2.20 Satz. *Sei A eine endliche Menge.*
Für jede monotone Abbildung $F : \mathrm{Pot}(A) \to \mathrm{Pot}(A)$ gilt:

$$\mathbf{lfp}(F) \;=\; R^{\infty}.$$

D.h.: Der induktive Fixpunkt einer monotonen Abbildung ist gerade der kleinste Fixpunkt.

Beweis: "$\subseteq$": Gemäß der Definition des inflationären Fixpunkts gilt $R^{\infty} = F(R^{\infty})$, R^{∞} ist also ein Fixpunkt von F. Insbesondere gilt

$$\mathbf{lfp}(F) \subseteq R^{\infty},$$

da der kleinste Fixpunkt gemäß Definition in jedem anderen Fixpunkt enthalten ist.

"$\supseteq$": Per Induktion zeigen wir, dass $R^i \subseteq \mathbf{lfp}(F)$ für alle $i \in \mathbb{N}$.
$i = 0$: Klar, da $R^0 = \varnothing \subseteq \mathbf{lfp}(F)$.
$i \to i{+}1$: Per Induktion gilt $R^i \subseteq \mathbf{lfp}(F)$. Da F monoton ist, folgt, dass

$$R^{i+1} \stackrel{\text{def}}{=} F(R^i) \;\subseteq\; F(\mathbf{lfp}(F)) \;=\; \mathbf{lfp}(F).$$

$\square$

Den kleinsten Fixpunkt einer monotonen Funktion kann man leicht berechnen, indem man nach und nach die einzelnen Induktionsstufen berechnet und abbricht, sobald diese stationär werden:

2.21 Proposition. *Ist $F : \mathrm{Pot}(A) \to \mathrm{Pot}(A)$ monoton und in polynomieller Zeit berechenbar, so kann $\mathbf{lfp}(F)$ in polynomieller Zeit berechnet werden.*

Beweis: Es gibt höchstens $|A|$ Induktionsstufen, und jede davon kann in polynomieller Zeit aus der vorangegangenen berechnet werden. $\square$

2.2.2 Die kleinste Fixpunktlogik

2.22 Definition (Operator $F_{\varphi,\mathfrak{A}}$).
Sei σ eine Signatur, $k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$, R eine k-stellige Relationsvariable und $\vec{x} = x_1, .., x_k$ ein Tupel aus k verschiedenen Variablen erster Stufe.
Jede FO$[\sigma \dot\cup \{R\}]$-Formel $\varphi(R, \vec{x})$ definert in jeder σ-Struktur $\mathfrak{A}$ eine Abbildung $F_{\varphi,\mathfrak{A}}$ wie folgt:

$$\begin{array}{rlcl} F_{\varphi,\mathfrak{A}} : & \mathrm{Pot}(A^k) & \to & \mathrm{Pot}(A^k) \\ & P & \mapsto & \{\vec{a} \in A^k \mid \mathfrak{A} \models \varphi[P, \vec{a}]\}. \end{array}$$

Zum Beispiel kann man sich φ als Datenbankanfrage vorstellen und $F_{\varphi,\mathfrak{A}}$ als die Abbildung, die jeder Datenbank-Relation P das Ergebnis der Anfrage zuordnet.

Die im Folgenden definierte *monotone Fixpunktlogik* ist eine Erweiterung der Logik erster

Stufe durch einen Operator, mit dem man aus einer Formel $\varphi(R,\vec{x})$ eine neue Formel erhalten kann, die $[\mathbf{lfp}_{R,\vec{x}}\,\varphi](\vec{t})$ genannt wird, und die in jeder Struktur $\mathfrak{A}$ genau von den Tupeln $\vec{t} \in A^k$ erfüllt wird, die zu dem kleinsten Fixpunkt der Operation $F_{\varphi,\mathfrak{A}}$ gehören. Dafür sollte man natürlich wissen, ob der kleinste Fixpunkt auch wirklich existiert. Gemäß dem Satz von Knaster und Tarski (Satz 2.15) existiert der kleinste Fixpunkt von $F_{\varphi,\mathfrak{A}}$ auf jeden Fall dann, wenn $F_{\varphi,\mathfrak{A}}$ *monoton* ist.

2.23 Definition (Monotone Fixpunktlogik MFP). Sei σ eine Signatur.
Die Formelmenge MFP$[\sigma]$ ist induktiv durch die Regeln (A1),(A2),(A3),(BC) und (Q1) der Logik erster Stufe, sowie die folgende Regel (MFP) definiert:

(MFP) Ist $\varphi(R,\vec{x})$ eine MFP$[\sigma]$-Formel, wobei

- R eine k-stellige Relationsvariable, für ein $k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$,
- $\vec{x} = x_1,\ldots,x_k$ ein Tupel aus k verschiedenen Variablen erster Stufe, und
- φ außer R und $\vec{x}$ evtl. noch andere freie Variablen hat (etwa $\vec{u},\vec{S}$),

ist $\vec{t} = t_1,\ldots,t_k$ ein k-Tupel aus Variablen erster Stufe und/oder Konstantensymbolen aus σ, und ist $\boldsymbol{F_{\varphi,\mathfrak{A}}}$ ***monoton auf jeder endlichen*** $(\sigma\dot{\cup}\{\vec{u},\vec{S}\})$***-Struktur*** $\mathfrak{A}$, so ist

$$[\mathbf{lfp}_{R,\vec{x}}\,\varphi](\vec{t})$$

eine MFP$[\sigma]$-Formel.

2.24 Bemerkungen.

(a) Die Menge der *freien Variablen* einer MFP$[\sigma]$-Formel ist induktiv definiert wie für FO bzw. SO, mit der zusätzlichen Regel

$$\mathit{frei}\big([\mathbf{lfp}_{R,\vec{x}}\,\varphi](\vec{t})\big) \;:=\; \big(\mathit{frei}(\varphi) \setminus \{R,\vec{x}\}\big) \cup \{t_i \mid t_i \in \mathrm{Var}_1\}.$$

(b) Gilt $\mathit{frei}(\varphi) = \{R,\vec{x},\vec{u},\vec{S}\}$, für ein Tupel $\vec{u}$ von Variablen erster Stufe und ein Tupel $\vec{S}$ von Relationsvariablen, so nennen wir die Variablen in $\vec{u}$ die *Parameter* der Formel $[\mathbf{lfp}_{R,\vec{x}}(\varphi)](\vec{t})$.

2.25 Definition (Semantik von MFP$[\sigma]$-Formeln). Die Semantik von MFP$[\sigma]$-Formeln der Form $\psi := [\mathbf{lfp}_{R,\vec{x}}\,\varphi](\vec{t})$ ist folgendermaßen definiert:
Ist $\mathit{frei}(\psi) = \{\vec{u},\vec{S}\}$ und ist $\mathfrak{A}$ eine endliche $(\sigma\dot{\cup}\{\vec{u},\vec{S}\})$-Struktur, so gilt:

$$\mathfrak{A} \models [\mathbf{lfp}_{R,\vec{x}}\,\varphi](\vec{t}) \quad :\Longleftrightarrow \quad \vec{t}^{\,\mathfrak{A}} \in \mathbf{lfp}(F_{\varphi,\mathfrak{A}}).$$

Aus der Übung ist bekannt, dass Monotonie von FO-Formeln auf endlichen Strukturen unentscheidbar ist. Es gibt also keinen Algorithmus, der bei Eingabe einer Formel $\varphi(R,\vec{x})$ entscheidet, ob $F_{\varphi,\mathfrak{A}}$ für alle endlichen Strukturen $\mathfrak{A}$ monoton ist.

Daher ist die Syntax von MFP unentscheidbar, d.h. es gibt keinen Algorithmus, der bei Eingabe einer Formel ψ entscheidet, ob diese zu MFP gehört.

Wünschenswert wäre, eine Fixpunktlogik zu defineren, bei der man schon an der Syntax einer Formel erkennt, ob diese zur Logik gehört oder nicht. Ein rein *syntaktisches* Kriterium, das hinreichend für Monotonie ist, wird durch die folgende Definition gegeben:

2.26 Definition. Eine Formel $\varphi(R, \vec{x})$ heißt *positiv in* R (bzw. *negativ in* R), falls Atome der Form $R(\vec{y})$ in φ stets im Bereich einer *geraden* (bzw. *ungeraden*) Anzahl von Negationssymbolen vorkommen und in φ kein Implikationspfeil "$\rightarrow$" und kein Biimplikationspfeil "$\leftrightarrow$" vorkommt.

Man sieht leicht:

2.27 Proposition. *Für jede Formel $\varphi(R, \vec{x})$, die positiv in R ist, gilt:*
$F_{\varphi,\mathfrak{A}}$ ist monoton *für alle Strukturen $\mathfrak{A}$.*

Beweisidee: Per Induktion nach dem Formelaufbau zeigt man, dass für jede Formel

$$\varphi(\vec{x}, R_1, \ldots, R_k, S_1, \ldots, S_\ell),$$

die *positiv* in $R_1, \ldots, R_k$ und *negativ* in $S_1, \ldots, S_\ell$ ist, folgendes für alle Strukturen $\mathfrak{A}$, alle Tupel $\vec{a}$ und alle Relationen $R_1^{\mathfrak{A}} \subseteq R_1'^{\mathfrak{A}}, \ldots, R_k^{\mathfrak{A}} \subseteq R_k'^{\mathfrak{A}}$ und $S_1^{\mathfrak{A}} \supseteq S_1'^{\mathfrak{A}}, \ldots, S_\ell^{\mathfrak{A}} \supseteq S_\ell'^{\mathfrak{A}}$ über dem Universum von A gilt: Falls $\mathfrak{A} \models \varphi[\vec{a}, \vec{R}^{\mathfrak{A}}, \vec{S}^{\mathfrak{A}}]$, so auch $\mathfrak{A} \models \varphi[\vec{a}, \vec{R}'^{\mathfrak{A}}, \vec{S}'^{\mathfrak{A}}]$.
Details: *Übung.* $\square$

Die *kleinste Fixpunktlogik* ist analog zur monotonen Fixpunktlogik definiert, mit dem Unterschied, dass man jetzt an Stelle der Monotonie fordert, dass Formeln $\varphi(R, \vec{x})$, auf die der Fixpunktoperator $\mathbf{lfp}(\cdot)$ angewandt werden soll, *positiv* in R sind.

2.28 Definition (Kleinste Fixpunktlogik LFP). Sei σ eine Signatur.
Die Formelmenge LFP$[\sigma]$ ist induktiv durch die Regeln (A1),(A2),(A3),(BC) und (Q1) der Logik erster Stufe, sowie die folgende Regel (LFP) definiert:

(LFP) Ist $\varphi(R, \vec{x})$ eine LFP$[\sigma]$-Formel, wobei

- R eine k-stellige Relationsvariable, für ein $k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$,
- $\vec{x} = x_1, \ldots, x_k$ ein Tupel aus k verschiedenen Variablen erster Stufe, und
- φ außer R und $\vec{x}$ evtl. noch andere freie Variablen hat,

ist $\vec{t} = t_1, \ldots, t_k$ ein k-Tupel aus Variablen erster Stufe und/oder Konstantensymbolen aus σ, und ist $\boldsymbol{\varphi}$ ***positiv in*** $\boldsymbol{R}$, so ist

$$[\mathbf{lfp}_{R,\vec{x}}\, \varphi](\vec{t})$$

eine LFP$[\sigma]$-Formel.

Die *Semantik* der LFP-Formeln ist genauso definiert wie die Semantik von MFP.

2.29 Beispiele. (a) *Erreichbarkeit:*

Sei $G = (V, E, s, t)$ ein Graph mit zwei ausgezeichneten Knoten s, t. Dann gilt

$$G \models \big[\mathbf{lfp}_{R,x}\,\big(x = a \;\vee\; \exists z\,(R(z) \wedge E(z,x))\big)\big](t)$$

genau dann, wenn es in G einen Pfad von s nach t gibt.

Dies sieht man, indem man die einzelnen Stufen $R^0, R^1, R^2, \ldots$ des Operators $F_{\varphi,G}$ ausrechnet. Per Induktion nach i erhält man so für obige Beispielformel:

$$R^i \;=\; \{v \in V \mid \text{es gibt in } G \text{ einen Pfad der Länge} < i \text{ von } s \text{ nach } v\}.$$

Daher gilt für $\mathbf{lfp}(F_{\varphi,G}) = R^\infty$:

$$R^\infty \;=\; \{v \in V \mid \text{es gibt in } G \text{ einen Pfad von } s \text{ nach } v\}.$$

(b) *Graphzusammenhang:*

Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Dann gilt

$$G \models \forall x\, \forall y\, \big[\mathbf{lfp}_{R,x,y}\, x = y \;\vee\; \exists z\, \big(R(x,z) \wedge E(z,y)\big)\big](x,y)$$

genau dann, wenn G zusammenhängend ist.
Für die einzelnen Stufen gilt hier in jedem Graphen G:

$$R^i \;=\; \{(u,v) \in V^2 \mid \text{es gibt in } G \text{ einen Pfad der Länge} < i \text{ von } u \text{ nach } v\}.$$

(c) *Eine definierbare Wortsprache:*

Sei $\sigma = \{<, P_a, P_b\}$ die Signatur, um Wörter $w \in \{a,b\}^*$ als σ-Strukturen $\mathfrak{A}_w$ zu kodieren (siehe Übungsblatt 1).
Wir definieren nun eine Formel $\varphi(R,x)$, die positiv in R ist, so dass für alle nicht-leeren Worte $w = w_0 \cdots w_{n-1} \in \{a,b\}^*$ gilt:

$\mathfrak{A}_w \models [\mathbf{lfp}_{R,x}\,\varphi](i) \iff$ an Position i steht in w der Buchstabe a und auf den Positionen $0,\ldots,i$ steht eine *ungerade* Anzahl von as.

Wenn wir φ so gewählt haben, gilt für jedes Wort w:

$$\mathfrak{A}_w \;\models\; \forall x \Big(\underbrace{\big(P_a(x) \wedge \neg\exists y\,(P_a(y) \wedge x < y)\big)}_{x \text{ ist die Position des letzten } a\text{s in } w} \rightarrow \neg[\mathbf{lfp}_{R,x}\,\varphi](x) \Big)$$

genau dann, wenn die Anzahl der as in w gerade ist.

Wahl der Formel $\varphi(R,x)$:

$$\begin{aligned}\varphi(R,x) \ :=\ & \Big(P_a(x) \land \neg\exists y\,(P_a(y) \land y < x)\Big) \lor \\ & \Big(\exists z\,\exists y\ \big(\ R(z) \land P_a(y) \land P_a(x) \land (z < y < x) \land \\ & \qquad\qquad \forall u\ \big((\neg(z < u < y \lor y < u < x)) \lor P_b(u)\big)\ \big)\Big).\end{aligned}$$

2.30 Lemma.
Die Datenkomplexität des Auswertungsproblems für LFP *auf* Fin *liegt in* PTIME.

Beweis: Per Induktion über den Formelaufbau. Der einzige interessante Fall ist der Fixpunktoperator

$$\psi \ :=\ [\mathbf{lfp}_{R,\vec{x}}\,\varphi](\vec{t}).$$

Nach Induktionsannahme kann die Formel φ für jede Induktionsstufe R^i in polynomieller Zeit ausgewertet werden. Die Behauptung folgt damit aus Proposition 2.21. □

2.2.3 Inflationäre Fixpunktlogik

Bei der Definition der *kleinsten Fixpunktlogik* wurde durch ein syntaktisches Kriterium (nämlich dadurch, dass die Formel $\varphi(R,\vec{x})$ *positiv* in R sein muss), gewährleistet, dass die Sequenz $R^0, R^1, R^2, ..$ der Induktionsstufen *induktiv* ist, d.h.

$$R^0 \subseteq R^1 \subseteq R^2 \subseteq \cdots \subseteq R^i \subseteq R^{i+1} \subseteq \cdots,$$

und daher der induktive Fixpunkt $R^\infty = R^{\mathrm{cl}(F)}$ existiert.
In diesem Abschnitt werden wir die Bedingung “$\varphi(R,\vec{x})$ positiv in R” fallenlassen und stattdessen durch explizites Vereinigen erzwingen, dass jede Induktionsstufe ihre gesamte Vorgängerstufe enthält.

2.31 Definition (Inflationärer Fixpunkt ifp(F)). Zu jeder endlichen Menge A und jeder Abbildung $F : \mathrm{Pot}(A) \to \mathrm{Pot}(A)$ ist die Abbildung I_F wie folgt definiert:

$$\begin{array}{rcl} I_F\ :\ \mathrm{Pot}(A) & \to & \mathrm{Pot}(A) \\ X & \mapsto & X \cup F(X). \end{array}$$

Offensichtlich ist I_F *inflationär* und hat daher einen induktiven Fixpunkt $R^\infty = R^{\mathrm{cl}(I_F)}$.
R^∞ heißt der *inflationäre Fixpunkt von* F, geschrieben $\mathbf{ifp}(F)$.

2.32 Bemerkung. Falls F *monoton* ist, so haben F und I_F die gleichen Induktionsstufen, und es gilt $\mathbf{ifp}(F) = \mathbf{lfp}(F)$.

2.33 Definition (Inflationäre Fixpunktlogik IFP). Sei σ eine Signatur.
Die Formelmenge IFP[σ] ist induktiv durch die Regeln (A1),(A2),(A3),(BC) und (Q1) der Logik erster Stufe, sowie die folgende Regel (IFP) definiert:

(IFP) Ist $\varphi(R, \vec{x})$ eine IFP$[\sigma]$-Formel, wobei

- R eine k-stellige Relationsvariable, für ein $k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$,
- $\vec{x} = x_1, .., x_k$ ein Tupel aus k verschiedenen Variablen erster Stufe, und
- φ außer R und $\vec{x}$ evtl. noch andere freie Variablen hat,

und ist $\vec{t} = t_1, .., t_k$ ein k-Tupel aus Variablen erster Stufe und/oder Konstantensymbolen aus σ, so ist

$$[\mathbf{ifp}_{R,\vec{x}}\, \varphi](\vec{t})$$

eine IFP$[\sigma]$-Formel.

2.34 Definition (Semantik von IFP$[\sigma]$-Formeln). Die Semantik von IFP$[\sigma]$-Formeln der Form $\psi := [\mathbf{ifp}_{R,\vec{x}}\, \varphi](\vec{t})$ ist folgendermaßen definiert:
Ist *frei*$(\psi) = \{\vec{u}, \vec{S}\}$ und ist $\mathfrak{A}$ eine endliche $(\sigma \dot\cup \{\vec{u}, \vec{S}\})$-Struktur, so gilt:

$$\mathfrak{A} \models [\mathbf{ifp}_{R,\vec{x}}\, \varphi](\vec{t}) \quad :\Longleftrightarrow \quad \vec{t}^{\,\mathfrak{A}} \in \mathbf{ifp}(F_{\varphi,\mathfrak{A}}).$$

2.35 Beispiel. Sei $\sigma = \{<, P_a, P_b\}$ die Signatur, um Wörter $w \in \{a,b\}^*$ als σ-Strukturen $\mathfrak{A}_w$ zu kodieren (siehe Übungsblatt 1).
Wir definieren eine Formel $\varphi(R,x)$, so dass für alle nicht-leeren Worte $w = w_0 \cdots w_{n-1} \in \{a,b\}^*$ gilt:

$$\mathfrak{A}_w \models \forall u\, [\mathbf{ifp}_{R,x}\, \varphi](u) \quad \Longleftrightarrow \quad w \in \{a^n b^n \mid n \geqslant 1\}.$$

Wir wählen $\varphi(R,x)$:=

$$\begin{aligned} &\Big(\text{“}P_a(0)\text{”} \wedge \text{“}P_b(\mathit{max})\text{”} \wedge \big(\text{“}x = 0\text{”} \vee \text{“}x = \mathit{max}\text{”}\big)\Big) \quad \vee \\ \exists y\, \exists z \Big(& \; y < z \wedge R(y) \wedge R(z) \wedge \forall v \big(\text{“}y < v < z\text{”} \to \neg R(v)\big) \wedge \\ & \text{“}P_a(y{+}1)\text{”} \wedge \text{“}P_b(z{-}1)\text{”} \wedge \big(\text{“}x = y{+}1\text{”} \vee \text{“}x = z{-}1\text{”}\big) \Big). \end{aligned}$$

Für die i-te Induktionsstufe R^i des *inflationären* Fixpunkts von F gilt dann:

$$R^i \;=\; \{0, .., j, n{-}1, .., n{-}1{-}j \mid j < i \text{ maximal, so dass } w \in a^j\{a,b\}^* b^j\}.$$

Man beachte, dass $\varphi(R,x)$ *nicht positiv* in R ist, dass “$\forall u\, [\mathbf{lfp}_{R,x}\, \varphi](u)$” also *keine* LFP-Formel ist.

2.36 Lemma.
Die Datenkomplexität des Auswertungsproblems für IFP *auf* Fin *liegt in* PTIME.

Beweis: Analog zum Beweis von Lemma 2.30 für LFP. □

2.37 Proposition. *Jede* LFP*-Formel ist äquivalent zu einer* IFP*-Formel (kurz:* LFP $\leqslant$ IFP*).*

Beweis: Per Induktion über den Formelaufbau. Der einzige interessante Fall ist der Fixpunktoperator

$$[\mathbf{lfp}_{R,\vec{x}}\,\varphi](\vec{t}),$$

wobei $\varphi(R,\vec{x})$ eine LFP-Formel ist, die *positiv* in R ist. Insbesondere ist die Abbildung $F_{\varphi,\mathfrak{A}}$ *monoton* für alle Strukturen $\mathfrak{A}$. Gemäß Induktionsannahme gibt es eine IFP-Formel $\varphi'(R,\vec{x})$, die äquivalent zu $\varphi(R,\vec{x})$ ist. Insbesondere gilt $F_{\varphi',\mathfrak{A}} = F_{\varphi,\mathfrak{A}}$ für alle Strukturen $\mathfrak{A}$. Aus Bemerkung 2.32 folgt direkt, dass die Formel

$$[\mathbf{ifp}_{R,\vec{x}}\,\varphi'](\vec{t})$$

äquivalent zur Formel $[\mathbf{ifp}_{R,\vec{x}}\,\varphi](\vec{t})$ ist. □

2.2.4 Partielle Fixpunktlogik

Von den Lemmas 2.30 und 2.36 wissen wir, dass jedes Problem, das durch eine LFP-Formel oder eine IFP-Formel beschrieben werden kann, zur Komplexitätsklasse PTIME gehört. Zur Beschreibung von Problemen, deren Komplexität jenseits von PTIME liegt, eignen sich die Logiken LFP und IFP also nicht.

Um eine Logik größerer Ausdrucksstärke zu erhalten, beschränken wir im Folgenden die Aufmerksamkeit nicht mehr nur auf *induktive* Abbildungen F bzw. I_F, sondern betrachten *beliebige* Abbildungen $F : \mathrm{Pot}(A) \to \mathrm{Pot}(A)$. Für diese bildet die Sequenz $R^0, R^1, R^2, ..$ der Induktionsstufen nicht mehr unbedingt eine aufsteigende Kette, und sie wird auch nicht immer stationär, erreicht also nicht notwendigerweise einen Fixpunkt.

2.38 Definition (Partieller Fixpunkt $\mathbf{pfp}(F)$). Sei A eine Menge und $F : \mathrm{Pot}(A) \to \mathrm{Pot}(A)$ eine beliebige Abbildung. Der *partielle Fixpunkt* $\mathbf{pfp}(F)$ ist definiert als

$$\mathbf{pfp}(F) := \begin{cases} R^i\,, & \text{falls es ein } i \in \mathbb{N} \text{ gibt, so dass } R^i = R^{i+1}, \\ \varnothing\,, & \text{sonst} \end{cases}$$

2.39 Bemerkung. Jede partielle Fixpunktinduktion über einer n-elementigen Menge A kann höchstens $2^n = |\mathrm{Pot}(A)|$ viele Induktionschritte durchlaufen, bevor entweder ein Fixpunkt erreicht oder die Induktion zyklisch wird. Es gilt:

(1) Falls $R^{2^n-1} = R^{2^n}$, so $\mathbf{pfp}(F) = R^{2^n}$.

(2) Falls $R^{2^n-1} \neq R^{2^n}$, so $\mathbf{pfp}(F) = \varnothing$.

Beweis: Es gibt nur 2^n verschiedene Teilmengen von A. Somit gibt es $i < j$ mit $i, j \in \{0, .., 2^n\}$, so dass $R^i = R^j$.
Falls $R^i = R^{i+1}$, so ist $\mathbf{pfp}(F) = R^i = R^{i+1} = R^{2^n-1} = R^{2^n}$.
Falls $R^i \neq R^{i+1}$, so ist die Folge $R^0, R^1, R^2, \ldots$ der Iterationsstufen von der Form

$$R^0, R^1, \ldots, R^{i-1}, \Big(\underbrace{\overbrace{R^i}^{=R^j}, R^{i+1}}_{\neq}, \ldots, R^{j-1}\Big)^*.$$

Daher existiert kein $k \in \mathbb{N}$ mit $R^k = R^{k+1}$. Insbesondere gilt: $R^{2^n-1} \neq R^{2^n}$ und $\mathbf{pfp}(F) = \varnothing$. $\square$

2.40 Bemerkung. Für *inflationäre* Abbildungen $F : \mathrm{Pot}(A) \to \mathrm{Pot}(A)$ existiert der partielle Fixpunkt und es gilt: $\mathbf{pfp}(F) = \mathbf{ifp}(F)$.

2.41 Beispiel. Im Folgenden konstruieren wir eine Formel $\varphi(R, x)$, so dass für jede linear geordnete endliche Menge $\mathfrak{A} = (A, <^{\mathfrak{A}})$ gilt:

(1) Für jede Teilmenge $X \subseteq A$ gibt es ein $i < 2^{|A|}$, so dass die i-te Induktionsstufe R^i von $F_{\varphi,\mathfrak{A}}$ genau die Menge X ist, und

(2) $\mathbf{pfp}(F_{\varphi,\mathfrak{A}}) = R^{2^{|A|}} = A$.

Die Induktionsstufen $R^0, R^1, R^2, ..$ durchlaufen also sämtliche Teilmengen von A und enden schließlich mit der Menge A als partiellem Fixpunkt.

Idee zur Konstruktion von $\varphi(R, x)$:
Sei $A = \{a_0 <^{\mathfrak{A}} \cdots <^{\mathfrak{A}} a_{n-1}\}$. Eine Menge $X \subseteq A$ kodiert ein 0-1-Wort $w_X = w_{n-1} \cdots w_0$ — bzw. die Zahl $z_X := \sum_{i<n} w_i \cdot 2^i \in \{0, .., 2^n-1\}$ — via

$$w_i = 1 \iff a_i \in X.$$

Die Formel $\varphi(R, x)$ zählt mit ihren Induktionsstufen alle (Binärdarstellungen von) Zahlen aus $\{0, .., 2^n-1\}$ der Reihe nach auf. Wir wählen dazu $\varphi(R, x) :=$

$$\big(\forall z\, R(z)\big) \ \vee\ \exists y \Big(\neg R(y) \ \wedge\ \forall z \big(y > z \to R(z)\big) \ \wedge \big(x = y \ \vee\ (x > y \wedge R(x))\big)\Big).$$

Durch Betrachten der Binärdarstellungen sieht man leicht, dass

- $R^0 = \varnothing$,
- für alle $i < 2^n-1$ gilt: $z_{R^{i+1}} = z_{R^i} + 1$, und
- für $i = 2^n-1$ gilt: $R^i = A = R^{i+1}$.

2.42 Definition (Partielle Fixpunktlogik PFP). Sei σ eine Signatur.
Die Formelmenge PFP$[\sigma]$ ist induktiv durch die Regeln (A1),(A2),(A3),(BC) und (Q1) der Logik erster Stufe, sowie die folgende Regel (PFP) definiert:

(PFP) Ist $\varphi(R, \vec{x})$ eine PFP$[\sigma]$-Formel, wobei

- R eine k-stellige Relationsvariable, für ein $k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$,
- $\vec{x} = x_1, .., x_k$ ein Tupel aus k verschiedenen Variablen erster Stufe, und
- φ außer R und $\vec{x}$ evtl. noch andere freie Variablen hat,

und ist $\vec{t} = t_1, .., t_k$ ein k-Tupel aus Variablen erster Stufe und/oder Konstantensymbolen aus σ, so ist

$$[\mathbf{pfp}_{R,\vec{x}}\, \varphi](\vec{t})$$

eine PFP[σ]-Formel.

2.43 Definition (Semantik von PFP[σ]-Formeln). Die Semantik von PFP[σ]-Formeln der Form $\psi := [\mathbf{pfp}_{R,\vec{x}}\, \varphi](\vec{t})$ ist folgendermaßen definiert:
Ist *frei*$(\psi) = \{\vec{u}, \vec{S}\}$ und ist $\mathfrak{A}$ eine endliche $(\sigma \dot\cup \{\vec{u}, \vec{S}\})$-Struktur, so gilt:

$$\mathfrak{A} \models [\mathbf{pfp}_{R,\vec{x}}\, \varphi](\vec{t}) \quad :\Longleftrightarrow \quad \vec{t}^{\,\mathfrak{A}} \in \mathbf{pfp}(F_{\varphi,\mathfrak{A}}).$$

2.44 Lemma.
Die Datenkomplexität des Auswertungsproblems für PFP *auf* Fin *liegt in* PSPACE.

Beweis: Per Induktion über den Formelaufbau. Der einzige interessante Fall ist der Fixpunktoperator

$$[\mathbf{pfp}_{R,\vec{x}}\, \varphi](\vec{t}).$$

Gemäß Induktionsannahme kann für jede Induktionsstufe R^i die Formel $\varphi(R, \vec{x})$ in einer endlichen Struktur $\mathfrak{A}$ auf Platz polynomiell in $|A|$ ausgewertet werden.
Jede Induktionsstufe R^i ist eine Teilmenge von A^k (mit $k := ar(R)$) und kann somit auf Platz polynomiell in $|A|$ gespeichert werden.
Um R^{i+1} aus R^i zu berechnen, braucht man *nur 2 Stufen* zu speichern (nämlich R^i und R^{i+1}). Sind R^i und R^{i+1} berechnet und gespeichert, so kann man ohne zusätzlichen Platzaufwand testen, ob $R^i = R^{i+1}$, der partielle Fixpunkt also erreicht ist. Wenn bei $i = 2^{(|A|^k)}$ immer noch kein partieller Fixpunkt erreicht wurde, so muss ein Zyklus eingetreten sein, und man weiß, dass $\mathbf{pfp}(F_{\varphi,\mathfrak{A}}) = \varnothing$ ist.
Insgesamt kann man die Formel $[\mathbf{pfp}_{R,\vec{x}}\, \varphi](\vec{t})$ also auf polynomiellem Platz auswerten.
□

2.45 Proposition. *Jede* IFP*-Formel ist äquivalent zu einer* PFP*-Formel (kurz:* IFP $\leqslant$ PFP*).*

Beweis: Per Induktion über den Formelaufbau. Der einzige interessante Fall ist der Fixpunktoperator

$$[\mathbf{ifp}_{R,\vec{x}}\, \varphi](\vec{t}).$$

Für inflationäre Abbildungen existiert der partielle Fixpunkt immer und ist identisch mit dem inflationären Fixpunkt. Es gilt daher:

$$[\mathbf{ifp}_{R,\vec{x}}\, \varphi](\vec{t}) \quad \text{ist äquivalent zu} \quad [\mathbf{pfp}_{R,\vec{x}}\, R(\vec{x}) \vee \varphi](\vec{t}).$$

□

Zusammenfassung:
Für die drei Fixpunktlogiken LFP (kleinste Fixpunktlogik), IFP (inflationäre Fixpunktlogik) und PFP (partielle Fixpunktlogik) gilt:

$$\text{LFP} \leqslant \text{IFP} \leqslant \text{PFP}$$

(d.h.: PFP ist mindestens so ausdrucksstark wie IFP, und IFP ist mindestens so ausdrucksstark wie LFP).

2.2.5 Fixpunktlogiken und Komplexitätsklassen

Ähnlich zum Beweis des Satzes von Fagin kann man zeigen, dass die Logiken LFP und IFP die Komplexitätsklasse PTIME auf der Klasse aller endlichen geordneten Strukturen bescheiben, und dass die Logik PFP die Komplexitätsklasse PSPACE auf der Klasse aller endlichen geordneten Strukturen beschreibt:

2.46 Theorem (Satz von Immerman und Vardi, 1982).

(a) LFP *beschreibt* PTIME *auf* FinOrd.

(b) IFP *beschreibt* PTIME *auf* FinOrd.

Beweis: Wegen Lemma 2.36 und Proposition 2.37 folgt *(b)* direkt aus *(a)*. Von Lemma 2.30 wissen wir, dass die Datenkomplexität des Auswertungsproblems für LFP auf FinOrd in PTIME liegt. Im Folgenden brauchen wir also nur noch zu beweisen, dass jedes Problem aus PTIME durch eine LFP-Formel beschrieben werden kann. Sei dazu σ eine Signatur, die u.a. ein 2-stelliges Relationssymbol $<$ enthält, und sei $\mathsf{C} \subseteq \mathsf{FinOrd}$ eine Klasse endlicher geordneter σ-Strukturen, so dass

$$L_{\mathsf{C}} := \{enc(\mathfrak{A}) \mid \mathfrak{A} \in \mathsf{C}\} \in \text{PTIME}.$$

D.h. es gibt eine deterministische Turing-Maschine $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \Delta, q_0, F)$ und eine Konstante $k \in \mathbb{N}$, so dass M bei Eingabe (der Kodierung) einer endlichen geordneten σ-Struktur $\mathfrak{A}$ entscheidet, ob $\mathfrak{A} \in \mathsf{C}$ und dabei weniger als n^k Schritte macht. Wie beim Beweis des Satzes von Fagin bezeichnen wir mit n immer die Größe des Universums der Eingabe-Struktur $\mathfrak{A}$ und nehmen O.B.d.A. an, dass

- F_{akz} aus genau einem akzeptierenden Zustand q_{akz} besteht,
- jeder Lauf von M bei jeder Eingabe-Struktur $\mathfrak{A}$ mit $|A| \geqslant 2$ nach *genau* n^k-1 Schritten in einem (akzeptierenden oder verwerfenden) Endzustand endet und
- $n^k \geqslant |enc(\mathfrak{A})|$.