dass für jede endliche geordnete σ-Struktur $\mathfrak{A}$ gilt: $\mathfrak{A} \in \mathsf{C} \iff \mathfrak{A} \models \Phi$.
Aus dem Beweis von Theorem 2.47 folgt, dass Φ o.B.d.A. von der Form

$$[\mathbf{pfp}_{R,\vec{x}}\,\varphi](\vec{max}, 0)$$

ist, wobei $\varphi(R, \vec{x}) \in \mathrm{FO}[\sigma\dot{\cup}\{R\}]$. Sei $r := ar(R)$ die Stelligkeit von R und sei $\vec{x} = x_1, .., x_r$.

Aus Bemerkung 2.39 folgt, dass für jede endliche σ-Struktur $\mathfrak{A}$, für $n := |A|$, für $N := n^r = |A^r|$ und für die Induktionsstufen R^i des Operators $F_{\varphi,\mathfrak{A}}$ gilt:

(1) Falls $R^{2^N} = R^{2^N+1}$, so $\mathbf{pfp}(F_{\varphi,\mathfrak{A}}) = R^{2^N}$.

(2) Falls $R^{2^N} \neq R^{2^N+1}$, so $\mathbf{pfp}(F_{\varphi,\mathfrak{A}}) = \varnothing$.

Unser Ziel ist, eine Polynomialzeit-Reduktion f von $\mathsf{C} \subseteq \mathsf{FinOrd}$ auf das Auswertungsproblem für FO zu finden.

<u>*Ansatz:*</u> f bildet jedes $\mathfrak{A} \in \mathsf{FinOrd}$ (von dem man wissen will, ob es zur Klasse C gehört) auf ein Tupel $(\mathfrak{A}, \psi_{\Phi,\mathfrak{A}})$ ab, wobei $\psi_{\Phi,\mathfrak{A}}$ ein FO$[\sigma]$-Satz ist, für den gilt:

(3) $\mathfrak{A} \models \psi_{\Phi,\mathfrak{A}} \iff \mathfrak{A} \in \mathsf{C} \overset{\text{def}}{\iff} \mathfrak{A} \models \Phi \overset{\text{def}}{\iff} \mathfrak{A} \models [\mathbf{pfp}_{R,\vec{x}}\,\varphi](\vec{max}, 0)$.

(4) $\psi_{\Phi,\mathfrak{A}}$ ist in Zeit, die polynomiell in $|A|$ ist, berechenbar.
Insbesondere ist die Länge $|\psi_{\Phi,\mathfrak{A}}|$ der Formel $\psi_{\Phi,\mathfrak{A}}$ polynomiell in der Größe von $\mathfrak{A}$.

<u>*Idee:*</u> Sei $\mathfrak{A}$ gegeben und sei $n := |A|$ und $N := n^r$. O.B.d.A. ist $n \geqslant 2$, insbesondere werden also die Konstantensymbole 0 und *max* durch zwei verschiedene Elemente in A interpretiert.
Seien $v_1, .., v_N$ Variablen erster Stufe und seien $\vec{x}$, $\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_N$ jeweils r-Tupel von Variablen erster Stufe. Für jedes $i \in \{0, .., N\}$ definieren wir induktiv eine FO$[\sigma]$-Formel

$$\varphi_i\big(\,\vec{x},\, \vec{y}_1, v_1,\, \vec{y}_2, v_2,\, \ldots, \vec{y}_N, v_N\,\big),$$

so dass für alle $\vec{b}_1, .., \vec{b}_N \in A^r$ und alle $d_1, .., d_N \in \{0^{\mathfrak{A}}, max^{\mathfrak{A}}\}$ gilt:

$$(*)_i: \quad \{\, \vec{a} \in A^r \ \mid\ \mathfrak{A} \models \varphi_i[\vec{a}, \vec{b}_1, d_1, \ldots, \vec{b}_N, d_N]\,\} \;=\; \underbrace{F_{\varphi,\mathfrak{A}}{}^{2^i}}_{2^i\text{-fache Anwendung des Operators } F_{\varphi,\mathfrak{A}}}\Big(\{\vec{b}_j \ \mid\ 1 \leqslant j \leqslant N,\ d_j \neq 0^{\mathfrak{A}}\}\Big)$$

Bevor wir die genaue Konstruktion der Formeln φ_i (für $i \in \{0, .., N\}$) angeben, zeigen wir zunächst, wie wir die gewünschte Formel $\psi_{\Phi,\mathfrak{A}}$ aus φ_N erhalten. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A} \models \Phi \quad &\iff \quad \mathfrak{A} \models [\mathbf{pfp}_{R,\vec{x}}\,\varphi](\vec{max}, 0) \\
&\iff \quad (\vec{max}, 0) \in R^{2^N} \quad \text{und} \quad R^{2^N} = R^{2^N+1} \\
&\iff \quad \mathfrak{A} \models \psi_{\Phi,\mathfrak{A}},
\end{aligned}$$

wobei

$\psi_{\Phi,\mathfrak{A}}$:=

$$\exists \vec{y}_1 \,\exists v_1 \,\cdots\, \exists \vec{y}_N \,\exists v_N \,\Big(\bigwedge_{j=1}^{N} \big(v_j = 0 \,\vee\, v_j = \mathit{max} \big) \qquad \text{(Zeile 1)}$$

$$\wedge\ \forall \vec{x} \,\Big(\varphi_N(\vec{x}, \vec{y}_1, 0, .\,., \vec{y}_N, 0) \ \leftrightarrow\ \bigvee_{j=1}^{N} (v_j \neq 0 \,\wedge\, \vec{x} = \vec{y}_j) \Big) \qquad \text{(Zeile 2)}$$

$$\wedge\ \Big(\bigvee_{j=1}^{N} \big(v_j \neq 0 \,\wedge\, \vec{y}_j = (\vec{max}, 0) \big) \Big) \qquad \text{(Zeile 3)}$$

$$\wedge\ \forall \vec{x} \,\Big(\big(\bigvee_{j=1}^{N} (v_j \neq 0 \,\wedge\, \vec{x} = \vec{y}_j) \big) \ \leftrightarrow\ \varphi\big(\vec{x}, \frac{R(\vec{u})}{\bigvee_{j=1}^{N} (v_j \neq 0 \wedge \vec{u} = \vec{y}_j)}\big) \Big) \Big) \qquad \text{(Zeile 4)}$$

Dabei besagt

- Zeile 2, dass $R^{2^N} \stackrel{\text{def}}{=} F_{\varphi,\mathfrak{A}}{}^{2^N}(\varnothing) = \{\vec{y}_j \mid v_j \neq 0\}$,
- Zeile 3, dass $(\vec{max}, 0) \in R^{2^N}$,
- Zeile 4, dass $R^{2^N} = R^{2^N+1} \stackrel{\text{def}}{=} F_{\varphi,\mathfrak{A}}(R^{2^N})$.

  Hierbei bezeichnet $\varphi\big(\vec{x}, \frac{R(\vec{u})}{\bigvee_{j=1}^{N}(v_j \neq 0 \wedge \vec{u} = \vec{y}_j)}\big)$ die Formel, die aus $\varphi(R, \vec{x})$ entsteht, indem jedes Vorkommen eines Atoms der Form $R(\vec{u})$ durch die Formel $\bigvee_{j=1}^{N}(v_j \neq 0 \wedge \vec{u} = \vec{y}_j)$ ersetzt wird.

Klar ist: Wenn die Formel φ_N die Eigenschaft $(*)_N$ hat und in Zeit poly(n) konstruierbar ist, so ist auch $\psi_{\Phi,\mathfrak{A}}$ in Zeit poly(n) konstruierbar und es gilt:

$$\mathfrak{A} \in \mathsf{C} \iff \mathfrak{A} \models [\mathbf{pfp}_{R,\vec{x}}\, \varphi](\vec{max}, 0) \iff \mathfrak{A} \models \psi_{\Phi,\mathfrak{A}}.$$

Somit ist die Abbildung, die jeder σ-Struktur $\mathfrak{A} \in \mathsf{FinOrd}$ das Tupel $(\mathfrak{A}, \psi_{\Phi,\mathfrak{A}})$ zuordnet, eine Polynomialzeit-Reduktion von C auf das Auswertungsproblem für FO auf FinOrd.
Um den Beweis von Satz 2.51 zu beenden, müssen wir also nur noch die gewünschte Formel φ_N konstruieren. Dazu konstruieren wir induktiv für $i \in \{0, .\,., N\}$ Formeln φ_i mit Eigenschaft $(*)_i$, so dass

$$|\varphi_{i+1}| \ \leqslant\ n^{\text{Konstante}} + |\varphi_i|.$$

Insgesamt ist dann

$$|\varphi_N| \ \leqslant\ N \cdot n^{\text{Konstante}} = n^r \cdot n^{\text{Konstante}} = \text{poly}(n).$$

Induktionsanfang $i = 0$: $2^i = 2^0 = 1$. Wir setzen

$$\varphi_0(\vec{x}, \vec{y}_1, v_1, .\,., \vec{y}_N, v_N) \ :=\ \varphi\Big(\vec{x}\,, \frac{R(\vec{u})}{\bigvee_{j=1}^{N}(v_j \neq 0 \,\wedge\, \vec{u} = \vec{y}_j)}\Big).$$

Offensichtlich hat φ_0 die Eigenschaft $(*)_0$, und es gilt $|\varphi_0| = \mathcal{O}(|\varphi| \cdot r \cdot N) = \text{poly}(n)$.

<u>*Induktionsschritt $i \to i{+}1$:*</u> Um eine Formel $\varphi_{i+1}(\vec{x}, \vec{y}_1, v_1, .., \vec{y}_N, v_N)$ mit der Eigenschaft $(*)_{i+1}$ zu konstruieren, nutzen wir, dass für $F := F_{\varphi,\mathfrak{A}}$ gilt:

$$F^{2^{i+1}}\big(\{\vec{y}_j \mid v_j \neq 0\}\big) \;=\; F^{2^i}\Big(F^{2^i}\Big(\{\vec{y}_j \mid v_j \neq 0\}\Big)\Big),$$

setzen

$$\begin{aligned}
\{\vec{y}\,'_j \mid v'_j \neq 0\} \;&:=\; F^{2^i}\Big(\{\vec{y}_j \mid v_j \neq 0\}\Big) \quad \text{und} \\
\{\vec{y}\,''_j \mid v''_j \neq 0\} \;&:=\; F^{2^i}\Big(\{\vec{y}\,'_j \mid v'_j \neq 0\}\Big) \;=\; F^{2^{i+1}}\Big(\{\vec{y}_j \mid v_j \neq 0\}\Big)
\end{aligned}$$

und nutzen die Formel φ_i, um die Mengen $\{\vec{y}\,'_j \mid v'_j \neq 0\}$ und $\{\vec{y}\,''_j \mid v''_j \neq 0\}$ zu bestimmen. Ein technisches Problem dabei ist, dass die Formel φ_{i+1} nicht *zweimal* die Formel φ_i "aufrufen" kann (einmal mit $\vec{y}_1, v_1, .., \vec{y}_N, v_N$ und dann noch mal mit $\vec{y}\,'_1, v'_1, .., \vec{y}\,'_N, v'_N$, um zuerst $\vec{y}\,'_1, v'_1, .., \vec{y}\,'_N, v'_N$ und danach $\vec{y}\,''_1, v''_1, .., \vec{y}\,''_N, v''_N$ zu ermitteln). Dann wäre nämlich φ_{i+1} *doppelt* so lang wie φ_i, und am Ende wäre

$$|\varphi_N| \;\geqslant\; 2^N \cdot |\varphi|,$$

und das ist viel zu lang als dass man φ_N noch in Zeit poly(n) berechnen könnte.
Um dies zu vermeiden, wählen wir die folgende Formel, die Allquantoren benutzt, um mit einem einzigen "Aufruf" der Formel φ_i sowohl die Werte $\vec{y}\,'_1, v'_1, .., \vec{y}\,'_N, v'_N$ als auch die Werte $\vec{y}\,''_1, v''_1, .., \vec{y}\,''_N, v''_N$ festzulegen.

$$\begin{aligned}
&\varphi_{i+1}(\vec{x}, \vec{y}_1, v_1, .., \vec{y}_N, v_N) \;:= \\[1ex]
&\exists \vec{y}\,'_1\, \exists v'_1 \,\cdots\, \exists \vec{y}\,'_N\, \exists v'_N \;\; \exists \vec{y}\,''_1\, \exists v''_1 \,\cdots\, \exists \vec{y}\,''_N\, \exists v''_N \;\Big(\\
&\quad \bigwedge_{j=1}^{N} \big(v''_j \neq 0 \,\wedge\, \vec{x} = \vec{y}\,''_j\big) \;\wedge \\
&\quad \bigwedge_{j=1}^{N} \big(\, v'_j = 0 \,\vee\, v'_j = \mathit{max}\,\big) \;\wedge\; \bigwedge_{j=1}^{N} \big(\, v''_j = 0 \,\vee\, v''_j = \mathit{max}\,\big) \;\wedge \\
&\quad \forall \vec{w}_1 \forall u_1 \cdots \forall \vec{w}_N \forall u_N \,\Big(\big(\, \overrightarrow{(\vec{w}, u)} = \overrightarrow{(\vec{y}, v)} \;\vee\; \overrightarrow{(\vec{w}, u)} = \overrightarrow{(\vec{y}\,', v')}\,\big) \;\to \\
&\qquad\qquad \big(\, \forall \vec{x} \;\big(\; \varphi_i(\vec{x}, \vec{w}_1, u_1, .., \vec{w}_N, u_N) \;\leftrightarrow \\
&\qquad\qquad\qquad \Big(\big(\, \overrightarrow{(\vec{w}, u)} = \overrightarrow{(\vec{y}, v)} \;\wedge\; \bigvee_{j=1}^{N} (\, v'_j \neq 0 \,\wedge\, \vec{x} = \vec{y}\,'_j\,)\,\big) \vee \\
&\qquad\qquad\qquad \big(\, \overrightarrow{(\vec{w}, u)} = \overrightarrow{(\vec{y}\,', v')} \;\wedge\; \bigvee_{j=1}^{N} (\, v''_j \neq 0 \,\wedge\, \vec{x} = \vec{y}\,''_j\,)\,\big)\Big)\big)\,\big)\Big)\Big),
\end{aligned}$$

wobei "$\overrightarrow{(\vec{w}, u)} = \overrightarrow{(\vec{y}, v)}$" als Abkürzung für die Formel $\bigwedge_{j=1}^{N} \big(\text{"}\vec{w}_j = \vec{y}_j\text{"} \wedge u_j = v_j\big)$ benutzt wird.

Gemäß dieser Konstruktion hat φ_{i+1} die Eigenschaft $(*)_{i+1}$ und es gilt

$$|\varphi_{i+1}| \leqslant n^{\text{Konstante}} + |\varphi_i|.$$

Speziell für $i = N$ gilt: Die Formel φ_N hat die Eigenschaft $(*)_N$ und kann in Zeit $\text{poly}(n)$ konstruiert werden. Somit sind wir fertig mit dem Beweis von Satz 2.51. □

2.3 TC-Logiken zur Beschreibung von LOGSPACE und NLOGSPACE

2.3.1 Die Logik TC

2.52 Definition. Sei A eine Menge, sei $k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ und sei $R \subseteq A^{2k}$.
Die *transitive Hülle* (engl.: transitive closure) $\mathbf{tc}(R)$ von R ist folgendermaßen definiert:

$$\mathbf{tc}(R) \;:=\; \left\{ (\vec{x},\vec{y}) \in A^{2k} \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{es gibt im Graphen } G_R := (V,E) \text{ mit } V_R := A^k \\ \text{und } E_R := \{(\vec{u},\vec{v}) \in A^k \times A^k \mid (\vec{u},\vec{v}) \in R\} \text{ einen} \\ \text{Pfad}^5 \text{der Länge} \geqslant 1 \text{ von Knoten } \vec{x} \text{ zu Knoten } \vec{y} \end{array} \right\}.$$

2.53 Definition (Transitive Hüllen-Logik TC). Sei σ eine Signatur.
Die Formelmenge TC$[\sigma]$ ist induktiv durch die Regeln (A1),(A2),(BC) und (Q1) der Logik erster Stufe, sowie die folgende Regel (TC) definiert:

(TC) Ist $\varphi(\vec{x},\vec{y})$ eine TC$[\sigma]$-Formel, wobei

- $\vec{x}$ und $\vec{y}$ zwei k-Tupel aus paarweise verschiedenen Variablen erster Stufe sind, für ein $k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$,
- φ außer $\vec{x}$ und $\vec{y}$ evtl. noch andere freie Variablen erster Stufe hat,

und sind $\vec{s}$ und $\vec{t}$ zwei k-Tupel aus Variablen erster Stufe und/oder Konstantensymbolen aus σ, so ist

$$[\mathbf{tc}_{\vec{x},\vec{y}}\,\varphi](\vec{s},\vec{t})$$

eine TC$[\sigma]$-Formel.

2.54 Bemerkungen.

(a) Man beachte, dass es in der Logik TC *keine* Relationsvariablen gibt.

(b) Jede Formel $\varphi(\vec{x},\vec{y})$ mit $2k$ freien Variablen $\vec{x},\vec{y}$ definiert in jeder Struktur $\mathfrak{A}$ (der passenden Signatur) eine $2k$-stellige Relation

$$\varphi(\mathfrak{A}) \;:=\; \{\, (\vec{u},\vec{v}) \in A^{2k} \;\mid\; \mathfrak{A} \models \varphi[\vec{u},\vec{v}]\,\}$$

und einen Graph $G_{\varphi,\mathfrak{A}} := (V_{\varphi,\mathfrak{A}}, E_{\varphi,\mathfrak{A}})$ mit $V_{\varphi,\mathfrak{A}} = A^k$ und $E_{\varphi,\mathfrak{A}} = \varphi(\mathfrak{A})$.

[5] Ein Pfad der Länge $\ell \in \mathbb{N}$ ist dabei eine Folge $\vec{v}_0,\ldots,\vec{v}_\ell \in V_R$ von Knoten, so dass für alle $i < \ell$ gilt: $(\vec{v}_i,\vec{v}_{i+1}) \in E_R$.

(c) Die *freien Variablen* einer TC-Formel der Form $[\mathbf{tc}_{\vec{x},\vec{y}}\,\varphi](\vec{s},\vec{t})$ sind

$$\Big(\mathit{frei}(\varphi) \setminus \{\vec{x},\vec{y}\}\Big) \;\cup\; \{s_j \mid s_j \in \mathrm{Var}_1\} \;\cup\; \{t_j \mid t_j \in \mathrm{Var}_1\}.$$

2.55 Definition (Semantik von TC[σ]-Formeln). Die Semantik von TC[σ]-Formeln der Form $\psi := [\mathbf{tc}_{\vec{x},\vec{y}}\,\varphi](\vec{s},\vec{t})$ ist folgendermaßen definiert:
Ist $\mathit{frei}(\psi) = \{\vec{z}\}$ und ist $\mathfrak{A}$ eine $(\sigma\dot{\cup}\{\vec{z}\})$-Struktur, so gilt:

$$\mathfrak{A} \models [\mathbf{tc}_{\vec{x},\vec{y}}\,\varphi](\vec{s},\vec{t}) \quad :\Longleftrightarrow \quad \big(\vec{s}^{\,\mathfrak{A}},\vec{t}^{\,\mathfrak{A}}\big) \in \mathbf{tc}\,\big(\varphi(\mathfrak{A})\big).$$

2.56 Beispiele.

(a) *Graphzusammenhang:*

Für jeden Graphen $G = (V,E)$ gilt

$$G \models \forall x\,\forall y\,\big[\,\mathbf{tc}_{x,y}\,\big(x = y \,\vee E(x,y)\big)\,\big](x,y)$$

genau dann, wenn G *stark zusammenhängend* ist, d.h. es gibt von jedem Knoten x zu jedem Knoten y einen Weg.

(b) *Lineare Ordnung zu einer Nachfolger-Relation:*

Die TC[$\{\mathit{succ}\}$]-Formel

$$\psi(u,v) \;:=\; [\mathbf{tc}_{x,y}\,\mathit{succ}(x,y)](u,v)$$

definiert für jedes $n \in \mathbb{N}$ in der Struktur $\mathfrak{A}_n := (\{0,..,n\},\mathit{succ}^n)$ mit $\mathit{succ}^n := \{(i,i+1) \mid 0 \leqslant i < n\}$ die natürliche lineare Ordnung auf $\{0,..,n\}$, d.h. es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $i,j \in \{0,..,n\}$, dass

$$\mathfrak{A}_n \models \psi[i,j] \iff i < j.$$

(c) *Addition:*

Die TC[$\{\mathit{succ},0\}$]-Formel

$$\varphi_+(u,v,w) \;:=\; \big[\mathbf{tc}_{x_1,x_2,y_1,y_2}\,\mathit{succ}(x_1,y_1) \wedge \mathit{succ}(x_2,y_2)\big]\,(0,u,v,w)$$

definiert für jedes $n \in \mathbb{N}$ in der Struktur $\mathfrak{B}_n := (\{0,..,n\},\mathit{succ}^n,0)$ die Addition auf $\{0,..,n\}$. D.h. für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $a,b,c \in \{0,..,n\}$ gilt: $\mathfrak{B}_n \models \varphi_+[a,b,c] \iff a+b=c$. (Idee dabei: Die TC-Formel beschreibt den Pfad $(0,u) \to (1,u{+}1) \to (2,u{+}2) \to \cdots \to (v,u{+}v) \to \cdots$.)

(d) *Kardinalität modulo 2:*

Für alle endlichen linearen Ordnungen $\mathfrak{A} = (A,<^{\mathfrak{A}})$ gilt:

$$\mathfrak{A} \models \exists z_0\,\exists z_{\mathit{max}}\,\Big(\forall x\,\big(\neg\, x < z_0 \;\wedge\; \neg\, z_{\mathit{max}} < x\,\big) \;\wedge\; \big[\,\mathbf{tc}_{x,y}\;\exists z\big(x < z < y \;\wedge \forall z'(x < z' < y \to z' = z)\big)\big](z_0,z_{\mathit{max}})\Big)$$

genau dann, wenn $|A|$ ungerade ist.

2.3.2 Varianten von TC: Die Logiken DTC, posTC und posDTC

2.57 Definition. Sei A eine Menge, sei $k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ und sei $R \subseteq A^{2k}$.
Die *deterministische transitive Hülle* $\mathbf{dtc}(R)$ von R ist folgendermaßen definiert:

$$\mathbf{dtc}(R) \;:=\; \left\{ (\vec{x},\vec{y}) \in A^{2k} \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{es gibt im Graphen } G_R := (V_R, E_R) \text{ mit } V_R := A^k \\ \text{und } E_R := \{(\vec{u},\vec{v}) \in A^k \times A^k \mid (\vec{u},\vec{v}) \in R\} \text{ einen} \\ \textit{deterministischen} \text{ Pfad von } \vec{x} \text{ zu } \vec{y}\text{, d.h. einen Pfad} \\ \text{der Länge} \geqslant 1\text{, so dass es für jeden Knoten } \vec{u} \text{ auf} \\ \text{diesem Pfad (außer evtl. } \vec{y}\text{) } \textit{genau einen} \text{ Knoten } \vec{v} \\ \text{mit } (\vec{u},\vec{v}) \in E_R \text{ gibt} \end{array} \right\}.$$

2.58 Definition (Deterministische Transitive Hüllen-Logik DTC). Sei σ eine Signatur. Die Formelmenge DTC$[\sigma]$ ist induktiv durch die Regeln (A1),(A2),(BC) und (Q1) der Logik erster Stufe, sowie die folgende Regel (DTC) definiert:

(DTC) Ist $\varphi(\vec{x},\vec{y})$ eine DTC$[\sigma]$-Formel, wobei

- $\vec{x}$ und $\vec{y}$ zwei k-Tupel aus paarweise verschiedenen Variablen erster Stufe sind, für ein $k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$,
- φ außer $\vec{x}$ und $\vec{y}$ evtl. noch andere freie Variablen erster Stufe hat,

und sind $\vec{s}$ und $\vec{t}$ zwei k-Tupel aus Variablen erster Stufe und/oder Konstantensymbolen aus σ, so ist

$$[\mathbf{dtc}_{\vec{x},\vec{y}}\,\varphi](\vec{s},\vec{t})$$

eine DTC$[\sigma]$-Formel.

2.59 Definition (Semantik von DTC$[\sigma]$-Formeln). Die Semantik von DTC$[\sigma]$-Formeln der Form $\psi := [\mathbf{dtc}_{\vec{x},\vec{y}}\,\varphi](\vec{s},\vec{t})$ ist folgendermaßen definiert:
Ist *frei*$(\psi) = \{\vec{z}\}$ und ist $\mathfrak{A}$ eine $(\sigma\dot{\cup}\{\vec{z}\})$-Struktur, so gilt:

$$\mathfrak{A} \models [\mathbf{dtc}_{\vec{x},\vec{y}}\varphi](\vec{s},\vec{t}) \quad :\Longleftrightarrow \quad \left(\vec{s}^{\,\mathfrak{A}}, \vec{t}^{\,\mathfrak{A}}\right) \in \mathbf{dtc}\left(\varphi(\mathfrak{A})\right).$$

2.60 Proposition. *Jede* DTC*-Formel ist äquivalent zu einer* TC*-Formel (kurz:* DTC $\leqslant$ TC*).*

Beweis: Per Induktion über den Formelaufbau. Der einzige interessante Fall ist der $\mathbf{dtc}$-Operator

$$\left[\,\mathbf{dtc}_{\vec{x},\vec{y}}\;\varphi(\vec{x},\vec{y})\right](\vec{s},\vec{t}).$$

Diese Formel ist äquivalent zu der TC-Formel

$$\left[\,\mathbf{tc}_{\vec{x},\vec{y}}\;\Big(\varphi(\vec{x},\vec{y}) \,\wedge\, \forall\vec{z}\big(\varphi(\vec{x},\vec{z}) \rightarrow \vec{z}=\vec{y}\big)\Big)\,\right](\vec{s},\vec{t}).$$

□

2.61 Definition (Positive Transitive Hüllen-Logiken posTC und posDTC).
Die Logiken posTC und posDTC sind definiert als die Fragmente von TC und DTC, in denen weder Implikationspfeile "→" noch Biimplikationspfeile "↔" vorkommen und die $\mathbf{tc}$- bzw. $\mathbf{dtc}$-Operatoren nur *positiv* verwendet werden, d.h. im Einflussbereich einer *geraden* Anzahl von Negationssymbolen.

2.62 Proposition. *Jede* DTC*-Formel ist äquivalent zu einer* posDTC*-Formel (kurz:* posDTC $=$ DTC*).*

Beweis: Per Induktion nach dem Formelaufbau. Der Haupschritt besteht darin, eine DTC-Formel der Form

$$\psi \quad := \quad \neg\,[\mathbf{dtc}_{\vec{x},\vec{y}}\,\varphi]\,(\vec{s},\vec{t})$$

in eine äquivalente posDTC-Formel zu übersetzen. Gemäß Induktionsannahme können wir dabei annehmen, dass sowohl φ als auch $\neg\varphi$ äquivalent zu posDTC-Formeln sind.
Ist σ die Signatur, über der ψ gebildet ist, so gilt für jede $\big(\sigma\dot{\cup}\mathit{frei}(\psi)\big)$-Struktur $\mathfrak{A}$:

$\mathfrak{A} \models \psi$

$\iff$ $\mathfrak{A} \not\models [\mathbf{dtc}_{\vec{x},\vec{y}}\,\varphi]\,(\vec{s},\vec{t})$

$\iff$ der (eindeutig bestimmte) deterministische Pfad π in $G_{\varphi,\mathfrak{A}} = (V_{\varphi,\mathfrak{A}}, E_{\varphi,\mathfrak{A}})$ mit $V_{\varphi,\mathfrak{A}} = A^k$ und $E_{\varphi,\mathfrak{A}} = \varphi(\mathfrak{A})$, der bei Knoten $\vec{s}^{\,\mathfrak{A}}$ beginnt, erreicht *nicht* den Knoten $\vec{t}^{\,\mathfrak{A}}$

$\iff$ π erreicht, ohne durch den Knoten $\vec{t}^{\,\mathfrak{A}}$ zu führen, einen Knoten $\vec{z} \in A^k$, der (1) keinen deterministischen Nachfolger in $G_{\varphi,\mathfrak{A}}$ hat oder der (2) auf einem deterministischen Kreis in $G_{\varphi,\mathfrak{A}}$ liegt, der nicht durch Knoten $\vec{t}^{\,\mathfrak{A}}$ führt

$\iff$ $\mathfrak{A} \models \psi'$,

wobei

$$\begin{aligned}
\psi' \quad := \quad \exists\vec{z}\,\Big(\; & \big(\,\vec{s}=\vec{z} \,\vee\, \big[\,\mathbf{dtc}_{\vec{x},\vec{y}}\big(\varphi(\vec{x},\vec{y}) \,\wedge\, \neg\,\vec{y}=\vec{t}\big)\big]\,(\vec{s},\vec{z})\,\big) \\
& \wedge\; \Big(\big(\forall\vec{u}\,\neg\varphi(\vec{z},\vec{u}) \;\;\vee\;\; \exists\vec{u}\,\exists\vec{v}\,(\varphi(\vec{z},\vec{u})\wedge\varphi(\vec{z},\vec{v})\wedge\neg\,\vec{u}=\vec{v})\big) && (1)\\
& \qquad \vee\, \big[\,\mathbf{dtc}_{\vec{x},\vec{y}}\,\big(\varphi(\vec{x},\vec{y}) \,\wedge\, \neg\,\vec{y}=\vec{t}\big)\big]\,(\vec{z},\vec{z})\,\Big)\Big). && (2)
\end{aligned}$$

□

2.63 Bemerkung. Es ist bekannt, dass obige Aussage *nicht* für die Logik TC gilt, d.h. es gibt eine TC-Formel ψ, zu der es keine posTC-Formel gibt, die *auf allen endlichen Strukturen* äquivalent zu ψ ist. (Das werden wir in dieser Vorlesung allerdings nicht beweisen.)
Es gilt aber die folgende schwächere Äquivalenz: Auf endlichen *geordneten* Strukturen ist TC äquivalent zu posTC (kurz: posTC $=$ TC auf FinOrd). Dies werden wir später auch noch beweisen (Satz 2.66).

2.3.3 TC-Logiken und Komplexitätsklassen

2.64 Theorem (Immerman, 1986).

(a) posDTC *beschreibt* LOGSPACE *auf* FinOrd.

(b) posTC *beschreibt* NLOGSPACE *auf* FinOrd.

Beweis: Sei σ eine Signatur, die u.a. ein 2-stelliges Relationssymbol $<$ enthält und die o.B.d.A. auch zwei Konstantensymbole 0 und *max* enthält, die in geordneten σ-Strukturen stets mit dem kleinsten bzw. dem größten Element der linearen Ordnung $<$ interpretiert werden.

"$\subseteq$:" Zunächst zeigen wir, dass die Datenkomplexität von posDTC in LOGSPACE liegt. Jede posDTC-Formel kann man leicht in eine äquivalente posDTC-Formel umformen, bei der kein $\mathbf{dtc}$-Operator im Einflussbereich eines Negationszeichens vorkommt. Per Induktion über den Aufbau von solchen posDTC$[\sigma]$-Formeln zeigen wir, dass jede solche Formel durch eine deterministische Logspace-beschränkte Turing-Maschine ausgewertet werden kann. Die Fälle für die Quantoren und Verknüfungen der Logik erster Stufe werden wie im Algorithmus EVAL aus dem Beweis von Lemma 1.56 behandelt. Für den $\mathbf{dtc}$-Operator, d.h. für eine Formel der Form

$$\psi \;:=\; [\mathbf{dtc}_{\vec{x},\vec{y}}\,\varphi](\vec{s},\vec{t})$$

wird bei Eingabe einer Struktur $\mathfrak{A}$ der in Knoten $\vec{s}^{\,\mathfrak{A}}$ startende deterministische Pfad berechnet. Dazu geht man nach folgendem Algorithmus vor:

1. $\vec{v} := \vec{s}^{\,\mathfrak{A}}$
2. FOR $i := 0$ TO $|A|^k$ DO
3. $\vec{w} :=$ NIL
4.   FOR ALL $\vec{u} \in A^k$ DO
5.   IF $\mathfrak{A} \models \varphi[\vec{v},\vec{u}]$ THEN
6.   IF $\vec{w} =$ NIL THEN $\vec{w} := \vec{u}$ ELSE STOP WITH OUTPUT "nein" ENDIF ENDIF
7.   ENDFOR
8.   IF $\vec{w} =$ NIL THEN STOP WITH OUTPUT "nein" ELSE $\vec{v} := \vec{w}$ ENDIF
9.   IF $\vec{v} = \vec{t}^{\,\mathfrak{A}}$ THEN STOP WITH OUTPUT "ja" ENDIF
10. ENDFOR
11. STOP WITH OUTPUT "nein"

Man sieht leicht, dass dieser Algorithmus genau dann "ja" ausgibt, wenn der Knoten $\vec{t}^{\,\mathfrak{A}}$ auf dem in $\vec{s}^{\,\mathfrak{A}}$ startenden durch φ definierten deterministischen Pfad liegt, d.h., wenn $\mathfrak{A} \models [\mathbf{dtc}_{\vec{x},\vec{y}}\,\varphi](\vec{s},\vec{t})$.
Gemäß Induktionsannahme wird für Zeile 5 nur Platz $\mathcal{O}(\log |A|)$ benötigt. Abgesehen davon muss der Algorithmus zu jedem Zeitpunkt nur die drei Knoten $\vec{v}$, $\vec{w}$ und $\vec{u}$ speichern, und dazu reicht Platz $\mathcal{O}(\log |A|)$.