- $Q = \{0, 1, .., s_Q\}$ für ein $s_Q \in \mathbb{N}$, Endzustand $q_{\text{akz}} = 0$, Anfangszustand $q_0 = 1$.
- $\Gamma = \{0, 1, 2, .., s_\Gamma\}$ für ein $s_\Gamma \in \mathbb{N}$, Blank-Symbol $\Box = 2$.
- $s := \max\{s_Q, s_\Gamma\}$.

Da M *deterministisch* ist, können wir die Überführungsrelation Δ als Abbildung

$$\delta \; : \; (Q \setminus F) \times \Gamma \; \to \; Q \times \Gamma \times \{-1, 0, 1\}$$

darstellen.

Unser Ziel ist, einen LFP$[\sigma]$-Satz ψ zu finden, so dass $\mathsf{C} = \mathrm{Mod}_{\mathsf{FinOrd}}(\psi)$, d.h. für jede endliche geordnete σ-Struktur $\mathfrak{A}$ gilt:

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{A} \models \psi & \iff & \mathfrak{A} \in \mathsf{C} \\ & \iff & M \text{ akzeptiert } \mathfrak{A} \\ & \iff & \text{der Lauf von } M \text{ bei Eingabe } enc(\mathfrak{A}) \text{, endet nach } n^k{-}1 \\ & & \text{Schritten in Zustand } q_{\text{akz}}. \end{array}$$

Idee zur Konstruktion von ψ: Ähnlich wie im Beweis des Satzes von Fagin werden Zeitpunkte t und Bandpositionen p in $\{0, 1, .., n^k{-}1\}$ durch k-Tupel $\vec{t} = (t_1, .., t_k)$ bzw. $\vec{p} = (p_1, .., p_k)$ über $\{0, .., n{-}1\}$ kodiert. Unter Verwendung der linearen Ordnung $<^{\mathfrak{A}}$ kann man das Universum A mit der Menge $\{0, .., n{-}1\}$ identifizieren und k-Tupel $\vec{a} \in A^k$ mit Zahlen aus $\{0, 1, .., n^k{-}1\}$.
Jeden Zustand $q \in Q = \{0, 1, .., s_Q\}$ und jedes Symbol $\gamma \in \Gamma \in \{0, 1, .., s_\Gamma\}$ werden wir in einer Struktur $\mathfrak{A}$ durch das q-größte bzw. das γ-größte Element im Universum A repräsentieren.[4]
Um die Notation etwas übersichtlicher zu machen, nehmen wir o.B.d.A. an, dass σ zwei Konstantensymbole 0 und $\max$ enthält, die in geordneten σ-Strukturen stets mit dem kleinsten bzw. dem größten Element der linearen Ordnung interpretiert werden.

Der Lauf der DTM M bei Eingabe $enc(\mathfrak{A})$ wird durch folgende $(2k+2)$-stellige Relation $R^{\mathfrak{A}} \subseteq A^{2k+2}$ repräsentiert:

- $(0, \vec{t}, \vec{p}, 0) \in R^{\mathfrak{A}} \iff$ der Schreib-/Lesekopf steht zum Zeitpunkt $\vec{t}$ auf Bandposition $\vec{p}$.
- $(1, \vec{t}, \vec{p}, \gamma) \in R^{\mathfrak{A}} \iff$ auf Bandposition $\vec{p}$ steht zum Zeitpunkt $\vec{t}$ das Symbol γ.
- $(\mathit{max}, \vec{t}, \vec{\mathit{max}}, q) \in R^{\mathfrak{A}} \iff M$ ist zum Zeitpunkt $\vec{t}$ in Zustand q.

[4] Der LFP-Satz ψ, den wir im Folgenden konstruieren, wird daher nur für solche Strukturen $\mathfrak{A}$ korrekt sein, die mehr als $s = \max\{s_Q, s_\Gamma\}$ Elemente besitzen. Das ist aber nicht weiter schlimm, denn es gibt nur *endlich* viele verschiedene σ-Strukturen mit $\leqslant s$ Elementen, und diese kann man explizit durch eine weitere FO-Formel abhandeln.

Wir konstruieren im Folgenden eine FO[σ]-Formel $\varphi(R, u, \vec{t}, \vec{p}, z)$, die schrittweise die Relation $R^{\mathfrak{A}}$ so aufbaut, dass $R^{\mathfrak{A}}$ durch "[$\mathbf{lfp}_{R,u,\vec{t},\vec{p},z}\,\varphi$]" beschrieben wird. Die einzelnen Induktionsstufen entsprechen dabei den Zeitpunkten während der Berechnung von M, d.h.:

$$
\begin{aligned}
R^0 &= \varnothing, \\
R^1 &= \text{“Startkonfiguration bei Eingabe } \mathit{enc}(\mathfrak{A})\text{”} \\
&= \{(u, \vec{t}, \vec{p}, z) \in R^{\mathfrak{A}} \mid \mathit{rg}_{<^{\mathfrak{A}}_{\mathit{lex}}}(\vec{t}) = 0\}, \\
&\;\vdots \\
R^{i+1} &= \{(u, \vec{t}, \vec{p}, z) \in R^{\mathfrak{A}} \mid \mathit{rg}_{<^{\mathfrak{A}}_{\mathit{lex}}}(\vec{t}) \leqslant i\}.
\end{aligned}
$$

Wenn φ so konstruiert ist, dann gilt (beachte dazu, dass $q_{\text{akz}} = 0$):

$$
M \text{ akzeptiert } \mathfrak{A} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathfrak{A} \models [\mathbf{lfp}_{R,u,\vec{t},\vec{p},z}\,\varphi](\mathit{max}, \vec{\mathit{max}}, \vec{\mathit{max}}, 0).
$$

Die Formel φ ist von der Form

$$
\begin{aligned}
&\varphi(R, u, \vec{t}, \vec{p}, z) := \\
&\exists z_0 \cdots \exists z_s \, \Big(\varphi_{\mathit{Zahlen}}(z_0, .., z_s) \;\wedge\; \Big(\big(\text{“}\vec{t} = \vec{0}\text{”} \;\wedge\; \varphi_{\mathit{Start}}(u, \vec{p}, z)\big) \;\vee\; \varphi_{\mathit{Schritt}}(R, u, \vec{t}, \vec{p}, z)\Big)\Big),
\end{aligned}
$$

wobei $\varphi_{\mathit{Zahlen}}(z_0, .., z_s)$ eine FO[$<$]-Formel ist, die besagt, dass die Variablen $z_0, .., z_s$ mit den $s{+}1$ kleinsten Elementen aus dem Universum der jeweiligen Struktur belegt werden.

Um die Startkonfiguration von M bei Eingabe $\mathit{enc}(\mathfrak{A})$ durch die Formel φ_{Start} zu beschreiben, benutzen wir die Formeln $\zeta_0(\vec{p})$ und $\zeta_1(\vec{p})$ aus dem Beweis des Satzes von Fagin (Theorem 2.8), die besagen, dass in dem 0-1-Wort $\mathit{enc}(\mathfrak{A})$ an Position $\mathit{rg}^{\mathfrak{A}}_{<_{\mathit{lex}}}(\vec{p})$ das Symbol 0 bzw. das Symbol 1 steht. Wir wählen

$$
\begin{aligned}
&\varphi_{\mathit{Start}}(u, \vec{p}, z) := \\
&\quad\big(\; u = 0 \;\wedge\; \text{“}\vec{p} = \vec{0}\text{”} \;\wedge\; z = 0\big) && \text{(Kopf auf Position 0)} \\
&\vee \big(u = \mathit{max} \;\wedge\; \text{“}\vec{p} = \vec{\mathit{max}}\text{”} \;\wedge\; z = z_1\big) && \text{(M ist im Startzustand $q_0 = 1$)} \\
&\vee \Big(\; u = z_1 \;\wedge\; \Big(\big(z = 0 \;\wedge \zeta_0(\vec{p})\big) \vee && \text{(Bandbeschriftung: $\mathit{enc}(\mathfrak{A})$)} \\
&\qquad\qquad\qquad \big(z = z_1 \wedge \zeta_1(\vec{p})\big) \vee \\
&\qquad\qquad\qquad \big(z = z_2 \;\wedge \neg(\zeta_0(\vec{p}) \vee \zeta_1(\vec{p}))\big)\Big)\Big) && \text{(Beachte: Blank-Symbol $\Box = 2$)}
\end{aligned}
$$

Für die Formel $\varphi_{\mathit{Schritt}}$ sei $\chi_m(\vec{p}\,', \vec{p})$ für $m \in \{-1, 0, 1\}$ eine Formel, die besagt "$\vec{p} = \vec{p}\,'{+}m$", d.h.:

$$
\chi_1(\vec{p}\,', \vec{p}) := \mathit{succ}_{<_{\mathit{lex}}}(\vec{p}\,', \vec{p}), \quad \chi_{-1}(\vec{p}\,', \vec{p}) := \mathit{succ}_{<_{\mathit{lex}}}(\vec{p}, \vec{p}\,'), \quad \chi_0(\vec{p}\,', \vec{p}) := \text{“}\vec{p}\,' = \vec{p}\text{”}.
$$

Wir wählen

$$
\begin{array}{ll}
\varphi_{\textit{Schritt}}(R,u,\vec{t},\vec{p},z) \ := & \\
\exists \vec{t}\,' \,\exists \vec{p}\,' \Big(\textit{succ}_{<_{\textit{lex}}}(\vec{t}\,',\vec{t}) \ \wedge \ R(0,\vec{t}\,',\vec{p}\,',0) \ \wedge & \text{(Kopfpos. } \vec{p}\,' \text{ zum Zeitpkt. } \vec{t}\,' := \vec{t}-1) \\
\quad \bigvee\limits_{\substack{q'\in Q,\gamma'\in\Gamma,\\ (q,\gamma,m):=\delta(q',\gamma')}} \Big(R(max,\vec{t}\,',m\vec{a}x,z_{q'}) \ \wedge \ R(z_1,\vec{t}\,',\vec{p}\,',z_{\gamma'}) \ \wedge & \text{(zum Zeitpkt. } \vec{t}\,'\text{: in Zustand } q'\text{, liest Symbol } \gamma') \\
\qquad \Big(\ \big(u = max \ \wedge \ \vec{p} = m\vec{a}x \ \wedge \ z = z_q\big) & \text{(zum Zeitpkt. } \vec{t} \text{ in Zustand } q) \\
\qquad \vee \ \big(u = 0 \ \wedge \ \chi_m(\vec{p}\,',\vec{p}) \ \wedge \ z = 0\big) & \text{(zum Zeitpkt. } \vec{t} \text{ Kopfpos. } \vec{p}\,'{+}m) \\
\qquad \vee \ \big(u = z_1 \ \wedge \ \text{“}\vec{p}\,' = \vec{p}\text{”} \ \wedge \ z = z_\gamma\big) & \text{(zum Zeitpkt. } \vec{t} \text{ Symbol } \gamma \text{ auf Pos. } \vec{p}\,') \\
\qquad \vee \ \big(u = z_1 \ \wedge \ \text{“}\vec{p}\,' \neq \vec{p}\text{”} \ \wedge \ R(z_1,\vec{t}\,',\vec{p},z)\big) \Big) \Big) \Big) & \text{(auf Pos. } \vec{p} \neq \vec{p}\,' \text{ zum Zeitpkt. } \vec{t} \text{ gleiches Symbol wie zum Zeitpkt. } \vec{t}\,')
\end{array}
$$

Man beachte, dass diese Formel *positiv* in R ist. Daher ist die Formel

$$\psi \ := \ [\mathbf{lfp}_{R,u,\vec{t},\vec{p},z}\,\varphi](max, m\vec{a}x, m\vec{a}x, 0)$$

eine LFP[σ]-Formel.
Per Induktion nach i kann man leicht für alle endlichen geordneten σ-Strukturen $\mathfrak{A}$ und alle $i \in \mathbb{N}$ zeigen, dass die $(i{+}1)$-te Induktionsstufe R^{i+1} des Operators $F_{\varphi,\mathfrak{A}}$ aus genau den Tupeln $(u,\vec{t},\vec{p},z) \in A^{2k+2}$ besteht, für die gilt: $j := rg_{<^{\mathfrak{A}}_{lex}}(\vec{t}) \leqslant i$ und

$$\{(u',\vec{t}\,',\vec{p}\,',z') \in R^{i+1} \ | \ \vec{t}\,' = \vec{t}\}$$

kodiert die Konfiguration von M bei Eingabe *enc*($\mathfrak{A}$) zum Zeitpunkt j.
Daraus folgt dann direkt:

$$M \text{ akzeptiert } enc(\mathfrak{A}) \iff (max^{\mathfrak{A}}, m\vec{a}x^{\mathfrak{A}}, m\vec{a}x^{\mathfrak{A}}, 0^{\mathfrak{A}}) \in R^{n^k} \iff \mathfrak{A} \models \psi.$$

Somit sind wir fertig mit dem Beweis von Theorem 2.46 □

Auf ähnliche Art kann man auch folgendes beweisen:

2.47 Theorem. PFP *beschreibt* PSPACE *auf* FinOrd.

Beweis: Ähnlich zum Beweis von Theorem 2.46. Beachte: Eine PSPACE-Berechnung kann evtl. aus exponentiell vielen Schritten bestehen. Daher kann nicht mehr jeder Berechnungszeitpunkt t durch ein k-Tupel $\vec{t} = (t_1,\ldots,t_k) \in A^k$ kodiert werden. Insgesamt konstruiert man für jedes Problem $\mathsf{C} \subseteq \mathsf{FinOrd}$ in PSPACE eine FO[σ]-Formel $\varphi(R,u,\vec{p},z)$, so dass für alle endlichen geordneten σ-Strukturen $\mathfrak{A}$ gilt:

$$\mathfrak{A} \in \mathsf{C} \iff \mathfrak{A} \ \models \ [\mathbf{pfp}_{R,u,\vec{p},z}\,\varphi](max, m\vec{a}x, 0).$$

Rest: *Übung*. □

2.48 Bemerkung. In den Theoremen 2.46 und 2.47 ist es wichtig, dass die Strukturen in FinOrd liegen, d.h. dass die Strukturen *geordnet* sind, also eine 2-stellige Relation enthalten, von der man weiß, dass sie eine lineare Ordnung des Universums der Struktur darstellt. Beim Satz von Fagin, der besagt

$$\text{ESO beschreibt NP auf } \mathsf{Fin},$$

war dies nicht nötig, da man sich in einer ESO-Formel eine lineare Ordnung "raten" bzw. definieren kann. In Kapitel 3 (Ehrenfeucht-Fraïssé Spiele) werden wir beweisen, dass dies *nicht* durch eine Fixpunktformel geleistet werden kann und dass daher gilt:

$$\text{LFP bzw. IFP beschreibt } \textit{nicht} \text{ PTIME auf } \mathsf{Fin},$$

$$\text{PFP beschreibt } \textit{nicht} \text{ PSPACE auf } \mathsf{Fin}.$$

Aus den Theoremen 2.46 und 2.47 ergibt sich direkt:

2.49 Korollar. $\text{PSPACE} = \text{PTIME} \iff \text{PFP} = \text{LFP}$ *auf* FinOrd.

Dabei heißt "PFP $=$ LFP auf FinOrd", dass es zu jedem PFP-Satz ψ einen LFP-Satz ψ' gibt, so dass für jede endliche geordnete Struktur $\mathfrak{A}$ gilt:

$$\mathfrak{A} \models \psi \iff \mathfrak{A} \models \psi'.$$

(Die Umkehrung gilt sowieso, da LFP $\leqslant$ PFP; vgl. Proposition 2.45.)

2.50 Bemerkung. Es gilt sogar die folgende Verschärfung von Korollar 2.49, die als *Satz von Abiteboul und Vianu* bekannt ist und die wir in Kapitel 4 (Fixpunktlogiken) auch beweisen werden:

$$\text{PSPACE} = \text{PTIME} \iff \text{PFP} = \text{LFP auf } \mathsf{FinOrd} \iff \text{PFP} = \text{LFP auf } \mathsf{Fin}.$$

Ähnlich wie beim Beweis des Satzes von Cook, bei dem wir die logische Charakterisierung von NP genutzt haben, um die NP-Vollständigkeit des aussagenlogischen Erfüllbarkeitsproblems nachzuweisen, können wir die logische Charakterisierung von PSPACE nutzen, um die PSPACE-Vollständigkeit des Auswertungsproblems für FO zu beweisen (dies wurde in Kapitel 1, Satz 1.58 schon erwähnt, aber noch nicht bewiesen):

2.51 Satz. *Die kombinierte Komplexität des Auswertungsproblems für* FO *auf* FinOrd *ist* PSPACE*-vollständig.*

Beweis: Mit Satz 1.57 wurde bereits gezeigt, dass die kombinierte Komplexität des Auswertungsproblems für FO in PSPACE liegt. Im Folgenden zeigen wir, dass das Problem auch PSPACE-hart ist, d.h. dass sich jedes Problem $L \in \text{PSPACE}$ auf das Auswertungsproblem für FO reduzieren lässt. Jedes Problem $L \in \text{PSPACE}$ kann man, für eine geeignete Signatur σ, mit einer Klasse $\mathsf{C} \subseteq \mathsf{FinOrd}$ (bzw. der zugehörigen Menge L_{C}) identifizieren. Da nach Voraussetzung $L_{\mathsf{C}} \in \text{PSPACE}$ ist, liefert Theorem 2.47, dass es einen PFP$[\sigma]$-Satz Φ gibt, so

dass für jede endliche geordnete Struktur $\mathfrak{A}$ gilt: $\mathfrak{A} \in \mathsf{C} \iff \mathfrak{A} \models \Phi$.
Aus dem Beweis von Theorem 2.47 folgt, dass Φ o.B.d.A. von der Form

$$[\mathbf{pfp}_{R,\vec{x}}\,\varphi](\vec{max}, 0)$$

ist, wobei $\varphi(R, \vec{x}) \in \mathrm{FO}[\sigma\dot{\cup}\{R\}]$. Sei $r := ar(R)$ die Stelligkeit von R und sei $\vec{x} = x_1, .., x_r$.

Aus Bemerkung 2.39 folgt, dass für jede endliche σ-Struktur $\mathfrak{A}$, für $n := |A|$, für $N := n^r = |A^r|$ und für die Induktionsstufen R^i des Operators $F_{\varphi,\mathfrak{A}}$ gilt:

(1) Falls $R^{2^N} = R^{2^N+1}$, so $\mathbf{pfp}(F_{\varphi,\mathfrak{A}}) = R^{2^N}$.

(2) Falls $R^{2^N} \neq R^{2^N+1}$, so $\mathbf{pfp}(F_{\varphi,\mathfrak{A}}) = \emptyset$.

Unser Ziel ist, eine Polynomialzeit-Reduktion f von $\mathsf{C} \subseteq \mathsf{FinOrd}$ auf das Auswertungsproblem für FO zu finden.

<u>*Ansatz:*</u> f bildet jedes $\mathfrak{A} \in \mathsf{FinOrd}$ (von dem man wissen will, ob es zur Klasse C gehört) auf ein Tupel $(\mathfrak{A}, \psi_{\Phi,\mathfrak{A}})$ ab, wobei $\psi_{\Phi,\mathfrak{A}}$ ein $\mathrm{FO}[\sigma]$-Satz ist, für den gilt:

(3) $\mathfrak{A} \models \psi_{\Phi,\mathfrak{A}} \iff \mathfrak{A} \in \mathsf{C} \overset{\text{def}}{\iff} \mathfrak{A} \models \Phi \overset{\text{def}}{\iff} \mathfrak{A} \models [\mathbf{pfp}_{R,\vec{x}}\,\varphi](\vec{max}, 0)$.

(4) $\psi_{\Phi,\mathfrak{A}}$ ist in Zeit, die polynomiell in $|A|$ ist, berechenbar.
Insbesondere ist die Länge $|\psi_{\Phi,\mathfrak{A}}|$ der Formel $\psi_{\Phi,\mathfrak{A}}$ polynomiell in der Größe von $\mathfrak{A}$.

<u>*Idee:*</u> Sei $\mathfrak{A}$ gegeben und sei $n := |A|$ und $N := n^r$. O.B.d.A. ist $n \geqslant 2$, insbesondere werden also die Konstantensymbole 0 und *max* durch zwei verschiedene Elemente in A interpretiert.
Seien $v_1, .., v_N$ Variablen erster Stufe und seien $\vec{x}$, $\vec{y}_1$, ..., $\vec{y}_N$ jeweils r-Tupel von Variablen erster Stufe. Für jedes $i \in \{0, .., N\}$ definieren wir induktiv eine $\mathrm{FO}[\sigma]$-Formel

$$\varphi_i\big(\,\vec{x},\, \vec{y}_1, v_1,\, \vec{y}_2, v_2,\, \ldots, \vec{y}_N, v_N\,\big),$$

so dass für alle $\vec{b}_1, .., \vec{b}_N \in A^r$ und alle $d_1, .., d_N \in \{0^{\mathfrak{A}}, max^{\mathfrak{A}}\}$ gilt:

$$(*)_i: \quad \{\, \vec{a} \in A^r \;|\; \mathfrak{A} \models \varphi_i[\vec{a}, \vec{b}_1, d_1, \ldots, \vec{b}_N, d_N]\,\} \;=\; \underbrace{F_{\varphi,\mathfrak{A}}{}^{2^i}}_{2^i\text{-fache Anwendung des Operators } F_{\varphi,\mathfrak{A}}}\Big(\{\vec{b}_j \;|\; 1 \leqslant j \leqslant N,\; d_j \neq 0^{\mathfrak{A}}\}\Big)$$

Bevor wir die genaue Konstruktion der Formeln φ_i (für $i \in \{0, .., N\}$) angeben, zeigen wir zunächst, wie wir die gewünschte Formel $\psi_{\Phi,\mathfrak{A}}$ aus φ_N erhalten. Es gilt:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} \models \Phi &\iff \mathfrak{A} \models [\mathbf{pfp}_{R,\vec{x}}\,\varphi](\vec{max}, 0) \\ &\iff (\vec{max}, 0) \in R^{2^N} \quad \text{und} \quad R^{2^N} = R^{2^N+1} \\ &\iff \mathfrak{A} \models \psi_{\Phi,\mathfrak{A}}, \end{aligned}$$

wobei

$\psi_{\Phi,\mathfrak{A}}$:=

$$
\begin{aligned}
&\exists\vec{y}_1\,\exists v_1\,\cdots\,\exists\vec{y}_N\,\exists v_N\;\Big(\;\bigwedge_{j=1}^{N}\Big(v_j = 0\;\vee\;v_j = \mathit{max}\Big) && \text{(Zeile 1)}\\
&\qquad\wedge\;\forall\vec{x}\;\Big(\varphi_N(\vec{x},\vec{y}_1,0,\ldots,\vec{y}_N,0)\;\leftrightarrow\;\bigvee_{j=1}^{N}(v_j\neq 0\;\wedge\;\vec{x}=\vec{y}_j)\Big) && \text{(Zeile 2)}\\
&\qquad\wedge\;\Big(\bigvee_{j=1}^{N}\Big(v_j\neq 0\;\wedge\;\vec{y}_j=(\vec{max},0)\Big)\Big) && \text{(Zeile 3)}\\
&\qquad\wedge\;\forall\vec{x}\;\Big(\big(\bigvee_{j=1}^{N}v_j\neq 0\;\wedge\;\vec{x}=\vec{y}_j\big)\;\leftrightarrow\;\varphi\big(\vec{x},\frac{R(\vec{u})}{\bigvee_{j=1}^{N}(v_j\neq 0\wedge\vec{u}=\vec{y}_j)}\big)\Big)\Big) && \text{(Zeile 4)}
\end{aligned}
$$

Dabei besagt

- Zeile 2, dass $R^{2^N} \stackrel{\text{def}}{=} F_{\varphi,\mathfrak{A}}{}^{2^N}(\varnothing) = \{\vec{y}_j \mid v_j \neq 0\}$,
- Zeile 3, dass $(\vec{max},0) \in R^{2^N}$,
- Zeile 4, dass $R^{2^N} = R^{2^N+1} \stackrel{\text{def}}{=} F_{\varphi,\mathfrak{A}}(R^{2^N})$.

  Hierbei bezeichnet $\varphi\big(\vec{x},\frac{R(\vec{u})}{\bigvee_{j=1}^{N}(v_j\neq 0\wedge\vec{u}=\vec{y}_j)}\big)$ die Formel, die aus $\varphi(R,\vec{x})$ entsteht, indem jedes Vorkommen eines Atoms der Form $R(\vec{u})$ durch die Formel $\bigvee_{j=1}^{N}(v_j\neq 0\wedge\vec{u}=\vec{y}_j)$ ersetzt wird.

Klar ist: Wenn die Formel φ_N die Eigenschaft $(*)_N$ hat und in Zeit poly(n) konstruierbar ist, so ist auch $\psi_{\Phi,\mathfrak{A}}$ in Zeit poly(n) konstruierbar und es gilt:

$$\mathfrak{A}\models\Phi \iff \mathfrak{A}\models[\mathbf{pfp}_{R,\vec{x}}\,\varphi](\vec{max},0) \iff \mathfrak{A}\models\psi_{\Phi,\mathfrak{A}}.$$

Somit ist die Abbildung, die jeder σ-Struktur $\mathfrak{A}\in$ FinOrd das Tupel $(\mathfrak{A},\psi_{\Phi,\mathfrak{A}})$ zuordnet, eine Polynomialzeit-Reduktion von C auf das Auswertungsproblem für FO auf FinOrd.

Um den Beweis von Satz 2.51 zu beenden, müssen wir also nur noch die gewünschten Formel φ_N konstruieren. Dazu konstruieren wir induktiv für $i\in\{0,\ldots,N\}$ Formeln φ_i mit Eigenschaft $(*)_i$, so dass

$$|\varphi_{i+1}| \leqslant n^{\text{Konstante}} + |\varphi_i|.$$

Insgesamt ist dann

$$|\varphi_N| = N\cdot n^{\text{Konstante}} = n^r\cdot n^{\text{Konstante}} = \text{poly}(n).$$

<u>*Induktionsanfang $i=0$:*</u> $2^i = 2^0 = 1$. Wir setzen

$$\varphi_0(\vec{x},\vec{y}_1,v_1,\ldots,\vec{y}_N,v_N) := \varphi\Big(\vec{x},\frac{R(\vec{u})}{\bigvee_{j=1}^{N}(v_j\neq 0\;\wedge\;\vec{u}=\vec{y}_j)}\Big).$$

Offensichtlich hat φ_0 die Eigenschaft $(*)_0$, und es gilt $|\varphi_0| = \mathcal{O}(|\varphi|\cdot r\cdot N) = \text{poly}(n)$.