(a) es gibt eine Zahl $e \in \mathbb{N}$, so dass jede 3^m-Umgebung eines Elements in $\mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{B}$ weniger als e Elemente hat,

und

(b) für alle 3^m-Umgebungstypen ρ ist

(i) $|\{a \in A : \text{Typ}(3^m, a, \mathfrak{A}) = \rho\}| \;=\; |\{b \in B : \text{Typ}(3^m, b, \mathfrak{B}) = \rho\}|$

oder

(ii) $|\{a \in A : \text{Typ}(3^m, a, \mathfrak{A}) = \rho\}|,\ |\{b \in B : \text{Typ}(3^m, b, \mathfrak{B}) = \rho\}| \;>\; m{\cdot}e,$

dann ist

$$\mathfrak{A} \;\equiv_m\; \mathfrak{B},$$

d.h. $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ lassen sich nicht durch FO$[\sigma]$*-Sätze der Quantorentiefe $\leqslant m$ unterscheiden.*

Beachte: Falls $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ *endlich* sind, so kann man Bedingung (a) z.B. dadurch erfüllen, dass man $e := \max\{|A|, |B|\} + 1$ wählt.

Beweis: Seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zwei σ-Strukturen, die die Voraussetzungen des Theorems erfüllen.

Vorbemerkungen:

(1) Haben zwei Elemente a und b denselben r-Umgebungstyp, so haben sie auch für jede Zahl $r' < r$ denselben r'-Umgebungstyp.

(2) Da $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ die Voraussetzungen des Theorems erfüllen, gilt wegen (1) für jede Zahl $r \leqslant 3^m$ und jeden r-Umgebungstyp ρ, dass $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ die gleiche Anzahl von Elementen vom r-Umgebungstyp ρ haben oder jede der beiden Strukturen mehr als $m{\cdot}e$ Elemente vom r-Umgebungstyp ρ hat.

(3) Für ein Tupel $\vec{a} = a_1, .., a_k$ von Elementen aus A schreiben wir $|\vec{a}|$, um die *Länge* des Tupels zu bezeichnen, also $|\vec{a}| = k$.

Um zu zeigen, dass $\mathfrak{A} \equiv_m \mathfrak{B}$, nutzen wir Korollar 3.22 und zeigen, dass es eine Sequenz $(I_j)_{j=0,..,m}$ gibt, so dass

$$(I_j)_{j \leqslant m} \;:\; \mathfrak{A} \;\cong_m\; \mathfrak{B}.$$

Für $j \in \{0, .., m\}$ wählen wir dazu

$$I_j \;:=\; \left\{ \big(\vec{a} \mapsto \vec{b}\big) \in \text{Part}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) \;\middle|\; \begin{array}{l} \vec{a} = a_1, .., a_{|\vec{a}|} \in A,\ \vec{b} = b_1, .., b_{|\vec{b}|} \in B, \\ 0 \leqslant |\vec{a}| = |\vec{b}| \leqslant m{-}j, \\ \big(\tilde{N}_{\mathfrak{A}}(3^j, \vec{a}), \vec{a}\big) \cong \big(\tilde{N}_{\mathfrak{B}}(3^j, \vec{b}), \vec{b}\big) \end{array} \right\}.$$

Für $j = m$ beachte man, dass $m{-}j = 0$ ist und daher $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 0$. In diesem Fall sind $\vec{a}$ und $\vec{b}$ also “leere” Tupel, $N_{\mathfrak{A}}(3^j, \vec{a}) = \varnothing = N_{\mathfrak{B}}(3^j, \vec{b})$, und I_m besteht aus der Abbildung

"$\varnothing$", deren Definitionsbereich leer ist.
Wir wollen zeigen, dass $(I_j)_{j\leqslant m} : \mathfrak{A} \cong_m \mathfrak{B}$. D.h. wir müssen zeigen, dass $I_j \neq \varnothing$ für alle $j \leqslant m$, und dass das System $(I_j)_{j\leqslant m}$ die Hin- und die Her-Eigenschaft hat.
Da I_m den partiellen Isomorphismus "$\varnothing$" enthält, ist $I_m \neq \varnothing$. Es reicht daher, im Folgenden zu zeigen, dass das System $(I_j)_{j\leqslant m}$ die Hin- und die Her-Eigenschaft hat (denn daraus folgt per Induktion dann auch für alle $j \in \{m, m{-}1, .., 0\}$, dass $I_j \neq \varnothing$).

Wir beweisen die Hin- und die Her-Eigenschaft induktiv für alle $j < m$.
Sei dazu $m > j \geqslant 0$ und $p := \big(\vec{a} \mapsto \vec{b}\big) \in I_{j+1}$. Gemäß der Definition von I_{j+1} gibt es einen Isomorphismus

$$\pi \;:\; \big(\tilde{N}_{\mathfrak{A}}(3^{j+1},\vec{a}),\vec{a}\big) \;\cong\; \big(\tilde{N}_{\mathfrak{B}}(3^{j+1},\vec{b}),\vec{b}\big)\,.$$

<u>*Hin-Eigenschaft:*</u> Sei $a \in A$.
Ziel: Finde eine Erweiterung q von p, so dass $a \in \text{def}(q)$ und $q \in I_j$.

<u>Fall 1:</u> $a \in N_{\mathfrak{A}}(2{\cdot}3^j,\vec{a})$, d.h. $N_{\mathfrak{A}}(3^j,a) \subseteq N_{\mathfrak{A}}(3{\cdot}3^j,\vec{a})$ und $N_{\mathfrak{A}}(3^j,\vec{a}a) \subseteq N_{\mathfrak{A}}(3^{j+1},\vec{a})$.
Insbesondere liegt a im Definitionsbereich des Isomorphismus π. Wir wählen $b := \pi(a)$. Die Einschränkung π' von π auf $N_{\mathfrak{A}}(3^j,\vec{a}a)$ ist dann ein Isomorphismus

$$\pi' \;:\; \big(\tilde{N}_{\mathfrak{A}}(3^j,\vec{a}a),\vec{a}a\big) \;\cong\; \big(\tilde{N}_{\mathfrak{B}}(3^j,\vec{b}b),\vec{b}b\big)\,.$$

Daher ist $q := \big(\vec{a},a \mapsto \vec{b},b\big) \in I_j$.

<u>Fall 2:</u> $a \notin N_{\mathfrak{A}}(2{\cdot}3^j,\vec{a})$, d.h. $N_{\mathfrak{A}}(3^j,a) \cap N_{\mathfrak{A}}(3^j,\vec{a}) = \varnothing$.
Sei $\rho := \text{Typ}(3^j,a,\mathfrak{A})$ der 3^j-Umbegungstyp von a in $\mathfrak{A}$. Wegen

$$\pi \;:\; \big(\tilde{N}_{\mathfrak{A}}(3{\cdot}3^j,\vec{a}),\vec{a}\big) \;\cong\; \big(\tilde{N}_{\mathfrak{B}}(3{\cdot}3^j,\vec{b}),\vec{b}\big)$$

haben $\tilde{N}_{\mathfrak{A}}(2{\cdot}3^j,\vec{a})$ und $\tilde{N}_{\mathfrak{B}}(2{\cdot}3^j,\vec{b})$ dieselbe Anzahl von Elementen mit 3^j-Umbebungstyp ρ, und zwar höchstens

$$|\vec{a}| \cdot (\text{max. Anzahl von Elementen in einer } 2{\cdot}3^j\text{-Umgebung}) \;\overset{\text{Vor. (a)}}{\leqslant}\; |\vec{a}| \cdot e \;\leqslant\; m{\cdot}e.$$

Außerhalb von $N_{\mathfrak{A}}(2{\cdot}3^j,\vec{a})$ gibt es in A außerdem noch mindestens ein weiteres Element vom 3^j-Umgebungstyp ρ, nämlich das Element a. Wegen Vorbemerkung (2) muss es also auch außerhalb von $N_{\mathfrak{B}}(2{\cdot}3^j,\vec{b})$ in B noch mindestens ein Element b geben, dessen 3^j-Umgebungstyp ρ ist.
Wir wählen die Erweiterung q von $p = \big(\vec{a} \mapsto \vec{b}\big)$ mit

$$q \;:=\; \big(\vec{a}a \mapsto \vec{b}b\big).$$

Um nachzuweisen, dass $q \in I_j$ ist, reicht es zu zeigen, dass es einen Isomorphismus

$$\pi' \;:\; \big(\tilde{N}_{\mathfrak{A}}(3^j,\vec{a}a),\vec{a}a\big) \;\cong\; \big(\tilde{N}_{\mathfrak{B}}(3^j,\vec{b}b),\vec{b}b\big)$$

gibt. Sei $\pi_{\vec{a}}$ die Einschränkung von π auf $N_{\mathfrak{A}}(3^j, \vec{a})$, d.h.

$$\pi_{\vec{a}} \;:\; \big(\tilde{N}_{\mathfrak{A}}(3^j, \vec{a}), \vec{a}\big) \;\cong\; \big(\tilde{N}_{\mathfrak{B}}(3^j, \vec{b}), \vec{b}\big)\,.$$

Wegen $\mathrm{Typ}(3^j, a, \mathfrak{A}) = \rho = \mathrm{Typ}(3^j, b, \mathfrak{B})$ gibt es außerdem einen Isomorphismus

$$\pi_a \;:\; \big(\tilde{N}_{\mathfrak{A}}(3^j, a), a\big) \;\cong\; \big(\tilde{N}_{\mathfrak{B}}(3^j, b), b\big)\,.$$

Wegen

$$\mathrm{def}(\pi_{\vec{a}}) \cap \mathrm{def}(\pi_a) = \varnothing \quad \text{und} \quad \mathrm{bild}(\pi_{\vec{a}}) \cap \mathrm{bild}(\pi_b) = \varnothing$$

ist $\pi' := \pi_{\vec{a}} \,\dot{\cup}\, \pi_a$ der gesuchte Isomorphismus

$$\pi' \;:\; \big(\tilde{N}_{\mathfrak{A}}(3^j, \vec{a}a), \vec{a}a\big) \;\cong\; \big(\tilde{N}_{\mathfrak{B}}(3^j, \vec{b}b), \vec{b}b\big)\,.$$

Insgesamt haben wir gezeigt, dass das System $(I_j)_{j\leqslant m}$ die Hin-Eigenschaft hat.

Her-Eigenschaft: Analog.

Insgesamt erhalten wir, dass $(I_j)_{j\leqslant m} : \mathfrak{A} \cong_m \mathfrak{B}$. Mit Korollar 3.22 folgt $\mathfrak{A} \equiv_m \mathfrak{B}$. □

Eine Anwendung des Satzes von Hanf: Die Hanf-Lokalität der Logik erster Stufe

Der Satz von Hanf liefert ein hinreichendes Kriterium, mit dem man leicht zeigen kann, dass zwei Strukturen m-äquivalent sind. Aus dem Satz von Hanf folgt, dass alle FO-Sätze der Quantorentiefe m in dem Sinne "lokal" sind, dass sie nur über Umgebungen vom Radius 3^m "sprechen können". Im Folgenden wird diese "Lokalität" der Logik erster Stufe etwas genauer dargestellt.

3.28 Definition (Hanf-Lokalität). Sei σ eine relationale Signatur.

(a) Seien $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ σ-Strukturen und sei $r \in \mathbb{N}$.
$\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ heißen r-*bijektiv*, kurz:

$$\mathfrak{A} \leftrightarrows_r \mathfrak{B},$$

falls es eine Bijektion $f : A \to B$ gibt, so dass für alle $a \in A$ gilt:

$$\big(\tilde{N}_{\mathfrak{A}}(r, a), a\big) \;\cong\; \big(\tilde{N}_{\mathfrak{B}}(r, f(a)), f(a)\big)\,.$$

(b) Sei S eine Klasse von σ-Strukturen und $\mathsf{C} \subseteq \mathsf{S}$.
C heißt *Hanf-lokal* in S, falls es eine Zahl $r \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \mathsf{S}$ gilt:

$$\text{Falls } \mathfrak{A} \leftrightarrows_r \mathfrak{B}, \quad \text{so} \quad \big(\mathfrak{A} \in \mathsf{C} \iff \mathfrak{B} \in \mathsf{C}\big)\,.$$

Die folgende einfache Folgerung aus dem Satz von Hanf besagt, dass jede FO-definierbare Klasse endlicher Strukturen Hanf-lokal ist.

3.29 Theorem (Hanf-Lokalität von FO). *Sei σ eine relationale Signatur und* S *eine Klasse endlicher σ-Strukturen. Dann gilt für jeden* FO$[\sigma]$*-Satz φ:* $\mathrm{Mod}_{\mathsf{S}}(\varphi)$ *ist Hanf-lokal in* S.

Beweis: Sei φ ein FO$[\sigma]$-Satz und $\mathsf{C} := \mathrm{Mod}_{\mathsf{S}}(\varphi)$. Sei $m := qr(\varphi)$ die Quantorentiefe von φ. Wir wählen $r := 3^m$.
Für Strukturen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \mathsf{S}$ mit $\mathfrak{A} \leftrightarrows_r \mathfrak{B}$ müssen wir zeigen, dass $\mathfrak{A} \in \mathsf{C} \iff \mathfrak{B} \in \mathsf{C}$, d.h. wir müssen zeigen, dass

$$\mathfrak{A} \models \varphi \iff \mathfrak{B} \models \varphi.$$

Wegen $\mathfrak{A} \leftrightarrows_r \mathfrak{B}$ und $r = 3^m$ gibt es eine Bijektion $f : A \to B$, so dass für alle $a \in A$ gilt:

$$\big(\tilde{N}_{\mathfrak{A}}(3^m, a), a\big) \cong \big(\tilde{N}_{\mathfrak{B}}(3^m, f(a)), f(a)\big).$$

Da f eine *Bijektion* ist, gilt also für jeden 3^m-Umgebungstyp ρ, dass

$$|\{a \in A : \mathrm{Typ}(3^m, a, \mathfrak{A}) = \rho\}| \quad = \quad |\{b \in B : \mathrm{Typ}(3^m, b, \mathfrak{B}) = \rho\}|.$$

Somit ist Bedingung *(b)(i)* des Satzes von Hanf erfüllt. Da $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ endlich sind, ist auch die Bedingung *(a)* erfüllt. Aus dem Satz von Hanf folgt daher, dass $\mathfrak{A} \equiv_m \mathfrak{B}$. D.h. $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ erfüllen dieselben FO$[\sigma]$-Sätze vom Quantorenrang m. Wegen $qr(\varphi) = m$ gilt also insbesondere: $\mathfrak{A} \models \varphi \iff \mathfrak{B} \models \varphi$. □

3.30 Bemerkung. Indem man zeigt, dass eine Klasse C *nicht Hanf-lokal* in S ist, kann man (unter Verwendung von Theorem 3.29) zeigen, dass C *nicht* FO*-definierbar* in S ist.
Dass C nicht Hanf-lokal in S ist, kann man dadurch zeigen, dass man für jede Zahl $r \in \mathbb{N}$ eine Struktur $\mathfrak{A} \in \mathsf{C}$ und eine Struktur $\mathfrak{B} \in \mathsf{S} \setminus \mathsf{C}$ mit $\mathfrak{A} \leftrightarrows_r \mathfrak{B}$ findet.

3.31 Beispiel.
Conn ist[4] nicht FO-definierbar in $\mathsf{UGraphs}$.

Beweis: Gemäß Theorem 3.29 reicht es zu zeigen, dass Conn nicht Hanf-Lokal in $\mathsf{UGraphs}$ ist. Wir müssen also für jede Zahl $r \in \mathbb{N}$ einen zusammenhängenden Graphen $\mathfrak{A}$ und einen nicht-zusammenhängenden Graphen $\mathfrak{B}$ finden, so dass $\mathfrak{A} \leftrightarrows_r \mathfrak{B}$.
Sei $r \in \mathbb{N}$ beliebig. Als $\mathfrak{B}$ wählen wir einen Graph, der aus zwei disjunkten Kreisen auf je $\ell{+}1$ Knoten besteht, wobei $\ell > 2r$ ist. D.h. $\mathfrak{B}$ ist gerade der Graph $G_{\ell,\ell}$ aus Beispiel 3.23.
Wegen $\ell > 2r$ sieht jede r-Umgebung eines Knotens b von B folgendermaßen aus:

$$\overbrace{\bullet - \bullet - \cdots - \bullet - \bullet}^{r} - \bullet_b - \overbrace{\bullet - \bullet - \cdots - \bullet - \bullet}^{r}$$

Als Struktur $\mathfrak{A}$ wählen wir einen Kreis, der genausoviele Knoten wie $\mathfrak{B}$ hat, d.h. $\mathfrak{A}$ ist ein Kreis auf $2\ell{+}2$ Knoten, also die Struktur $G_{2\ell+1}$ aus Beispiel 3.23. Jede r-Umgebung eines Knotens a von A sieht folgendermaßen aus:

$$\overbrace{\bullet - \bullet - \cdots - \bullet - \bullet}^{r} - \bullet_a - \overbrace{\bullet - \bullet - \cdots - \bullet - \bullet}^{r}.$$

[4] Zur Erinnerung: $\mathsf{UGraphs}$ ist die Klasse aller endlichen ungerichteten Graphen, Conn ist die Klasse aller zusammenhängenden endlichen ungerichteten Graphen.

Sie ist also isomorph zu jeder r-Umgebung eines Knotens b von B. Wir können also *irgendeine* Bijektion f von A nach B wählen (und die gibt es, da $|A| = |B|$) und haben damit gezeigt, dass $\mathfrak{A} \leftrightarrows_r \mathfrak{B}$. Wegen $\mathfrak{A} \in \mathsf{Conn}$ und $\mathfrak{B} \in \mathsf{UGraphs} \setminus \mathsf{Conn}$ haben wir also gezeigt, dass Conn nicht Hanf-lokal in $\mathsf{UGraphs}$ ist. $\square$