11. Rekursion, Komplexität von Algorithmen

Teil 2

Java-Beispiele:

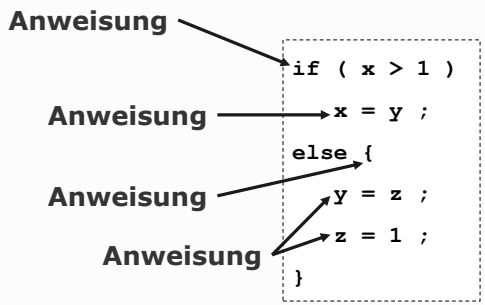
Power1.java
Hanoi.java

Anwendung der Rekursion

- Rekursiv definierte Funktionen
  - **Fibonacci-Funktion**
  - **Fakultät, Potenz**
  - **...**
- Rekursiver Aufbau der zu verarbeitenden Daten
  - **Programme (EBNF)-> Compiler**
  - **Bäume und Listen** (Teil III)
- Natürliche rekursive Problemlösungen
  - **Sortierverfahren**
  - **Türme von Hanoi**
  - **...**

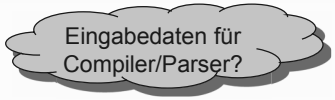
Rekursiver Aufbau von Daten: Syntax von Programmiersprachen

Programmstruktur: rekursiv definiert



Beispiel: rekursiver Aufbau der Daten

Compiler:
Parser (Syntaxanalyse)



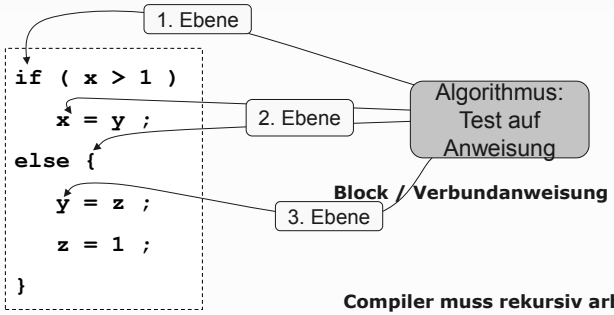
EBNF:

```
Anweisung ::=       Auswahlanweisung | Block | ...
Auswahlanweisung ::=      if ( Ausdruck ) Anweisung
                          [ else Anweisung ]
Block ::=   { Anweisung | ... }
```

Parser:

1. testet, ob Anweisung vorliegt
2. findet if-Anweisung
3. testet im Innern der if-Anweisung:
   liegen 1 (2) innere Anweisungen vor
   → **rekursiver Aufruf des Tests, ob *Anweisung* anliegt**

Parser : testet in jedem Zustand, ob bestimmte Syntaxeinheit anliegt



Compiler muss rekursiv arbeiten

1. Ebene:	Einstieg in den Algorithmus
2. Ebene:	1. rekursiver Aufruf (zwei mal)
3. Ebene:	2. rekursiver Aufruf (in „Block“, zwei mal)

Einzelheiten: Compilerbau

Anwendung der Rekursion

- Rekursiv definierte Funktionen
  - **Fibonacci-Funktion**
  - **Fakultät, Potenz**
  - **...**
- Rekursiver Aufbau der zu verarbeitenden Daten
  - **Programme (EBNF)-> Compiler**
  - **Bäume und Listen** (Teil III)
- Natürliche rekursive Problemlösungen
  - **Sortierverfahren** (II.12)
  - **Türme von Hanoi**
  - **...**

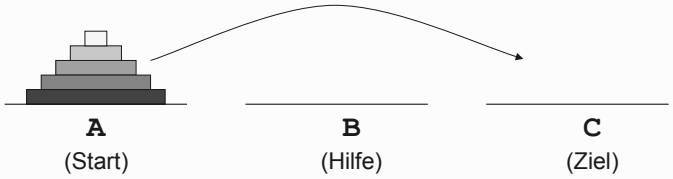
Rekursive Problemlösungen: Türme von Hanoi

Rekursive Problemlösungen: Türme von Hanoi

Aufgabe:

Scheiben liegen der Größe nach geordnet auf einem Platz A und sollen auf einen Platz C unter Zuhilfenahme eines Platzes B transportiert werden.

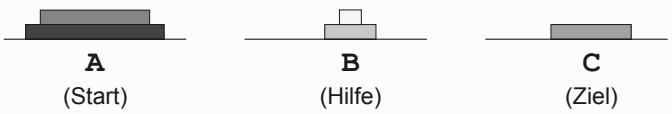
Randbedingungen:
- immer nur eine Scheibe bewegen (die obere)
- niemals größere über einer kleineren Scheibe



Aufgabe (Fortsetzung)

Gesucht: Folge von Einzelbewegungen, die zum Ziel führen

```
% java Hanoi
Anzahl der Scheiben: 5
Scheibenbewegungen:
   von A nach C
   von A nach B
   von C nach B
   von A nach C
    . . .
```



Lösungsalgorithmus: iterativ oder rekursiv?

Gesucht: **Folge** von Einzelbewegungen, die zum Ziel führen.

d. h. Algorithmus muss für wiederholte Berechnung von Einzelschritten sorgen.

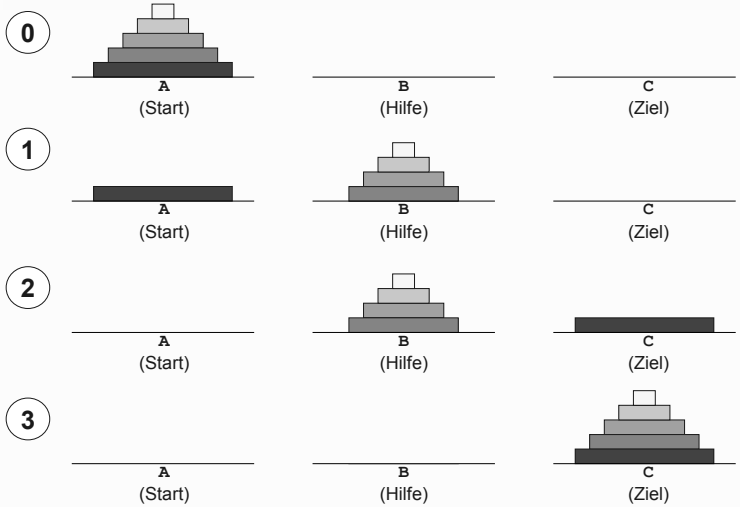
→ Iterativer Algorithmus?
Möglich - aber: nicht naheliegend

```
Solange (noch nicht am Ziel)
  Berechne nächste Bewegung
```

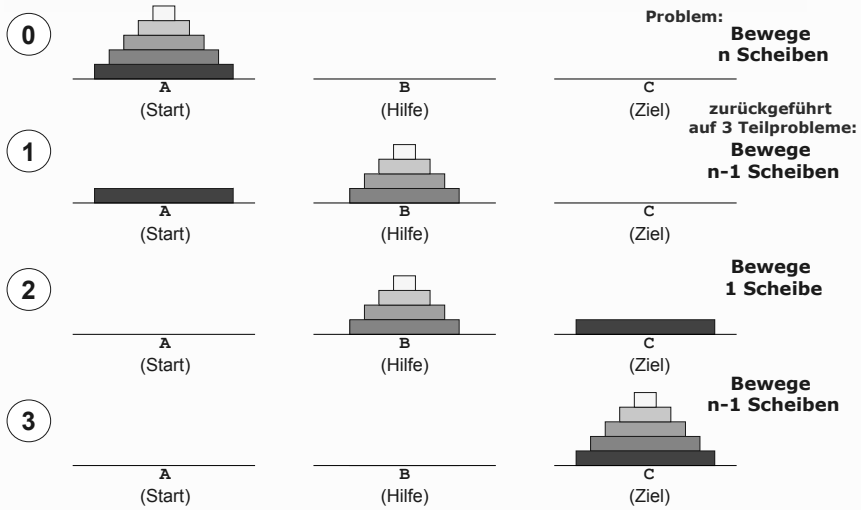
→ Rekursiver Algorithmus?
Natürliche Lösung des Problems:
Zerlegung des Problems in einfachere **Teilprobleme,** die rekursiv bearbeitet werden

bewege n Scheiben → bewege n-1 Scheiben

Rekursiver Lösungsalgorithmus



Rekursiver Lösungsalgorithmus



Rekursiver Lösungsalgorithmus

Bewege n Scheiben von 'start' über 'hilfe' nach 'ziel'

Anfang: n = 1 (e i n e Scheibe)

Transportiere die Scheibe direkt von 'start' nach 'ziel'

Schritt: n > 1

1. Bewege n - 1 Scheiben*) von 'start' über 'ziel' nach 'hilfe'
2. Transportiere eine (größte) Scheibe direkt von 'start' nach 'ziel'
3. Bewege n - 1 Scheiben*) von 'hilfe' über 'start' nach 'ziel'

*) „Bewege": Kein gleichzeitiger Transport von n -1 > 1 Scheiben!
Sondern: Anwendung des Algorithmus auf weniger als n Scheiben
(Rekursivität)

Hanoi-Programm: rekursiver Algorithmus

Hanoi.java

```
static void bewege
          (int n, char start, char hilfe, char ziel) {

  if (n == 1)
    System.out.println(" von " + start + " nach " + ziel);
  else {
    bewege(n - 1, start, ziel, hilfe);
    System.out.println(" von " + start + " nach " + ziel);
    bewege(n - 1, hilfe, start, ziel);
  }
}
```

Gesamtproblem →
3 Teilprobleme (mit 2 rekursiven Aufrufen)

Hanoi-Programm: Rahmen

Hanoi.java

```
public static void main (String argv[]) {
   int n;

   System.out.print("Anzahl der Scheiben: ");
   n = Keyboard.readInt();
   if (n > 0) {
      . . .
      bewege(n,'A','B','C');
   }
   else
      System.out.println("Zahl nicht positiv");
}
```

Plätze durch Zeichen bezeichnet

Hanoi-Programm: Rahmen

```
public static void main (String argv[]) {
    int n;

    System.out.print("Anzahl der Scheiben: ");
    n = Keyboard.readInt();
    if (n > 0) {
        . . .
        bewege(n,'A','B','C');
    }
    else
        System.out.println("Zahl nicht positiv");
}
```

```
% java Hanoi
Anzahl der Scheiben: 5
Scheibenbewegungen:
   von A nach C
   von A nach B
   von C nach B
   von A nach C
    . . .
```

```
% java Hanoi
Anzahl der Scheiben: 10
Scheibenbewegungen:
   von A nach C
   1023 Bewegungen .
```

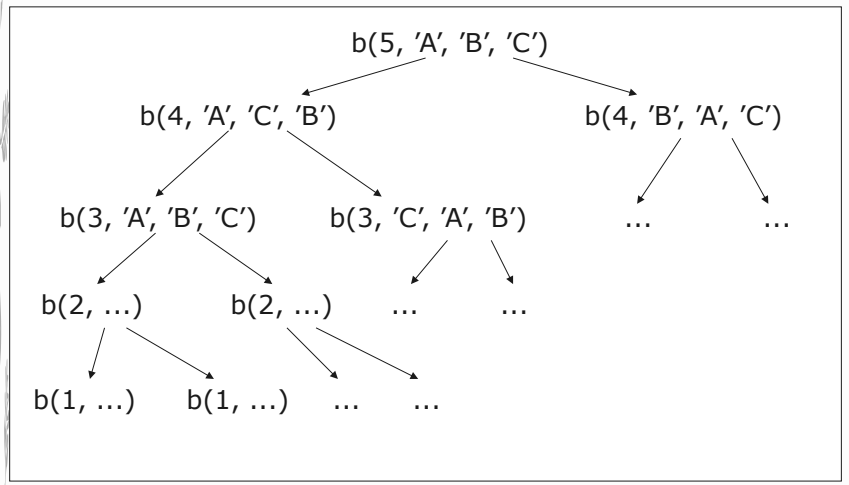
```
% java Hanoi
Anzahl der Scheiben: 100
ca. 10 Mrd.
Scheibenbewegungen:
. . .
```


Hanoi-Programm: Visualisierung

http://www.mathematik.ch/spiele/hanoi_mit_grafik/

Aufrufbeziehungen: Hanoi

Abk.: bewege(5, 'A', 'B', 'C') = b(5, 'A', 'B', 'C')



Überführung: Rekursion → Iteration

Warum?

- Rekursion: zeit- und speicheraufwendig (Aufrufe von Methoden)
- Es gibt Programmiersprachen ohne Rekursion

Hanoi: rekursiv → iterativ
(mit Abspeicherung von zu lösenden Problemen: Stack)

Grundprinzip: Wie?

- In einem (Zyklus-)Schritt:
  Löse immer **das aktuelle** Problem und merke die später zu lösenden Probleme in einem Problemspeicher (Stack)
- Ein Problem:
  Bewege n Scheiben von 'start' über 'hilfe' nach 'ziel'
- Im Problemspeicher (Stack / Stapel): das aktuelle Problem ist 'oben' gespeichert, die anderen Probleme liegen „darunter"
- Algorithmus:

Solange noch Probleme zu lösen sind

```
while (!isEmpty(problemStack))   {
   // bearbeite das aktuelle (oberste) Problem
}
```

n = 1 → drucken und Problem streichen

n > 1 → Problem streichen + speichere drei neue Probleme

Beispiel: 'Problem-Stack'

```
bewege (5, 'A', 'B', 'C');
```

Stackentwicklung (Speicher aller zu lösenden Probleme):

Anfang:

5	A	B	C

← aktuelles Problem

1. Zyklusschritt:

4	A	C	B
1	A	B	C
4	B	A	C

aktuelles Problem

alle zu lösenden Probleme

```
while (!isEmpty(problemStack))   {
   // bearbeite das aktuelle (oberste) Problem
}
```

n = 1 → drucken und Problem streichen

n > 1 → Problem streichen + speichere drei neue Probleme

Beispiel: 'Problem-Stack'

```
bewege (5, 'A', 'B', 'C');
```

Stackentwicklung:

Anfang:

5	A	B	C

1. Zyklusschritt:

4	A	C	B
1	A	B	C
4	B	A	C

2. Zyklusschritt:

3	A	B	C
1	A	C	B
3	C	A	B
1	A	B	C
4	B	A	C

3. Zyklusschritt:

2	A	C	B
1	A	B	C
2	B	A	C
1	A	C	B
3	C	A	B
1	A	B	C
4	B	A	C

4. Zyklusschritt:

1	A	B	C
1	A	C	B
1	C	A	B
1	A	B	C
2	B	A	C
1	A	C	B
3	C	A	B
1	A	B	C
4	B	A	C

Weitere Zyklusschritte?

Beispiel: 'Problem-Stack'

```
bewege (5, 'A', 'B', 'C');
```

Stackentwicklung:

Anfang:

5	A	B	C

1. Zyklusschritt:

4	A	C	B
1	A	B	C
4	B	A	C

2. Zyklusschritt:

3	A	B	C
1	A	C	B
3	C	A	B
1	A	B	C
4	B	A	C

3. Zyklusschritt:

2	A	C	B
1	A	B	C
2	B	A	C
1	A	C	B
3	C	A	B
1	A	B	C
4	B	A	C

4. Zyklusschritt:

~~1~~	A	B	C
~~1~~	A	C	B
~~1~~	C	A	B
~~1~~	A	B	C
2	B	A	C
1	A	C	B
3	C	A	B
1	A	B	C
4	B	A	C

5. 6. 7. 8. Zyklusschritt:
4 * drucken und
4 Probleme streichen:

Modifiziertes Problem: Türme von Hanoi

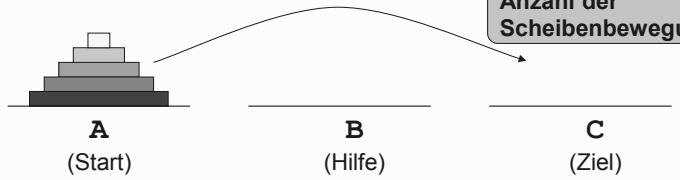
Modifizierte Aufgabe:

Scheiben liegen der Größe nach geordnet auf einem Platz A und sollen auf einen Platz C unter Zuhilfenahme eines Platzes B transportiert werden.

Randbedingungen:
- immer nur eine Scheibe bewegen (die obere)
- niemals größere über einer kleineren Scheibe
- Transport nur zwischen Nachbarplätzen, d.h. verboten A → C, C→ A

Idee?

Anzahl der Scheibenbewegungen?



Wertung: Rekursion

- Alternative *iterative* Lösung immer möglich
  - weil alles in Maschinensprache ablaufen muss – ohne Rekursion
  - Idee für iterative Lösung: natürliche rekursive Lösung
- Iterative Variante: oft schneller (Methodenaufrufe: zeitintensiv)
- Rekursive Lösung: oft lesbarer, eleganter – aber zeit- und speicheraufwendig
- Rekursion: nicht um jeden Preis

Nur wenn Lesbarkeit erhöht, anwenden auf :

- rekursive Funktionen
- rekursive Daten
- rekursive Problemlösungen

→ Rekursive Lösung dort meist die einzige sinnvolle!

Komplexität von Algorithmen: Rechenaufwand

Nicht: Komplexität von Programmen

Unterschied?

- **Programm: Größe/Länge des Programms**
- **Algorithmus: Laufzeit/Berechnungsaufwand**

Komplexitätsbetrachtungen von Algorithmen – Warum?

Oft wichtig:

- Vor Entwicklung von Programmen:
  - Lohnt sich die Entwicklung eines Programms überhaupt: rechnet 100000 Jahre
- Vor Nutzung von Programmen:
  - Welche Eingaben verkraftet das Programm bzgl. der Laufzeit?

Beispiel: Welche Eingaben verkraftet das Hanoi-Programm?

```
% java Hanoi
Anzahl der Scheiben: 1000
Scheibenbewegungen:
   von A nach C
    . . .
```

Wie viele Ausgaben (welche Zeit)?

Scheiben	1	5	30	1000
Bewegungen	1	31	~ 1 Mrd.	$\sim 10^{100}$

Zahl mit 100 Nullen

Dauer aller Scheibenbewegungen

Bei einer Scheibe pro Sekunde

Anzahl Scheiben	Benötigte Zeit
5	31 Sekunden
10	17,1 Minuten
20	12 Tage
30	34 Jahre
40	348 Jahrhunderte
60	36,6 Milliarden Jahre
64	585 Milliarden Jahre

Falls schneller Rechner:
1 Mia Bewegungen pro Sekunde
→585 Jahre für 64 Scheiben!
→ 1000 Scheiben? ☺

Komplexitätsbetrachtungen: H a n o i

n	1	2	6	10	1000
Anzahl Bewegungen	1	3	63	1023	$\sim 10^{100}$

Allgemein: $anz(n) = 2^n - 1$

Beweis: Vollständige Induktion

Anfang: $anz(1) = 2 - 1 = 1$ (gilt nach dem Algorithmus)

Schritt:
$anz(n+1) = 2^{(n+1)} - 1$
$= 2 * 2^n - 1$
$= 2 * (2^n - 1) + 1$
$= 2 * anz(n) + 1$ (nach Vor.)

→ Damit gilt:
für (n+1) wird die bisher ermittelte Anzahl für n verdoppelt + 1
→ Gilt nach: Hanoi-Algorithmus -> siehe Beschreibung des Algorithmus

Komplexitätsbetrachtungen: H a n o i

n	1	2	6	10	1000
Anzahl Bewegungen	1	3	63	1023	$\sim 10^{100}$

Allgemein: $anz(n) = 2^n - 1$

Beweis: Vollständige Induktion

Anfang: $anz(1) = 2 - 1 = 1$ (gilt nach dem Algorithmus)

Schritt:
$anz(n+1) = 2^{(n+1)} - 1$
$= 2 * 2^n - 1$
$= 2 * (2^n - 1) + 1$
$= 2 * anz(n) + 1$

```
bewege(n - 1, start, ziel, hilfe);
Transportiere eine Scheibe(start " nach " ziel);
bewege(n - 1, hilfe, start, ziel);
```

→ Damit gilt:
für (n+1) wird die bisher ermittelte Anzahl für n verdoppelt + 1
→ Gilt nach: Hanoi-Algorithmus -> siehe Beschreibung des Algorithmus

Teilgebiete der Informatik – und ihre Beziehungen

Komplexitätstheorie:
Theorie des Berechnungsaufwands von Algorithmen

Praktische Informatik:	***Theoretische Informatik:*** (Teilbereiche:)
- Datenbanken - Software Engineering - Programmiersprachen - Compilerbau - Betriebssysteme - Systemanalyse	- Algorithmentheorie - Berechnungstheorie - Codierungstheorie - formale Sprachen - Automatentheorie - Komplexitätstheorie - Logik
Technische Informatik:	***Angewandte Informatik:***

Komplexität von Algorithmen

Zusammenhang zwischen

Größe der Eingabe n → Berechnungsaufwand O(n)

Beispiele:

- Exponent n bei 'power'

  `n → n` (power)
  `n →` $\log_2 n$ (power1)

  Multiplikationen

- Anzahl n der Scheiben bei Hanoi

  $n \rightarrow 2^n - 1$

  Ausgabeoperationen (Scheibenbewegungen)

- Anzahl n der Elemente beim Sortieren

  Anzahl: Vergleiche, Vertauschungen

Komplexitätsklassen von Algorithmen

Algorithmen heißen ... , falls der Zusammenhang zwischen n und dem Berechnungsaufwand O in dem angegebenen Verhältnis steht.

konstant:	O(n) = Konstante k
logarithmisch: **(power1)**	O(n) = k * $\log_2 n$
linear: **(power)**	O(n) = k * n
n $\log_2$ n:	O(n) = k * n $\log_2 n$
quadratisch:	O(n) = k * n^2
polynomiell:	O(n) = k * n^m (m>1)
exponentiell: **(Hanoi)**	O(n) = k * 2^n

genauer Wert bei Hanoi: $2^n - 1$
kleinere Dimension bei O(n) weggelassen – es kommt auf Größenordnung an

Komplexitätsklassen: Zusammenhänge

Größe der Eingabe: n

Berechnungsaufwand: Anzahl der Operationen (z.B. Multiplikationen, Scheibenbewegungen)

O (n)

k ?	**k** $\log_2 n$ power1	**k * n** power	**k** * 2^n Hanoi

Komplexitätsklassen: ausgewählte Werte

n	2	8	10	100	1000
konstant	1	1	1	1	1
logarithmisch (power1)	1	3	4	7	10
linear (power)	2	8	10	100	1000
quadratisch	4	64	100	10.000	1.000.000
exponentiell (Hanoi)	4	256	1024	~10 Mrd.	$\sim 10^{100}$

(Größere Dimension entscheidet, kleinere Dimension weggelassen)

Komplexitätsbetrachtungen

Programmierung:
Suche nach effizienten Algorithmen
– nicht jeder Algorithmus ist geeignet

- Lohnt sich die Entwicklung eines Programms überhaupt (rechnet 100000 Jahre)?
- Welche Eingaben verkraftet das Programm bzgl. der Laufzeit (vgl. Hanoi-Programm)?