J\big(I(\mathfrak{A})\big) \cong \mathfrak{A}.$$

Beweis: *Vorbemerkung:* In den folgenden Abbildungen zeichnen wir

um anzudeuten, dass x und y zwei verschiedene Knoten eines Graphen G sind und $(x,y) \in E^G$ und $(y,x) \in E^G$. Für eine Zahl $i \geqslant 3$ heißt ein Knoten x von G *i-etikettiert*, falls es in G einen induzierten Teilgraphen der Form

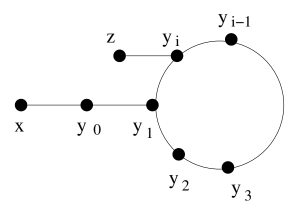

Abbildung 2.2: Das i-Etikett eines Knotens x

gibt (die Skizze bedeutet dabei, dass sämtliche Knoten verschieden sind, zwischen ihnen nur die eingezeichneten Kanten verlaufen und es von den Knoten $y_0,..,y_i,z$ keine Kante zu irgendwelchen anderen Knoten des Graphen gibt).

Schritt 1: Wir zeigen zunächst, wie man jede σ-Struktur $\mathfrak{A}$ durch einen ungerichteten Graphen $G := \mathcal{I}(\mathfrak{A})$ repräsentieren kann.
Seien $r_1,..,r_m \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ die Stelligkeiten der Relationssymbole $R_1,..,R_m$ aus σ. Der zu einer σ-Struktur $\mathfrak{A}$ gehörige Graph $G := \mathcal{I}(\mathfrak{A})$ ist folgendermaßen aufgebaut: Für jedes Element $a \in A$ gibt es in G einen 5-etikettierten Knoten v_a (d.h. für jedes einzelne Element a in A gibt es 8 Knoten in G, nämlich einen für a selbst und 7 weitere für das zugehörige 5-Etikett).
Außerdem gibt es für jedes $j \in \{1,..,m\}$ und jedes r_j-Tupel $\vec{a} = (a_1,..,a_{r_j}) \in R_j^{\mathfrak{A}}$ einen $5{+}j$-etikettierten Knoten $v_{j,\vec{a}}$, von dem aus es zusätzlich für jede Position i im r_j-Tupel (also für jedes $i \in \{1,..,r_j\}$) einen Pfad der Länge $i{+}1$ von $v_{j,\vec{a}}$ zu v_{a_i} gibt. D.h. es gibt zusätzliche Knoten $w_{j,\vec{a},i,1}, w_{j,\vec{a},i,2}, \ldots, w_{j,\vec{a},i,i}$, so dass

$$v_{j,\vec{a}} — w_{j,\vec{a},i,1} — w_{j,\vec{a},i,2} — \cdots — w_{j,\vec{a},i,i} — v_{a_i} \qquad (*)$$

einen Pfad in G bildet und die Knoten $w_{j,\vec{a},k,1}, w_{j,\vec{a},k,2}, \dots, w_{j,\vec{a},k,k}$ mit keinem anderen Knoten aus G verbunden sind.
Damit sind die Knoten und Kanten des Graphen $G = \mathcal{I}(\mathfrak{A})$ vollständig beschrieben.

Schritt 2: Wir teilen nun die Knoten von $G := \mathcal{I}(\mathfrak{A})$ in verschiedene *Typen* ein, die man jeweils durch eine FO$[E]$-Formel beschreiben kann.
Dazu definieren wir die FO$[E]$-Formel

$$\rho_E(x,y) \quad := \quad E(x,y) \ \wedge \ E(y,x) \ \wedge \ \neg x{=}y$$

und

$$\rho_{\neg E}(x,y) \quad := \quad \neg E(x,y) \ \wedge \ \neg E(y,x) \ \wedge \ \neg x{=}y\,.$$

Für jedes $i \geqslant 3$ sei $\mathit{Etikett}_i(x, y_0, .., y_i, z)$ die folgende FO$[E]$-Formel, die besagt, dass die Knoten $x, y_0, .., y_i, z$ ein i-Etikett für Knoten x bilden.

$$\mathit{Etikett}_i(x, y_0, .., y_i, z) \ :=$$

$$\rho_E(x,y_0) \ \wedge \rho_E(y_0,y_1) \ \wedge \ \bigwedge_{j=1}^{i-1} \rho_E(y_j,y_{j+1}) \ \wedge \ \rho_E(y_i,y_1) \ \wedge \ \rho_E(y_i,z) \ \wedge$$
$$\Big(\rho_{\neg E}(x,z) \ \wedge \ \bigwedge_{j=1}^{i} \rho_{\neg E}(x,y_j)\Big) \ \wedge \ \bigwedge_{j'=0}^{i-1} \Big(\rho_{\neg E}(y_{j'},z) \ \wedge \ \bigwedge_{j=j'+2}^{i} \rho_{\neg E}(y_{j'},y_j)\Big) \ \wedge$$
$$\forall u \, \forall v \ \Big(\big(\, u = z \vee \bigvee_{j=0}^{i} u = y_j \,\big) \ \wedge \big(\, v \neq x \ \wedge \ v \neq z \ \wedge \bigwedge_{j=0}^{i} v \neq y_j \,\big)\Big) \rightarrow \Big(\neg E(u,v) \ \wedge \ \neg E(v,u)\Big)\,.$$

Wir sagen, dass ein Knoten v *vom Typ* (i,x) ist, falls er der Knoten x eines i-Etiketts ist. Analog heißt ein Konten v *vom Typ* (i, y_j) (bzw. (i,z)), falls er der Knoten y_j (bzw. der Knoten z) eines i-Etiketts ist. Unter Verwendung der Formel $\mathit{Etikett}_i(x, y_0, .., y_i, z)$ findet man für jedes $i \geqslant 3$ und jedes $u \in \{x, y_0, .., y_i, z\}$ leicht eine FO$[E]$-Formel

$$\alpha_{(i,u)}(v),$$

die besagt, dass Konten v vom Typ (i,u) ist.

Knoten, die auf Pfaden aus $(*)$ liegen, folgende Typen zu: Ein Knoten v heißt *vom Typ* (j,i,k), falls er der k-te Knoten in einem Pfad der Länge $i{+}1$ ist, der von einem $(5{+}j)$-etikettierten Knoten zu einem 5-etikettierten Knoten verläuft (d.h. falls er der Knoten $w_{j,\vec{a},i,k}$ in einem Pfad $(*)$ ist). Analog zu den Formeln $\alpha_{(i,u)}(v)$ kann man leicht für alle Zahlen i,j,k eine FO$[E]$-Formel

$$\alpha_{(j,i,k)}(v)$$

konstruieren, die besagt, dass Knoten v vom Typ (j,i,k) ist.

Jeder Knoten von G ist von genau einem der folgenden Typen:

- (i,u), für ein $i \in \{5,..,5{+}m\}$ und ein $u \in \{x, y_0,..,y_i, z\}$,
- (j,i,k), für ein $j \in \{1,..,m\}$, $i \in \{1,..,r_j\}$, $k \in \{1,..,i\}$.

Schritt 3: Die (1-dimensionale) Interpretation

$$J := \Big(\psi_{\text{Univ}}(v), \big(\psi_{R_j}(v_1,..,v_{r_j})\big)_{j=1,..,m} \Big)$$

von σ in $\{E\}$ ist folgendermaßen definiert:

$$\begin{aligned} \psi_{\text{Univ}}(v) &:= \alpha_{(5,x)}(v) \\ \psi_{R_j}(v_1,..,v_{r_j}) &:= \exists u \Big(\alpha_{(5+j,x)}(u) \wedge \bigwedge_{i=1}^{r_j} \text{“es gibt einen Pfad der Länge } i{+}1 \text{ von } u \text{ nach } v_i\text{”} \Big) \end{aligned}$$

J ist so definiert, dass für alle σ-Strukturen $\mathfrak{A}$ gilt:

$(**)$ Ist $G := \mathcal{I}(\mathfrak{A})$, so ist $J(G) \cong \mathfrak{A}$.

Schritt 4: Wir zeigen nun noch, dass die Abbildung $\mathcal{I}$ durch eine FO$[\sigma]$-Interpretation

$$I := \Big(\varphi_{\text{Univ}}(\vec{v}),\ \varphi_E(\vec{v},\vec{w}) \Big)$$

realisiert werden kann.

Sei dazu $r := \mathit{max}\{r_1,..,r_m\}$ die maximale Stelligkeit eines Relationssymbols in σ und sei $p \in \mathbb{N}$ die Anzahl der am Ende von Schritt 2 genannten möglichen Typen (i,u) und (j,i,k), und sei $t_1,..,t_p$ eine Auflistung all dieser Typen.
Jeder Knoten v von $G = \mathcal{I}(\mathfrak{A})$ kann durch ein $(r+p+1)$-Tupel

$$(\vec{a}, \vec{b}, c) \in A^{r+p+1}$$

wie folgt repräsentiert werden: $\vec{a} = a_1,..,a_r$ gibt das Element $a_1 \in A$ oder das Tupel $(a_1,..,a_{r_j}) \in R_j^{\mathfrak{A}}$ an, für das der Knoten v geschaffen wurde. Die Sequenz $\vec{b}, c = b_1,..,b_p, c$ gibt wie folgt an, von welchem Typ der Knoten v ist:

$$v \text{ ist vom Typ } t_j \iff c = b_j \ \text{(und } c \neq b_i \text{ für alle } i \neq j\text{)}$$

(genau dafür brauchen wir die Voraussetzung, dass $|A| \geqslant 2$ ist). Man beachte, dass es bei dieser Repräsentation für jeden Knoten v *mehrere* Tupel $(\vec{a}, \vec{b}, c)$ geben kann, die v repräsentieren. Es ist nicht schwierig (aber einigermaßen aufwendig), FO$[\sigma]$-Formeln $\varphi_{\text{Univ}}(\vec{x})$ und $\varphi_E(\vec{x},\vec{y})$ anzugeben, die besagen, dass $\vec{x}$ ein Repräsentant eines Knotens von $G := \mathcal{I}(\mathfrak{A})$ ist bzw. dass $\vec{x}$ und $\vec{y}$ Repräsentanten von Knoten sind, zwischen denen in G eine Kante verläuft. Insgesamt erhalten wir dadurch eine $(r+p+1)$-dimensionale Interpretation I von $\{E\}$ in σ, so dass für alle σ-Strukturen $\mathfrak{A}$ gilt: $\mathfrak{A} \cong J\big(I(\mathfrak{A})\big)$. $\square$