endlich ist, die TM also anhält. Wenn das endliche Erfüllbarkeitsproblem für FO entscheidbar wäre, wäre demnach auch das Halteproblem bei leerem Eingabewort entscheidbar, was im Widerspruch zu Satz 1.19 steht.

Diese Idee wird wie folgt ausgeführt:
Sei $M$ eine DTM. Wir kodieren zunächst die Berechnung von $M$ auf leerem Eingabewort durch eine Struktur $\mathfrak{A}_M$ über einer geeigneten Signatur $\sigma$. Anschließend konstruieren wir eine FO$[\sigma]$-Formel $\varphi_M$, die von genau denjenigen $\sigma$-Strukturen erfüllt wird, die die Struktur $\mathfrak{A}_M$ als Unterstruktur enthalten. Insbesondere gilt dann: $\varphi_M$ hat genau dann ein endliches Modell, wenn $\mathfrak{A}_M$ endlich ist, d.h. wenn die Berechnung von $M$ auf leerem Eingabewort endlich ist.

O.B.d.A. können wir annehmen, dass $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \Delta, q_0, F)$ eine DTM ist mit

- $Q = \{0, 1, .., s_Q\}$ für ein $s_Q \in \mathbb{N}$, Anfangszustand $q_0 = 0$, $F \subseteq Q$,
- $\Gamma = \{0, 1, .., s_\Gamma\}$ für ein $s_\Gamma \in \mathbb{N}$, Blank-Symbol $\Box = 0$,
- $s := \max\{s_Q, s_\Gamma\}$,
- falls die Berechnung von $M$ bei leerer Eingabe terminiert, so nach genau $n$ Schritten, wobei $n$ eine natürliche Zahl $\geqslant s$ ist.

Die Signatur $\sigma$ ist (unabhängig von der konkreten DTM $M$) wie folgt gewählt:

$$\sigma \ := \ \{<, \ \mathit{succ}, \ 0, \ B, \ K, \ Z\},$$

wobei

- $<$ und *succ* zwei 2-stellige Relationssymbole, 0 ein Konstantensymbol,
- $B$ ein 3-stelliges Relationssymbol,
- $K$ und $Z$ zwei 2-stellige Relationssymbole.

Wir geben FO$[\sigma]$-Formeln an, die in ihren Modellen $\mathfrak{A}$ folgende Interpretationen der Prädikate erzwingen:

(1.) $<^{\mathfrak{A}}$ ist eine lineare Ordnung, $0^{\mathfrak{A}}$ deren kleinstes Element und $\mathit{succ}^{\mathfrak{A}}$ ist die *Nachfolger*-Relation (engl: successor) bzgl. $<^{\mathfrak{A}}$, d.h.

$$(a, b) \in \mathit{succ}^{\mathfrak{A}} \iff a <^{\mathfrak{A}} b \text{ und es gibt kein } c \text{ mit } a <^{\mathfrak{A}} c <^{\mathfrak{A}} b.$$

(2.) $(t, p, \gamma) \in B^{\mathfrak{A}} \iff$ auf Bandposition $p$ steht zum Zeitpunkt $t$ der Berechnung von $M$ bei leerem Eingabewort das Symbol $\gamma$.

(3.) $(t, p) \in K^{\mathfrak{A}} \iff$ der Schreib-/Lesekopf von $M$ steht zum Zeitpunkt $t$ (der Berechnung bei leerem Eingabewort) auf Bandposition $p$.

(4.) $(t, q) \in Z^{\mathfrak{A}} \iff M$ ist zum Zeitpunkt $t$ (der Berechnung bei leerem Eingabewort) in Zustand $q$.

Die Struktur $\mathfrak{A}_M$, die die Berechnung von $M$ bei leerer Eingabe kodiert, ist folgendermaßen definiert: Ihr Universum ist

$$A_M := \begin{cases} \{0, .., n\}, & \text{falls die Berechnung nach genau } n \text{ Schritten terminiert} \\ \mathbb{N}, & \text{falls die Berechnung unendlich ist.} \end{cases}$$

Die Relationen $<^{\mathfrak{A}_M}$ und $\mathit{succ}^{\mathfrak{A}_M}$ sowie die Konstante $0^{\mathfrak{A}_M}$ sind durch die natürliche lineare Ordnung auf $A_M$, deren Nachfolger-Relation sowie die Zahl 0 belegt. Die Relationen $B^{\mathfrak{A}_M}$, $K^{\mathfrak{A}_M}$ und $Z^{\mathfrak{A}_M}$ sind genau so gewählt, wie in den Punkten (2.), (3.) und (4.) beschrieben.

Nun zur Definition der Formel $\varphi_M$, die erzwingen soll, dass ihre Modelle $\mathfrak{A}$ die Struktur $\mathfrak{A}_M$ als Substruktur enthalten:
Punkt (1.) wird durch folgende Formel gewährleistet:

$$\begin{aligned} &\varphi_{<,\mathit{succ},0} \quad := \\ &\forall x\, \forall y\, \forall z \quad \big( (x < y \ \wedge\ y < z) \ \rightarrow\ x < z \big) && \text{(transitiv)} \\ &\qquad\qquad \wedge \big( x < y \ \rightarrow\ \neg\, y < x \big) && \text{(antisymmetrisch)} \\ &\qquad\qquad \wedge \big( x < y \ \vee\ y < x \ \vee\ y = x \big) && \text{(konnex)} \\ &\qquad\qquad \wedge \big( 0 < x \ \vee\ 0 = x \big) && \text{(0 ist kleinstes Elt.)} \\ &\qquad\qquad \wedge \big( \mathit{succ}(x, y) \ \leftrightarrow\ (x < y \ \wedge\ \neg \exists u\, (x < u \wedge u < y)) \big) && (\mathit{succ} \text{ ist Nachf.-Rel.}) \end{aligned}$$

In jedem Modell $\mathfrak{A}$ der Formel $\varphi_{<,\mathit{succ},0}$ können wir die Elemente $a_0, a_1, a_2, a_3, ..,$ für die

$$a_0 = 0^{\mathfrak{A}} \ \text{ und } \ (a_0, a_1) \in \mathit{succ}^{\mathfrak{A}},\ \ (a_1, a_2) \in \mathit{succ}^{\mathfrak{A}},\ \ (a_2, a_3) \in \mathit{succ}^{\mathfrak{A}},\ \ \ldots$$

mit den natürlichen Zahlen $0, 1, 2, 3, \ldots$ identifizieren. Die folgende Formel erzwingt in ihren Modellen, dass die Variablen $z_0, z_1, .., z_s$ mit diesen Elementen $a_0, a_1, .., a_s$ (also im Grunde mit den natürlichen Zahlen $0, 1, .., s$) belegt werden:

$$\varphi_{\mathit{Zahlen}}(z_0, z_1, .., z_s) \quad := \quad z_0 = 0 \ \wedge\ \bigwedge_{i=1}^{s} \mathit{succ}(z_{i-1}, z_i).$$

Der FO$[\sigma]$-Satz $\varphi_M$ wird nun folgendermaßen gewählt:

$$\begin{aligned} &\varphi_M \quad := \\ &\quad \varphi_{<,\mathit{succ},0} \ \wedge\ \exists z_0 \cdots \exists z_s \ \big( \varphi_{\mathit{Zahlen}}(z_0, .., z_s) \ \wedge \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \varphi_{\mathit{Band}} \ \wedge\ \varphi_{\mathit{Kopf}} \ \wedge\ \varphi_{\mathit{Zustand}} \ \wedge\ \varphi_{\mathit{Start}} \ \wedge\ \varphi_{\mathit{Schritt}} \big)\ , \end{aligned}$$

wobei die Formeln der letzten Zeile wie folgt gewählt sind:

$\varphi_{\mathit{Band}}$ besagt, dass zu jedem Zeitpunkt auf jeder Bandposition genau ein Symbol des Arbeitsalphabets $\Gamma = \{0, .., s_\Gamma\}$ steht:

$$\varphi_{\mathit{Band}} \ := \ \forall x\, \forall y\, \exists z\ \Big( B(x, y, z) \ \wedge\ \big( \bigvee_{i=0}^{s_\Gamma} z = z_i \big) \ \wedge\ \forall z' \big( B(x, y, z') \rightarrow z' = z \big) \Big).$$

$\varphi_{\mathit{Kopf}}$ besagt, dass zu jedem Zeitpunkt der Schreib-/Lesekopf auf genau einer Bandposition steht:

$$\varphi_{\mathit{Kopf}} \ := \ \forall x\, \exists y\ \Big( K(x,y) \ \wedge\ \forall y' \big( K(x,y') \to y' = y \big) \Big).$$

$\varphi_{\mathit{Zustand}}$ besagt, dass die Maschine zu jedem Zeitpunkt in genau einem Zustand aus der Zustandsmenge $Q = \{0, 1, .., s_Q\}$ ist:

$$\varphi_{\mathit{Zustand}} \ := \ \forall x\, \exists z\ \Big( Z(x,z) \ \wedge\ \big( \bigvee_{i=0}^{s_Q} z = z_i \big) \ \wedge\ \forall z' \big( Z(x,z') \to z' = z \big) \Big).$$

Die Formel $\varphi_{\mathit{Start}}$ besagt, dass $M$ zum Zeitpunkt 0 in der Anfangskonfiguration bei Eingabe des leeren Worts ist, d.h. sie ist im Startzustand $q_0 = 0$, ihr Schreib-/Lesekopf steht auf Bandposition 0, und auf jeder Bandposition steht das Blank-Symbol $\Box = 0$:

$$\varphi_{\mathit{Start}} \ := \ Z(0,0) \ \wedge\ K(0,0) \ \wedge\ \forall y\, B(0,y,0).$$

Die Formel $\varphi_{\mathit{Schritt}}$ besagt für jeden Zeitpunkt $t$: Falls $M$ zum Zeitpunkt $t$ nicht in einem Endzustand ist, so ist sie im Zeitpunkt $t' := t + 1$ in einem laut Übergangsrelation zulässigen Zustand $q'$ und hat das entsprechende Symbole auf's Band geschrieben, den Kopf an die richtige Stelle bewegt und die Beschriftung aller anderen Bandpositionen nicht verändert. (Zur besseren Lesbarkeit werden in der folgenden Formel die Symbole $t$, $p$, $t'$, $p'$ etc. benutzt, um Variablen der Logik erster Stufe zu bezeichnen.)

$$\begin{aligned}
&\varphi_{\mathit{Schritt}} \ := \\
&\forall t\, \forall p \bigwedge_{q \in Q \setminus F} \ \bigwedge_{\gamma \in \Gamma} \Big( \Big( K(t,p) \ \wedge\ Z(t,z_q) \ \wedge\ B(t,p,z_\gamma) \Big) \ \to \\
&\qquad \Big( \exists t'\, \exists p' \ \big( \mathit{succ}(t,t') \ \wedge\ K(t',p') \ \wedge \\
&\qquad\qquad \big( \forall p'' \ \big( p'' = p \ \vee \bigwedge_{\gamma'' \in \Gamma} \big( B(t',p'',z_{\gamma''}) \leftrightarrow B(t,p'',z_{\gamma''}) \big) \big) \big) \ \wedge \\
&\qquad\qquad \bigvee_{\substack{q',\gamma',m\, : \\ (q,\gamma,q',\gamma',m) \in \Delta}} \big( Z(t',z_{q'}) \ \wedge\ B(t',p,z_{\gamma'}) \ \wedge\ \chi_m(p,p') \big) \big) \Big) \Big),
\end{aligned}$$

wobei die Formel $\chi_m(p,p')$ die jeweilige Kopfbewegung für $m \in \{1, -1, 0\}$ beschreibt:

$$\chi_1(p,p') \ := \ \mathit{succ}(p,p'), \qquad \chi_{-1}(p,p') \ := \ \mathit{succ}(p',p), \qquad \chi_0(p,p') \ := \ p = p'.$$

Insgesamt sind wir nun fertig mit der Konstruktion der Formel $\varphi_M$, die die Berechnung von $M$ bei leerem Eingabewort beschreibt. Gemäß der Konstruktion von $\varphi_M$ und $\mathfrak{A}_M$ gilt:

- $\mathfrak{A}_M \models \varphi_M$, und

- in jeder $\sigma$-Struktur $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{A} \models \varphi_M$ gibt es Elemente $a_0, a_1, a_2, ..$, die den natürlichen Zahlen $0, 1, 2, \ldots$ entsprechen, und schränkt man $\mathfrak{A}$ ein auf das Teiluniversum

$$\{a_i \mid i \in A_M\},$$

so erhält man eine Struktur, die isomorph zu $\mathfrak{A}_M$ ist.

Insbesondere heißt das, dass das Universum von jedem Modell von $\varphi_M$ mindestens so groß wie das Universum von $\mathfrak{A}_M$ ist. D.h. $\varphi_M$ hat genau dann ein endliches Modell, wenn $A_M$ endlich, d.h. die Berechnung von $M$ bei leerem Eingabewort endlich ist.
Wenn das Erfüllbarkeitsproblem für FO$[\sigma]$ auf $\mathsf{Fin}$ entscheidbar wäre, wäre also auch das Halteproblem $H_\varepsilon$ entscheidbar (denn bei Eingabe einer DTM $M$ könnte man zunächst den Satz $\varphi_M$ konstruieren und dann auf endliche Erfüllbarkeit testen). Dies widerspricht aber der Tatsache, dass $H_\varepsilon$ nicht entscheidbar ist. $\square$

**1.60 Bemerkung.** Man kann sogar zeigen, dass der Satz von Trachtenbrot für die Signatur $\{E\}$ gilt, die aus nur einem 2-stelligen Relationssymbol besteht. (Daraus folgt dann natürlich auch, dass der Satz von Trachtenbrot für *jede* Signatur $\sigma$ gilt, die mindestens ein 2-stelliges Relationssymbol enthält.)
Um dies zu beweisen, braucht man lediglich Strukturen über der im Beweis von Theorem 1.59 benutzten Signatur $\sigma$ auf geeignete Weise durch Strukturen über der Signatur $\{E\}$ zu kodieren. Näheres dazu in der *Übung*.

**Eine Anwendung des Satzes von Trachtenbrot:**

Unter Verwendung des Satzes von Trachtenbrot kann man die Unentscheidbarkeit vieler konkreter Logikprobleme beweisen. Im Folgenden wird dies exemplarisch an der Eigenschaft der *Ordnungsinvarianz* von Formeln dargelegt.

**1.61 Definition.** Sei $\sigma$ eine Signatur und sei $<$ ein 2-stelliges Relationssymbol, das *nicht* zu $\sigma$ gehört. Ein FO$[\sigma\dot\cup\{<\}]$-Satz $\varphi$ heißt *ordnungsinvariant auf* $\mathsf{Fin}$, falls für alle endlichen $\sigma$-Strukturen $\mathfrak{A}$ und alle linearen Ordnungen $<_1^{\mathfrak{A}}$ und $<_2^{\mathfrak{A}}$ auf dem Universum von $\mathfrak{A}$ gilt:

$$(\mathfrak{A}, <_1^{\mathfrak{A}}) \models \varphi \iff (\mathfrak{A}, <_2^{\mathfrak{A}}) \models \varphi.$$

Mit Hilfe des Satzes von Trachtenbrot kann man leicht einen Beweis für den folgenden Satz finden.

**1.62 Satz.** *Für jede Signatur $\sigma$, die mindestens ein 2-stelliges Relationssymbol enthält, ist das folgende Problem unentscheidbar:*

ORDNUNGSINVARIANZ:
*Eingabe:* Ein FO$[\sigma\dot\cup\{<\}]$-Satz $\varphi$.
*Frage:* Ist $\varphi$ ordnungsinvariant auf $\mathsf{Fin}$ ?

**Beweis:** Angenommen, das Problem der Ordnungsinvarianz ist doch entscheidbar, d.h. es gibt eine TM $M$, die bei Eingabe eines FO$[\sigma\dot\cup\{<\}]$-Satzes $\varphi$ entscheidet, ob $\varphi$ ordnungsinvariant auf $\mathsf{Fin}$ ist.

Wir nutzen diese TM $M$, um eine neue TM $M'$ zu bauen, die bei Eingabe eines FO$[\sigma]$-Satzes $\psi$ entscheidet, ob $\psi$ ein endliches Modell hat, d.h., die das Erfüllbarkeitsproblem für FO$[\sigma]$ auf $\mathsf{Fin}$ löst. Dies steht aber im Widerspruch zum Satz von Trachtenbrot (Theorem 1.59 und Bemerkung 1.60).

Sei $Q$ ein 1-stelliges Relationssymbol, das nicht zu $\sigma$ gehört. Bei Eingabe eines FO$[\sigma]$-Satzes $\psi$ tut $M'$ folgendes: Zunächst schreibt sie die Formel

$$\varphi \quad := \quad (\,\psi \;\rightarrow\; \chi\,)\,,$$

wobei

$$\chi \quad := \quad \exists x\,\forall y\,\big(Q(x)\;\wedge\;(x<y\;\vee\;x=y)\big)$$

auf das Arbeitsband und startet dann die TM $M$, die (laut unserer Annahme) bei Eingabe $\varphi$ entscheidet, ob $\varphi$ ordnungsinvariant auf $\mathsf{Fin}$ ist.

Die Formel $\varphi$ ist gerade so konstruiert, dass gilt:

$\varphi$ ist ordnungsinvariant auf $\mathsf{Fin}$ $\iff$ $\psi$ hat kein endliches Modell,

denn: Für alle endlichen $\sigma\dot\cup\{Q\}$-Strukturen $\mathfrak{A}$ und jede lineare Ordnung $<^{\mathfrak{A}}$ auf $A$ gilt

$(\mathfrak{A},<^{\mathfrak{A}})\models\chi$ $\iff$ das minimale Element in $\mathfrak{A}$ bzgl. der Ordnung $<^{\mathfrak{A}}$ liegt in $Q^{\mathfrak{A}}$.

Insbesondere ist $\chi$ nicht ordnungsinvariant auf $\mathsf{Fin}$. Dies hat zur Folge, dass die Formel $\varphi$ genau dann ordnungsinvariant auf $\mathsf{Fin}$ ist, wenn es gar keine endliche Struktur $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{A}\models\psi$ gibt, d.h., wenn $\psi$ kein endliches Modell hat.

Somit ist $M'$ eine Turing-Maschine, die das endliche Erfüllbarkeitsproblem für FO$[\sigma]$ entscheidet. Dies ist aber ein Widerspruch zum Satz von Trachtenbrot. $\square$

# 2 Deskriptive Komplexität

*Klassische Komplexitätstheorie:*

Einordnen von Problemen hinsichtlich der zu ihrer *Lösung* benötigten *Rechenressourcen* wie z.B. Zeit oder Platz.

*Deskriptive Komplexitätstheorie:*

Einordnen der Probleme hinsichtlich der zu ihrer *Beschreibung* nötigen *logischen* Ressourcen wie z.B.

- Art und Anzahl der Quantoren,
- Anzahl der Quantorenalternierungen, d.h. Anzahl der Wechsel zwischen Existenzquantoren und Allquantoren
- Schachtelung von Negationen

*Ziel dieses Kapitels:*

Zu einer Komplexitätsklasse $\mathscr{K}$ eine "natürliche" Logik $\mathscr{L}$ finden, so dass man mit Sätzen aus $\mathscr{L}$ genau diejenigen Probleme defineren kann, die zur Komplexitätsklasse $\mathscr{K}$ gehören.

**Vereinbarung:** Innerhalb von Kapitel 2 sind alle Strukturen *endlich*!

**2.1 Definition (Logische Beschreibung von Komplexitätsklassen).**
Sei $\mathscr{L}$ eine Logik, $\mathscr{K}$ eine Komplexitätsklasse und $\mathsf{S}$ eine unter Isomorphie abgeschlossene[1] Klasse endlicher Strukturen.
*$\mathscr{L}$ beschreibt $\mathscr{K}$ auf* $\mathsf{S}$ (engl.: *$\mathscr{L}$ captures $\mathscr{K}$* auf $\mathsf{S}$), falls die folgenden Bedingungen (a) und (b) erfüllt sind:

(a) Für jeden Satz $\varphi \in \mathscr{L}$ ist die Sprache

$$L_{\mathsf{S}}(\varphi) \ := \ \{enc(\mathfrak{A}) \mid \mathfrak{A} \in \mathsf{S} \text{ und } \mathfrak{A} \models \varphi\} \ \in \ \mathscr{K}.$$

(b) Für jede unter Isomorphie abgeschlossene Strukturklasse $\mathsf{C} \subseteq \mathsf{S}$ gilt: Falls

$$L_{\mathsf{C}} \ := \ \{enc(\mathfrak{A}) \mid \mathfrak{A} \in \mathsf{C}\} \ \in \ \mathscr{K},$$

[1] d.h. für alle Strukturen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ gilt: Falls $\mathfrak{A} \in \mathsf{S}$ und $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, so auch $\mathfrak{B} \in \mathsf{S}$.

so gibt es einen Satz $\varphi \in \mathscr{L}$, so dass[2]

$$\mathsf{C} \;=\; \mathrm{Mod}_{\mathsf{S}}(\varphi).$$

Falls eine Logik $\mathscr{L}$ eine Komplexitätsklasse $\mathscr{K}$ auf der Klasse $\mathsf{Fin}$ aller endlichen Strukturen beschreibt, so sagen wir auch kurz: *$\mathscr{L}$ beschreibt $\mathscr{K}$*.

**2.2 Bemerkungen.**

(a) Man beachte, dass jede Struktur $\mathfrak{A}$ *mehrere* mögliche Kodierungen *enc*$(\mathfrak{A})$ hat, nämlich i.d.R. für jede lineare Ordnung $<$ auf ihrem Universum eine andere.
Die Sprache $L_{\mathsf{C}}$ ist so definiert, dass sie aus *sämtlichen* Kodierungen jeder Struktur in $\mathsf{C}$ besteht.

(b) Isomorphe Strukturen haben dieselben Kodierungen, denn:
Seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ isomorphe Strukturen und sei $h$ ein Isomorphismus von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$. Ferner sei $<^{\mathfrak{A}}$ eine lineare Ordnung auf $A$, d.h. $A = \{a_0 <^{\mathfrak{A}} a_1 <^{\mathfrak{A}} \cdots <^{\mathfrak{A}} a_{n-1}\}$. Wählt man für $B$ die lineare Ordnung $<^{\mathfrak{B}}$ so, dass

$$h(a_0) <^{\mathfrak{B}} h(a_1) <^{\mathfrak{B}} \cdots <^{\mathfrak{B}} h(a_{n-1}),$$

so ist das Wort *enc*$(\mathfrak{B})$, das man mit der linearen Ordnung $<^{\mathfrak{B}}$ erhält, identisch zu dem Wort *enc*$(\mathfrak{A})$, das man mit der linearen Ordnung $<^{\mathfrak{A}}$ erhält.

(c) Wir werden im Folgenden oft Strukturklassen $\mathsf{C}$, die unter Isomorphie abgeschlossen sind, mit der Menge $L_{\mathsf{C}}$ ihrer Kodierungen identifizieren. Insbesondere identifizieren wir die Sprache $L_{\mathsf{S}}(\varphi)$ mit der Modellklasse $\mathrm{Mod}_{\mathsf{S}}(\varphi)$.
Wir schreiben dann kurz "$\mathsf{C} \in \mathscr{K}$" an Stelle von "$L_{\mathsf{C}} \in \mathscr{K}$", und wir schreiben "$\mathrm{Mod}_{\mathsf{S}}(\varphi) \in \mathscr{K}$" an Stelle von "$L_{\mathsf{S}}(\varphi) \in \mathscr{K}$" (vgl. Definition 2.1).

Wir suchen nun Logiken, die Komplexitätsklassen wie NP, P, PSPACE, LOGSPACE beschreiben. Die *Logik erster Stufe* ist dafür zu ausdrucksschwach, da sie keine Konstrukte enthält, die z.B. rekursive Definitionen oder Aussagen der Art "es gibt einen Pfad, der die Eigenschaft XYZ hat" ermöglichen. (Später, in Kapitel 3 (Ehrenfeucht-Fraïssé Spiele) werden wir diese Ausdrucksschwäche der Logik erster Stufe auch beweisen.)

Um Komplexitätsklassen beschreiben zu können, betrachten wir daher geeignete Erweiterungen von FO. Die erste solche Erweiterung ist die folgendermaßen definierte *Logik zweiter Stufe* (SO), die die Logik erster Stufe um Quantoren der Form $\exists X$ bzw. $\forall X$ erweitert, wobei $X$ eine Relationsvariable ist.

**2.3 Definition (Syntax der Logik zweiter Stufe SO).** Sei $\sigma$ eine Signatur.

(a) $\mathrm{Var}_2 := \{\mathrm{Var}_i^k \mid i,k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}\}$ ist die Menge alle *Variablen zweiter Stufe* (oder *Relationsvariablen*). Die Relationsvariable $\mathrm{Var}_i^k$ hat die *Stelligkeit* $ar(\mathrm{Var}_i^k) = k$.
D.h. für jede Zahl $k$ gibt es abzählbar viele Relationsvariablen der Stelligkeit $k$.

[2] Zur Erinnerung: Gemäß Definition 1.10 gilt: $\mathrm{Mod}_{\mathsf{S}}(\varphi) = \{\mathfrak{A} \in \mathsf{S} \mid \mathfrak{A} \models \varphi\}$.