

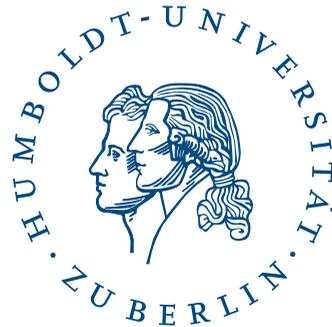
Theoretische Physik II

Elektrodynamik

basierend auf der Vorlesung von Dr. Harald Dorn

Moritz Lemm (lemm@informatik),
Dorian Weber (weber@informatik)

15. Juni 2010



Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Physik

Dieses Dokument beschäftigt sich auf sehr detaillierte und theoretische Weise mit der Physik bewegter Ladungsträger, deren Wirkung aufeinander und auf ihre Umwelt. Es entstand zur Vorlesung *Theoretische Physik II* von Dr. Harald Dorn im Sommersemester 2008 und ist als Skript dazu zu verstehen. Dieses Skript ersetzt nicht den Gang zur Vorlesung, doch die Autoren hoffen, dass es unterstützend dazu beiträgt eigene Fragen für die Vorlesung zu entwickeln und sich auf die Prüfung vorzubereiten. Wir sind der Meinung, dass das Verständnis der Techniken und Kniffe bei der Formulierung der Elektrodynamik essentiell für das Verständnis der Vor- und Nachfolgevorlesungen ist (*Analytische Mechanik* und *Quantenmechanik*). An vielen Stellen werden Ergebnisse aus der Mathematik verwendet, die Informatiker im Laufe ihres Grundstudiums nicht lernen. Das ist uns bewusst und wir haben versucht, an diesen Stellen Rechnungen detailliert auszuführen und gegebenenfalls auf externe Quellen zu verweisen. Wir möchten bereits an dieser Stelle Dr. Harald Dorn dafür danken, dass er uns so geduldig bei den vielen Verständnisfragen und der Suche nach inhaltlichen Fehlern unterstützt hat. Das ist nicht selbstverständlich und das wissen wir.

Nachdem wir uns mit den verwendeten Konventionen vertraut gemacht haben, beschäftigen wir uns im ersten Teil mit der Herleitung der mathematischen Werkzeuge, die über das gesamte Dokument verteilt benutzt werden. Danach betrachten wir zeitlich unveränderliche Ladungskonfigurationen und leiten damit die Physik der Elektro- und Magnetostatik ab. Im darauffolgenden Abschnitt lassen wir die Einschränkung der zeitlichen Unveränderlichkeit fallen und untersuchen frei bewegliche Ladungsmengen im Vakuum sowie die durch diese induzierten Felder. Als nächstes schauen wir uns die Physik an, die entsteht, wenn das umgebende Medium selbst elektromagnetische Eigenschaften hat und kommen damit beispielsweise zur Erklärung optischer Effekte. Abschließend versuchen wir uns an einer Formulierung der Elektrodynamik, die ihre Verknüpfung mit der speziellen Relativitätstheorie offensichtlich macht.

Viel Erfolg wünschen euch Moritz und Dorian!

Inhaltsverzeichnis

I. Mathematische Hilfsmittel	6
Konventionen	6
1. Vektoranalysis	7
1.1. Skalare und Vektorfelder	7
1.2. Gradient, Divergenz, Rotation	7
1.2.1. Nabla-Operator	8
2. Integralsätze	10
2.1. Integrale	10
2.1.1. Satz von Gauß	12
2.1.2. Satz von Stokes	12
2.2. Green'sche Formeln	16
2.2.1. Green 1	16
2.2.2. Green 2	16
2.3. Divergenz und Rotation als Quell- bzw. Wirbeldichte	17
2.4. Die Deltafunktion	19
2.5. Dekomposition eines Vektorfeldes	26
II. Elektrodynamik	31
3. Elektrostatik	31
3.1. Grundgleichungen der Elektrostatik	31
3.1.1. Coulomb'sches Gesetz	31
3.1.2. Übergang zu kontinuierlicher Ladungsdichte	33
3.1.3. Elektrostatisches Potential	34
3.1.4. Poissongleichung	35
3.2. Multipolentwicklung	44
3.2.1. Unabhängige Komponenten bei Multipolmomenten	49

3.2.2. Multipolmomente und Kugelfunktion	51
3.2.3. Laplace in Kugelkoordinaten	54
3.2.4. Verallgemeinerte Legendre'sche Differentialgleichung	57
3.2.5. Rodrigues Formel	58
3.2.6. Multipolmomente der Ladungsverteilung	61
3.3. Elektrostatik bei Anwesenheit von Leitern	61
3.3.1. Effekt flächenhaft verteilter Ladungen	62
3.4. Energie des elektrostatischen Feldes	73
4. Magnetostatik	76
4.1. Stationäre Ströme und Biot-Savart'sches Gesetz	76
4.1.1. Kontinuitätsgleichung	77
4.1.2. Biot-Savart-Gesetz	77
4.1.3. Lorentzkraft	79
4.1.4. Ampère'sches Gesetz	83
4.2. Feld lokalisierter Stromverteilungen	85
4.2.1. Magnetisches Dipolmoment	87
5. Zeitabhängige Felder	94
5.1. Maxwellgleichungen	94
5.1.1. Faraday'sches Induktionsgesetz	94
5.1.2. Maxwell'sche Gleichungen	96
5.2. Potentiale und Eichtransformation	97
5.2.1. Lorenzbedingung	99
5.2.2. Inhomogene Wellengleichung	100
5.2.3. Retardierte Potentiale	102
5.3. Elektromagnetische Wellen im Vakuum	103
5.3.1. Homogene Wellengleichung	103
5.3.2. Ebene Wellen als Lösung der Wellengleichung	104
5.3.3. Polarisierung monochromatischer, ebener Wellen	111
5.4. Energie und Impuls des elektromagnetischen Feldes	115
5.4.1. Energiedichte des elektromagnetischen Feldes	117
5.4.2. Poynting-Vektor	117
5.4.3. Impulsdichte	120

5.5. Erzeugung/Abstrahlung elektromagnetischer Wellen	124
5.5.1. Feld einer bewegten Punktladung	125
5.5.2. Lienard-Wichert Potentiale	126
5.5.3. Dipolstrahlung	131
5.5.4. Zeitgemittelte Gesamtabstrahlung	133
6. Elektrodynamik in kontinuierlichen Medien	137
6.1. Vergleich mit dem Vakuumfall	137
6.1.1. Ohm'sches Gesetz	139
6.1.2. Maxwell-Gleichungen	140
6.1.3. Kraftgesetz	140
6.2. Mikroskopische Theorie der Elektrodynamik in Kontinua	140
6.2.1. Mittlere Ladungsdichte	143
6.3. Elektromagnetische Wellen in kontinuierlichen Medien	144
6.3.1. Phasengeschwindigkeit in Medien	144
6.3.2. Gruppengeschwindigkeit in Medien	146
7. Relativistisch invariante Formulierung	149
Glossar	156

Teil I.

Mathematische Hilfsmittel

Konventionen

Im Laufe dieses Skriptes werden verschiedene etablierte Notationskonventionen verwendet, von denen die aufgelistet sind, die nicht im Text erläutert werden.

Summenkonvention

$$x_i \cdot y_i := \sum_i x_i \cdot y_i$$
$$A_{ii} := \sum_i A_{ii}$$

Partielle Ableitung

$$\partial_x f(x) := \frac{\partial f(x)}{\partial x}$$
$$\partial_i f(\vec{r}) := \frac{\partial f(\vec{r})}{\partial x_i}$$
$$\partial_x^n f(x) := \frac{\partial^n f(x)}{\partial x^n}$$
$$\partial_i^n f(\vec{r}) := \frac{\partial^n f(\vec{r})}{\partial x_i^n}$$

Betrag eines Vektors

$$|\vec{r}| := \sqrt{\vec{r}^2}$$

Matrixnotation

$$(a_{ij})_{\substack{i=1\dots n \\ j=1\dots m}} := \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

1. Vektoranalysis

1.1. Skalare und Vektorfelder

Skalares Feld

Definition 1 (Skalares Feld). Es sei φ eine Funktion

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

d. h. jedem Punkt des Raumes wird eine reelle Zahl zugeordnet.

$$\vec{r} \in \mathbb{R}^3 \rightarrow \varphi(\vec{r}) \in \mathbb{R}$$

Dann nennen wir φ ein Skalarfeld.

Vektorfeld

Definition 2 (Vektorfeld). Es sei \vec{A} eine Funktion

$$\vec{A} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

d. h. jedem Punkt des Raumes wird ein 3-dimensionaler Vektor zugeordnet.

$$\vec{r} \in \mathbb{R}^3 \rightarrow \vec{A}(\vec{r}) \in \mathbb{R}^3$$

Dann nennen wir \vec{A} ein Vektorfeld.

1.2. Gradient, Divergenz, Rotation

Fakt. Es sei \vec{r} ein beliebiger Vektor. Dann lassen sich Einheitsvektoren e_i finden, so dass \vec{r} darstellbar ist als

$$\vec{r} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3, \{\vec{e}_i\} \text{ Orthonormalsystem Basis in } \mathbb{R}^3$$

Definition 3 (Gradient). Es sei $\varphi(\vec{r})$ ein Skalarfeld. Der Gradient von $\varphi(\vec{r})$ ist definiert als

$$\text{grad } \varphi(\vec{r}) := \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \vec{e}_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \vec{e}_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} \varphi(\vec{r})$$

Definition 4 (Divergenz). Es sei $\vec{A}(\vec{r})$ ein Vektorfeld. Die Divergenz von $\vec{A}(\vec{r})$ ist definiert als

$$\text{div } \vec{A}(\vec{r}) := \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial A_i}{\partial x_i}$$

Definition 5 (Rotation). Es sei $\vec{A}(\vec{r})$ ein Vektorfeld. Die Rotation von $\vec{A}(\vec{r})$ ist definiert als

$$\text{rot } \vec{A}(\vec{r}) := \left(\frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3} \right) \vec{e}_1 + \left(\frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1} \right) \vec{e}_2 + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2} \right) \vec{e}_3$$

1.2.1. Nabla-Operator

Alle drei Bildungen sind kompakt darstellbar unter Verwendung des Nabla-Operators.

Definition 6 (Nabla-Operator).

$$\nabla := \vec{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \vec{e}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \vec{e}_3 \frac{\partial}{\partial x_3}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \text{grad } \varphi &= \nabla \varphi \\ \text{div } \vec{A} &= \nabla \cdot \vec{A} \\ \text{rot } \vec{A} &= \nabla \times \vec{A} \end{aligned}$$

Definition 7 (Laplace-Operator).

$$\Delta \varphi := \nabla \cdot \nabla \varphi = \text{div grad } \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2}$$

Nützliche Relationen

$$\begin{aligned}
\nabla(\varphi \cdot \psi) &= \varphi \cdot \nabla \psi + \psi \cdot \nabla \varphi \\
\Rightarrow \operatorname{grad}(\varphi \cdot \psi) &= \varphi \cdot \operatorname{grad} \psi + \psi \cdot \operatorname{grad} \varphi \\
\nabla \cdot (\varphi \cdot \vec{A}) &= \varphi \cdot \nabla \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \nabla \varphi \\
\Rightarrow \operatorname{div}(\varphi \cdot \vec{A}) &= \varphi \cdot \operatorname{div} \vec{A} + \vec{A} \cdot \operatorname{grad} \varphi \\
\nabla \times (\varphi \cdot \vec{A}) &= \varphi \cdot \nabla \times \vec{A} - \vec{A} \times \nabla \varphi \\
\Rightarrow \operatorname{rot}(\varphi \cdot \vec{A}) &= \varphi \cdot \operatorname{rot} \vec{A} - \vec{A} \times \operatorname{grad} \varphi \\
\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) &= \vec{B} \cdot \nabla \times \vec{A} - \vec{A} \cdot \nabla \times \vec{B} \\
\Rightarrow \operatorname{div}(\vec{A} \times \vec{B}) &= \vec{B} \cdot \operatorname{rot} \vec{A} - \vec{A} \cdot \operatorname{rot} \vec{B} \\
\nabla(\vec{A} \cdot \vec{B}) &= B_j \cdot \vec{e}_i \cdot \partial_i A_j + A_j \cdot \vec{e}_i \cdot \partial_i B_j \\
&= (\vec{B} \nabla) \vec{A} + \vec{B} \times (\nabla \times \vec{A}) + (\vec{A} \nabla) \vec{B} + \vec{A} \times (\nabla \times \vec{B}) \\
\Rightarrow \operatorname{grad}(\vec{A} \cdot \vec{B}) &= (\vec{B} \nabla) \vec{A} + (\vec{A} \nabla) \vec{B} + \vec{B} \times \operatorname{rot} \vec{A} + \vec{A} \times \operatorname{rot} \vec{B} \\
\nabla \times (\vec{A} \times \vec{B}) &= (\vec{B} \nabla) \vec{A} - \vec{B} (\nabla \cdot \vec{A}) + \vec{A} (\nabla \cdot \vec{B}) - (\vec{A} \nabla) \vec{B} \\
\Rightarrow \operatorname{rot}(\vec{A} \times \vec{B}) &= (\vec{B} \nabla) \vec{A} - \vec{B} \operatorname{div} \vec{A} - (\vec{A} \nabla) \vec{B} + \vec{A} \operatorname{div} \vec{B}
\end{aligned}$$

insbesondere

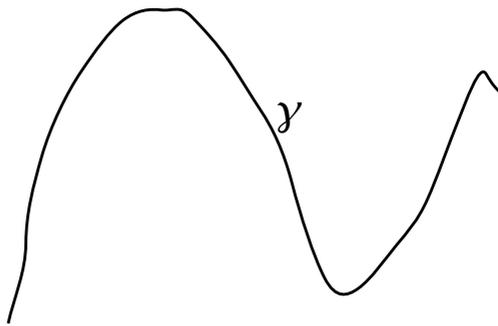
$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi \equiv \vec{0}$$

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{A} \equiv 0$$

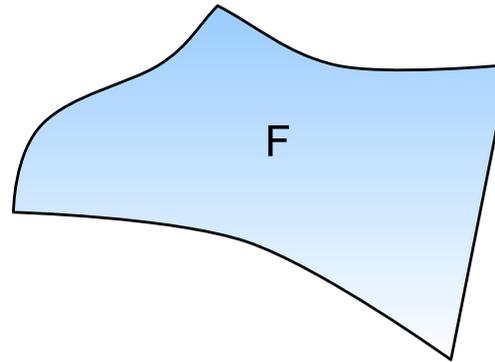
2. Integralsätze

2.1. Integrale

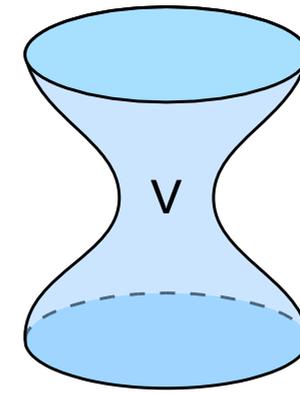
Uns begegnen in der Elektrodynamik Kurven-, Flächen- und Volumenintegrale.



(a) Kurve



(b) Fläche



(c) Volumen

$$\int_{\gamma} \varphi(\vec{r}) ds := \int_{\gamma t} \varphi(\vec{r}(t)) \sqrt{\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2} dt$$

$$\int_F \varphi(\vec{r}) df := \int_{F t_2} \int_{F t_1} \varphi(\vec{r}(t_1, t_2)) \cdot |\partial_1 \vec{r} \times \partial_2 \vec{r}| dt_1 dt_2$$

$$\int_V \varphi(\vec{r}) dv := \int_{r_3} \int_{r_2} \int_{r_1} \varphi(\vec{r}) \underbrace{dr_1 dr_2 dr_3}_{\hat{=} d^3 r}$$

Bemerkungen

- $\partial_1 \vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial t_1}$ und $\partial_2 \vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial t_2}$ sind Tangentialvektoren an die Fläche F . $|\partial_1 \vec{r} \times \partial_2 \vec{r}| dt_1 dt_2$ ist der zum Parameterbereich $[t_1, t_1 + dt_1], [t_2, t_2 + dt_2]$ gehörende Flächeninhalt.
- Es gilt weiter $|\partial_1 \vec{r} \times \partial_2 \vec{r}| = \sqrt{g}$ mit $g = \det \begin{vmatrix} \partial_1 \vec{r} \cdot \partial_1 \vec{r} & \partial_1 \vec{r} \cdot \partial_2 \vec{r} \\ \partial_1 \vec{r} \cdot \partial_2 \vec{r} & \partial_2 \vec{r} \cdot \partial_2 \vec{r} \end{vmatrix}$.
- $\frac{d\vec{r}}{dt}$ ist ein Tangentialvektor an der Kurve. $\sqrt{\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2} dt$ ist die infinitesimale Länge auf der Kurve, die zum Parameterintervall $[t, t + dt]$ gehört.

Weiter kann man mit Vektorfeldern die folgenden Integrale definieren:

$$\int_F \vec{A} d\vec{f} := \int_{F_{t_2}} \int_{F_{t_1}} \vec{A}(\vec{r}(t_1, t_2)) \cdot (\partial_1 \vec{r} \times \partial_2 \vec{r}) dt_1 dt_2$$

$$\int_\gamma \vec{A} d\vec{r} := \int_{\gamma_t} \vec{A}(\vec{r}(t)) \frac{d\vec{r}}{dt} dt$$

Bemerkungen

- $\partial_1 \vec{r} \times \partial_2 \vec{r}$ ist ein Normalenvektor der Fläche.
- $\frac{d\vec{r}}{dt}$ ist wie gehabt ein Tangentialvektor der Kurve.

Dann gelten die beiden wichtigen Integralsätze:

2.1.1. Satz von Gauß

$$\int_V (\operatorname{div} \vec{A}) dv = \int_{\partial V} \vec{A} d\vec{f}$$

2.1.2. Satz von Stokes

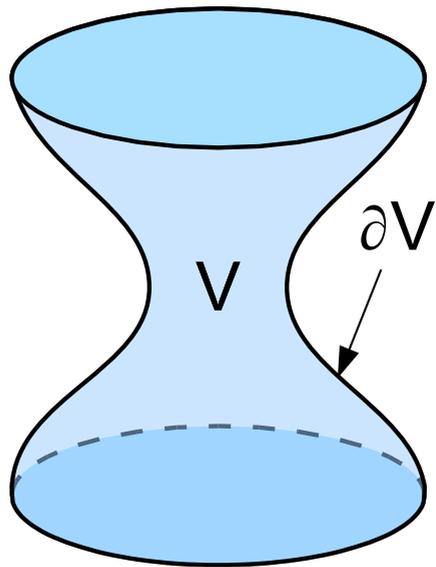
$$\int_F (\operatorname{rot} \vec{A}) d\vec{f} = \int_{\partial F} \vec{A} d\vec{r}$$

Dabei bezeichnet

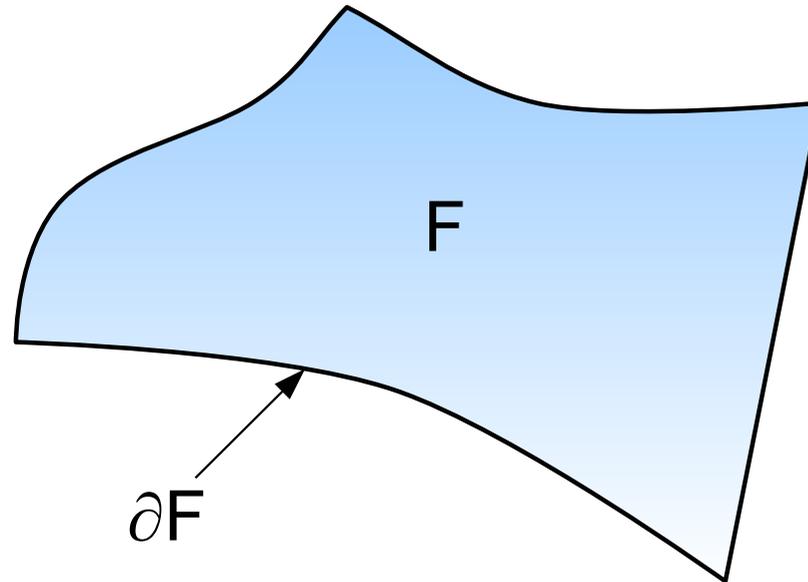
- ∂V den zweidimensionalen Rand des dreidimensionalen Volumens V
- ∂F den eindimensionalen Rand der zweidimensionalen Fläche F

Die Orientierung wird per Konvention so gewählt, dass $d\vec{f}$ aus V herauszeigt und $d\vec{r}$ einem Umlauf im positiven Sinne entspricht.

Der Satz von Gauß sagt, dass es egal ist, ob die Effekte der Quellen bzw. Senken eines Vektorfeldes im Volumen aufsummiert werden, oder ob nur das betrachtet wird, was über den Rand zu- bzw. abfließt. Er hat damit den Charakter eines Erhaltungssatzes.



(a) Volumen mit Rand



(b) Fläche mit Rand

Beweisidee

- Zunächst werden die Sätze für Quader bzw. Rechtecke bewiesen.
- Der allgemeine Beweis wird dann durch Approximation beliebiger Volumina durch Quader geführt.

Satz von Gauß.

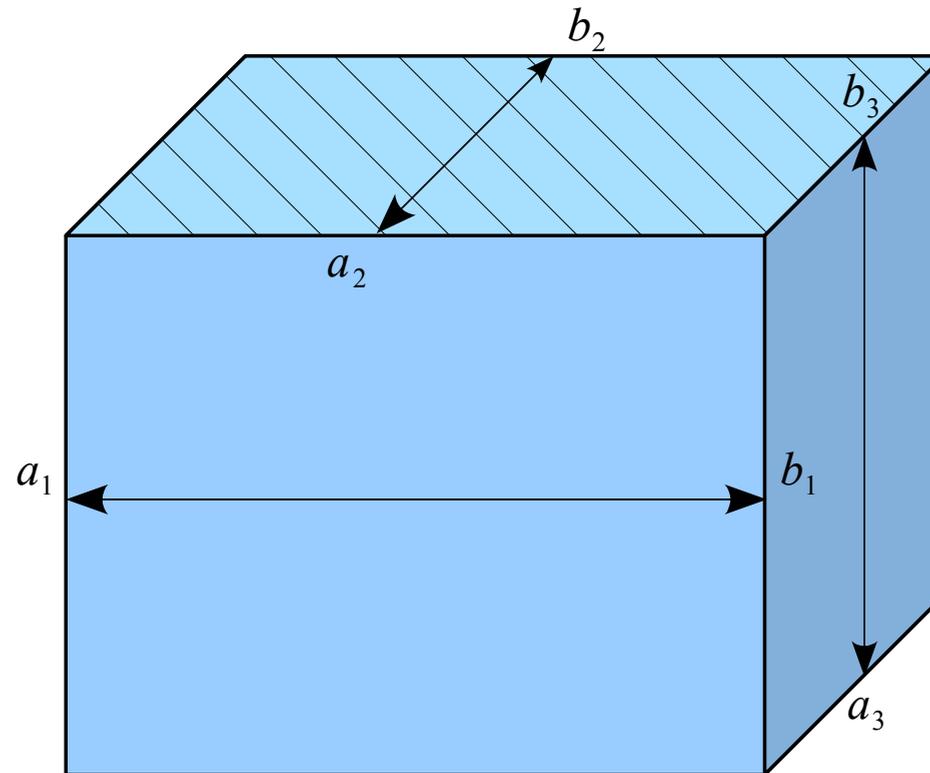
$$\begin{aligned} \int_V \operatorname{div} \vec{A} \, dv &= \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_3}^{b_3} \left(\frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3} \right) dx_3 \, dx_2 \, dx_1 \\ \Rightarrow \int_V \operatorname{div} \vec{A} \, dv &= \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_3}^{b_3} (A_1(b_1, x_2, x_3) - A_1(a_1, x_2, x_3)) \, dx_3 \, dx_2 + \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_3}^{b_3} (A_2(x_1, b_2, x_3) - A_2(x_1, a_2, x_3)) \, dx_3 \, dx_1 \\ &\quad + \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} (A_3(x_1, x_2, b_3) - A_3(x_1, x_2, a_3)) \, dx_2 \, dx_1 \end{aligned}$$

Aus der folgenden Abbildung betrachten wir die schraffierte Fläche, die dem unterstrichenen Term entspricht.

$$\begin{aligned} \vec{r}(t_1, t_2) &= \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \partial_1 \vec{r} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \partial_2 \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \partial_1 \vec{r} \times \partial_2 \vec{r} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

auf dem betrachteten Teil des Randes ist

$$\vec{A} \, d\vec{f} = \vec{A}(\partial_1 \vec{r} \times \partial_2 \vec{r}) \, dt_1 \, dt_2 = A_3(t_1, t_2, b_3) \, dt_1 \, dt_2$$



Box aus dem Beweisansatz für den Satz von Gauß

Das ist gerade der unterstrichene Term. Die anderen Terme folgen mit den entsprechenden Seiten des Quaders analog.

Damit ist der Satz von Gauß für Quader beliebiger Kantenlängen bewiesen. Komplexere Formen lassen sich nun beliebig genau abschätzen (in Analogie zum bekannten Riemann-Integral, das den Flächeninhalt einer Kurve mithilfe des Flächeninhalts von Rechtecken annähert). Dabei beobachtet man, dass sich bei der Summation über all diese Würfel die inneren Seiten der Teilvolumina aufheben, so dass nur die „Außenhülle“ des großen Volumens übrig bleibt. Mit anderen Worten, dessen Oberfläche. \square

2.2. Green'sche Formeln

$$\nabla(\varphi \nabla \psi) = \nabla \varphi \nabla \psi + \varphi \Delta \psi \stackrel{\text{Gauß(2.1.1)}}{\Rightarrow}$$

2.2.1. Green 1

$$\int_{\partial V} \varphi \operatorname{grad} \psi d\vec{f} = \int_V (\nabla \varphi \nabla \psi + \varphi \Delta \psi) dv$$

2.2.2. Green 2

Die Formel gilt allgemein, also auch unter Vertauschung von φ und ψ . Vertauschen wir die beiden und subtrahieren die entstandenen Formeln, entsteht

$$\int_{\partial V} (\varphi \operatorname{grad} \psi - \psi \operatorname{grad} \varphi) d\vec{f} = \int_V (\varphi \Delta \psi - \psi \Delta \varphi) dv$$

2.3. Divergenz und Rotation als Quell- bzw. Wirbeldichte

Sei F eine Fläche und $\vec{A}(\vec{r})$ ein Vektorfeld. Dann heißt

$$\int_F \vec{A} d\vec{f}$$

auch Fluss des Vektorfeldes durch F . Diese Bezeichnung wird allgemein für beliebige Vektorfelder von der Vorstellung übernommen, dass \vec{A} als Geschwindigkeitsfeld für einen Teilchenstrom interpretiert wird. In diesem Fall gibt obiges Integral gerade die pro Zeit durch die Fläche tretende Teilchenzahl an.

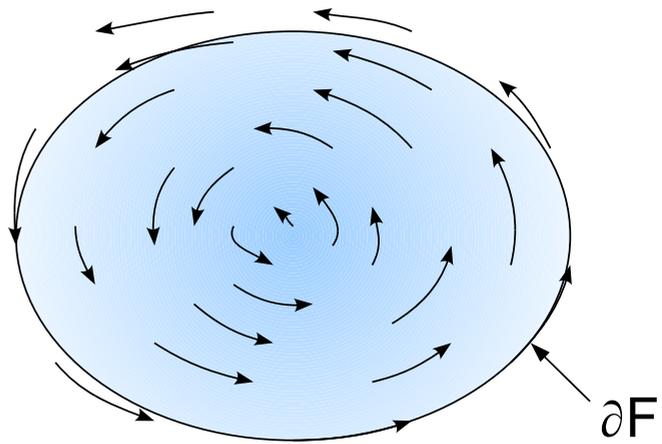
Nach Gauß (2.1.1) ist

$$\int_{\partial V} \vec{A} d\vec{f} = \int_V \operatorname{div} \vec{A} dv$$

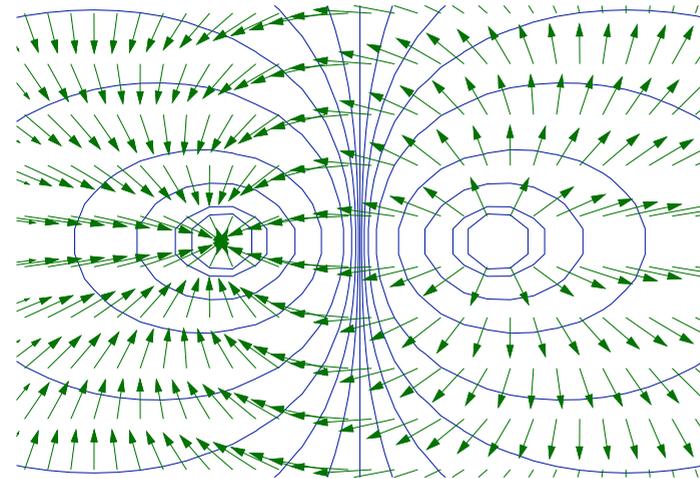
d. h. wenn in V $\operatorname{div} \vec{A} = 0$ ist, dann ist der Fluss durch ∂V ebenfalls gleich Null. Wenn aus V ein von Null verschiedener Fluss herauskommen soll, muss $\operatorname{div} \vec{A}$ in V wenigstens stellenweise verschieden von Null sein. Da V beliebig klein gewählt werden kann, wird $\operatorname{div} \vec{A}$ auch als Quelledichte des Vektorfeldes \vec{A} interpretiert.

Nach Stokes (2.1.2) ist

$$\int_{\partial F} \vec{A} d\vec{r} = \int_F \operatorname{rot} \vec{A} d\vec{f}$$



(a) Verwirbeltes Vektorfeld

(b) Vektorfeld mit $\text{div} \neq 0$ der Feldstärke eines Dipols

$\int_{\partial F} \vec{A} d\vec{r}$ für geschlossene Kurven ∂F ist insbesondere dann von Null verschieden, wenn \vec{A} als Geschwindigkeitsfeld eines Teilchenstromes einen Wirbel hat, der durch ∂F umlaufen wird. Da ∂F beliebig klein werden kann, wird $\text{rot } \vec{A}$ als Wirbeldichte des Vektorfeldes \vec{A} interpretiert.

2.4. Die Deltafunktion

Die Delta-Funktion $\delta(x)$ dient der mathematischen Modellierung diskreter Ereignisse in kontinuierlichen Systemen. Sie wird durch ihre Eigenschaft definiert, für alle $x \neq 0$ zu verschwinden, jedoch trotzdem bei der Integration endlich und ungleich 0 zu sein, falls $x = 0$ im Integrationsintervall ist. Eine Funktion mit diesen Eigenschaften ist beispielsweise bei folgenden Anwendungen hilfreich:

- Idealisierung einer Ladungsverteilung auf Punktladungen
- Eingangsimpuls für die Untersuchung von Impulsantworten beispielsweise beim Test von Lautsprechern
- diskrete Kraftstöße in mechanischen Systemen

Eine solche Funktion existiert nicht (siehe Lebesgue Integrationstheorie), allerdings lässt sich eine Distribution definieren, die die Definition für bestimmte, sogenannte Testfunktionen, erfüllt.

Wir werden im Folgenden auf die Bildung $\Delta \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$ stoßen.

$$\begin{aligned} \Delta \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} &= \nabla \nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \\ \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} &= \frac{\partial}{\partial x_i} ((\vec{r} - \vec{r}')^2)^{-\frac{1}{2}} \\ &= -\frac{1}{2} \cdot ((\vec{r} - \vec{r}')^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2 \cdot (x_i - x'_i) \\ &= -\frac{x_i - x'_i}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} &= -\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{x_i - x'_i}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \\ &= -\frac{\partial}{\partial x_j} (x_i - x'_i) \cdot ((\vec{r} - \vec{r}')^2)^{-\frac{3}{2}} \\ &= \begin{cases} 3 \cdot \frac{(x_i - x'_i)(x_j - x'_j)}{|\vec{r} - \vec{r}'|^5} & \text{falls } i \neq j \\ -\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} + 3 \cdot \frac{(x_i - x'_i)^2}{|\vec{r} - \vec{r}'|^5} & \text{falls } i = j \end{cases} \\ \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} &= -\frac{\delta_{ij}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} + 3 \cdot \frac{(x_i - x'_i)(x_j - x'_j)}{|\vec{r} - \vec{r}'|^5} \end{aligned}$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{das Kronecker-Delta}$$

Zur Erinnerung:

$$\nabla := \sum_{i=1}^3 \vec{e}_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \Rightarrow \nabla \nabla = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

Dann ist für $\vec{r} \neq \vec{r}'$:

$$\Delta \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -\overbrace{\frac{\delta_{ii}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}}^3 + 3 \cdot \overbrace{\frac{(x_i - x'_i)^2}{|\vec{r} - \vec{r}'|^5}}^{(\vec{r} - \vec{r}')^2} = 0$$

Was gilt für $\vec{r} = \vec{r}'$?

Zunächst regularisieren wir die Singularität bei $\vec{r} - \vec{r}' = 0$:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{\sqrt{(\vec{r} - \vec{r}')^2 + \epsilon^2}} \stackrel{(2.4)}{=} - \frac{(x_i - x'_i)}{((\vec{r} - \vec{r}')^2 + \epsilon^2)^{\frac{3}{2}}} \\
& \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \frac{1}{\sqrt{(\vec{r} - \vec{r}')^2 + \epsilon^2}} \stackrel{(2.4)}{=} - \frac{\delta_{ij}}{((\vec{r} - \vec{r}')^2 + \epsilon^2)^{\frac{3}{2}}} + 3 \frac{(x_i - x'_i)(x_j - x'_j)}{((\vec{r} - \vec{r}')^2 + \epsilon^2)^{\frac{5}{2}}} \\
& \Rightarrow \Delta \frac{1}{\sqrt{(\vec{r} - \vec{r}')^2 + \epsilon^2}} = \frac{-3 \cdot ((\vec{r} - \vec{r}')^2 + \epsilon^2) + 3 \cdot (\vec{r} - \vec{r}')^2}{((\vec{r} - \vec{r}')^2 + \epsilon^2)^{\frac{5}{2}}} \\
& \qquad \qquad \qquad = - \frac{3\epsilon^2}{((\vec{r} - \vec{r}')^2 + \epsilon^2)^{\frac{5}{2}}}
\end{aligned}$$

Wir sehen für den Grenzfall $\epsilon \rightarrow 0$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \Delta \frac{1}{\sqrt{(\vec{r} - \vec{r}')^2 + \epsilon^2}} = \begin{cases} 0 & \text{für } \vec{r} \neq \vec{r}' \\ -\infty & \text{für } \vec{r} = \vec{r}' \end{cases}$$

Was passiert mit dem Integral des regularisierten Ausdruckes bei $\epsilon \rightarrow 0$?

$$\begin{aligned}
I(\epsilon) &:= \int_V \Delta \frac{1}{\sqrt{(\vec{r} - \vec{r}')^2 + \epsilon^2}} d^3r \\
&= -3\epsilon^2 \cdot \int_V \frac{1}{((\vec{r} - \vec{r}')^2 + \epsilon^2)^{\frac{5}{2}}} d^3r \\
&= -3\epsilon^2 \cdot \int_0^\infty \frac{4\pi \cdot r^2}{(r^2 + \epsilon^2)^{\frac{5}{2}}} dr \\
&= -12\pi\epsilon^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{(x + \epsilon^2)^{\frac{5}{2}}} dx
\end{aligned}$$

Substitution mit $y = x + \epsilon^2$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow I(\epsilon) &= -6\pi\epsilon^2 \cdot \int_{\epsilon^2}^{\infty} \sqrt{y - \epsilon^2} \cdot y^{-\frac{5}{2}} dy \\ &\stackrel{y=\frac{\epsilon^2}{z}}{=} -6\pi\epsilon^2 \cdot \int_1^0 -\frac{\epsilon^2}{z^2} \cdot \epsilon \cdot \sqrt{\frac{1}{z} - 1} \cdot \epsilon^{-5} z^{\frac{5}{2}} dz \\ \Rightarrow I(\epsilon) &= -6\pi \cdot \int_0^1 z^{-2-\frac{1}{2}+\frac{5}{2}} \sqrt{1-z} dz \\ &= -6\pi \cdot \underbrace{\int_0^1 \sqrt{1-z} dz}_{\int_0^1 \sqrt{w} dw = \frac{2}{3}} \\ \Rightarrow \underline{I(\epsilon)} &= -4\pi \text{ unabhängig von } \epsilon! \end{aligned}$$

Da

$$\Delta \frac{1}{\sqrt{(\vec{r} - \vec{r}')^2 + \epsilon^2}} \rightarrow 0, \forall \vec{r} \neq \vec{r}'$$

folgt weiter, dass für beliebige Funktionen $f(\vec{r})$, die differenzierbar mit schnellem Abfall im Unendlichen sind, gilt:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_V f(\vec{r}) \cdot \Delta \frac{1}{\sqrt{(\vec{r} - \vec{r}')^2 + \epsilon^2}} d^3r = -4\pi \cdot f(\vec{r}')$$

Damit haben wir gezeigt, dass

$$\Delta \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -4\pi \cdot \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}')$$

$\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}')$ ist die dreidimensionale Delta-Distribution.

Bemerkungen zur Distributionstheorie

Eine Distribution (hier eindimensional) ist ein lineares, stetiges *Funktional* über dem Raum S der sogenannten *Testfunktionen*.

Funktional Höhere Funktion, die aus dem Raum der Testfunktionen auf komplexe Zahlen abbildet.

Testfunktion Beliebige oft differenzierbare Funktion, die für $|x| \rightarrow \infty$ schneller als jede Potenz gegen Null geht.

$$l : S \rightarrow \mathbb{C}$$

$$\varphi, \psi \in S, a, b \in \mathbb{C} : l[a\varphi + b\psi] = a \cdot l[\varphi] + b \cdot l[\psi]$$

Beispiel

Sei $f(x)$ eine stetige Funktion. Dann definiert

$$l[\varphi] := \int f(x) \cdot \varphi(x) dx, \quad \forall \varphi \in S$$

ein sogenanntes *reguläres Funktional*.

δ -Distribution

$$\delta[\varphi] := \varphi(0) \quad (\text{diese Distribution ist nicht regulär})$$

Man schreibt aber trotzdem

$$\delta[\varphi] = \int \delta(x) \cdot \varphi(x) dx = \varphi(0)$$

bzw. allgemein

$$\delta_{x'}[\varphi] = \int \delta(x - x') \cdot \varphi(x) dx = \varphi(x')$$

Es gilt aber: Zu jedem stetigen linearen Funktional $l(\varphi)$ existiert eine Folge stetiger Funktionen f_n , so dass

$$l[\varphi] = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n(x) \cdot \varphi(x) dx$$

Falls l nicht regulär ist, heißt die Folge $\{f_n(x)\}$ eine Regularisierung von l .

Diese Konstruktion lässt sich in analoger Weise für Testfunktionen im \mathbb{R}^3 durchführen. Dann gilt insbesondere:

$$\int \underbrace{\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}')}_{\delta(x_1) \cdot \delta(x_2) \cdot \delta(x_3)} \cdot \varphi(\vec{r}') d^3 r' = \varphi(\vec{r})$$

Bemerkung

Die δ -Distribution ist dazu geeignet punktförmige Anhäufungen einer physikalischen Größe im Rahmen einer Dichte-Formulierung zu beschreiben, z. B. stetig verteilte Ladung: Ladungsdichte $\varrho(\vec{r})$, Gesamtladung Q

$$Q = \int_V \varrho(\vec{r}) d^3 r$$

Punktladung q_1, \dots, q_n in V :

$$\begin{aligned}
 Q &= \sum_{i=1}^n q_i \\
 &= \int_V q_i \cdot \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_i) d^3r
 \end{aligned}$$

Rechenregeln

- Ableitung einer Distribution:

$$l'[\varphi] := -l[\varphi']$$

Da per Konstruktion Testfunktionen beliebig oft differenzierbar sind, gilt das auch für Distributionen. Speziell für δ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(x - x') \cdot \varphi(x) dx = \left[\underbrace{\varphi(x)}_{\rightarrow 0} \cdot \delta(x - x') \right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x') \cdot \varphi'(x) dx = -\varphi'(x')$$

- Sei

$$\theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ 1 & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

die sogenannte Stufenfunktion. Sie ist natürlich im gewöhnliche Sinne bei $x = 0$ nicht differenzierbar, als Distribution aufgefasst gilt allerdings:

$$\theta'(x) = \delta(x)$$

denn:

$$\int \theta'(x) \cdot \varphi(x) dx = - \int \theta(x) \cdot \varphi'(x) dx = - \left(\underbrace{\varphi(\infty)}_{=0} - \varphi(0) \right) = \varphi(0)$$

○ Es gilt

$$\delta(f(x)) = \sum_n \frac{1}{|f'(x_n)|} \cdot \delta(x - x_n), \quad x_n \text{ einfache Nullstelle von } f(x)$$

denn:

$$\int \delta(f(x)) \cdot \varphi(x) dx = \int \delta(f(x)) \cdot \varphi(x) \cdot \frac{1}{f'(x)} df$$

Einfache Nullstelle Nullstelle x einer Funktion f , in der $f'(x) \neq 0$ ist.

2.5. Dekomposition eines Vektorfeldes

Seien $\varrho(\vec{r})$ und $\vec{w}(\vec{r})$ hinreichend oft differenzierbare Skalar- bzw. Vektorfelder mit schnellem Abfall im Unendlichen und $\operatorname{div} \vec{w}(\vec{r}) = 0$.

Dann gibt es genau ein im Unendlichen hinreichend schnell verschwindendes Vektorfeld $\vec{A}(\vec{r})$ mit

$$\operatorname{div} \vec{A}(\vec{r}) = \varrho(\vec{r}) \quad \text{und} \quad \operatorname{rot} \vec{A}(\vec{r}) = \vec{w}(\vec{r})$$

Weiter gilt

$$\vec{A}(\vec{r}) = -\operatorname{grad} \int_V \frac{\varrho(\vec{r}')}{4\pi \cdot |\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r' + \operatorname{rot} \int_V \frac{\vec{w}(\vec{r}')}{4\pi \cdot |\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r'$$

Eindeutigkeit

Beweis. Gäbe es zwei Felder \vec{A}_1 und \vec{A}_2 mit den geforderten Quell- und Wirbeldichten, dann wäre $\vec{B} := \vec{A}_1 - \vec{A}_2$ quell- und wirbelfrei.

$$\text{rot } \vec{B} = 0 \Rightarrow \exists \varphi : \vec{B} = \text{grad } \varphi$$

Dann muss wegen $\text{div } \vec{B} = 0$ gelten:

$$\begin{aligned} \Delta \varphi &= \text{div grad } \varphi = 0 \\ \stackrel{\text{Green 1(2.2.1)}}{\Rightarrow} \int_{\partial V} \varphi \cdot \text{grad } \varphi \, d\vec{f} &= \int_V (\nabla \varphi \nabla \varphi + \Delta \varphi) \, dv \end{aligned}$$

Wegen $\Delta \varphi = 0$ gilt also für beliebige Volumina

$$\int_{\partial V} \varphi \cdot \text{grad } \varphi \, d\vec{f} = \int_V (\nabla \varphi)^2 \, dv$$

Für sehr große Volumina folgt

$$\begin{aligned} \text{grad } \varphi = \vec{B} &\rightarrow 0 \\ \Rightarrow \int_{\partial V} \varphi \cdot \vec{B} \, d\vec{f} &\rightarrow 0 \\ \Rightarrow \int_V (\nabla \varphi)^2 \, dv &\rightarrow 0 \\ \Rightarrow \nabla \varphi &= 0 \\ \Rightarrow \vec{B} &= 0 \end{aligned}$$

Die beiden Felder sind identisch.

Explizite Formel

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \vec{A}(\vec{r}) &= -\Delta_{\vec{r}} \int_V \frac{\varrho(\vec{r}')}{4\pi \cdot |\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' && (\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{A} = 0, \forall \vec{A}) \\
&= \int_V \varrho(\vec{r}') \cdot \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}') d^3r' \\
&= \varrho(\vec{r}) \\
\operatorname{rot} \vec{A}(\vec{r}) &= \operatorname{rot} \operatorname{rot} \int_V \frac{\vec{w}(\vec{r}')}{4\pi \cdot |\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' && (\operatorname{rot} \operatorname{grad} \alpha = \vec{0}, \forall \alpha)
\end{aligned}$$

Nun gilt allgemein (1.2.1)

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{B}(\vec{r}) = \nabla(\nabla \vec{B}) - (\nabla \nabla) \vec{B} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{B} - \Delta \vec{B}$$

Wir müssen also berechnen

$$\begin{aligned}
\operatorname{grad}_{\vec{r}} \operatorname{div}_{\vec{r}} \frac{\vec{w}(\vec{r}')}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|} &= \operatorname{grad}_{\vec{r}} \left((\vec{w}(\vec{r}') \cdot \nabla_{\vec{r}}) \frac{1}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \\
&= \nabla_{\vec{r}} \left((\vec{w}(\vec{r}') \cdot \nabla_{\vec{r}}) \frac{1}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \\
&= (\vec{w}(\vec{r}') \cdot \nabla_{\vec{r}}) \nabla_{\vec{r}} \frac{1}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|}
\end{aligned}$$

Da $\nabla_{\vec{r}} = \nabla_{\vec{r}'}$ für $\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$ ist, folgt

$$\operatorname{grad}_{\vec{r}} \operatorname{div}_{\vec{r}} \frac{\vec{w}(\vec{r}')}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|} = (\vec{w}(\vec{r}') \cdot \nabla_{\vec{r}'}) \nabla_{\vec{r}'} \frac{1}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{grad}_{\vec{r}} \operatorname{div}_{\vec{r}} \frac{\vec{w}(\vec{r}')}{4\pi \cdot |\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r' &= \int_V \underbrace{(\vec{w}(\vec{r}') \cdot \nabla_{\vec{r}'})}_{\vec{a}} \underbrace{\nabla_{\vec{r}'} \frac{1}{4\pi \cdot |\vec{r} - \vec{r}'|}}_{\vec{b}} d^3 r' \\
&\stackrel{*}{=} \int_{\partial V} \nabla_{\vec{r}'} \left(\frac{1}{4\pi \cdot |\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \cdot \vec{w}(\vec{r}') d\vec{f}' \\
&\quad - \int_V \left(\nabla_{\vec{r}'} \frac{1}{4\pi \cdot |\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \cdot (\nabla_{\vec{r}'} \vec{w}(\vec{r}')) d^3 r' \\
&= 0
\end{aligned}$$

da $\int_{\partial V}$ nichts beiträgt, wenn die Felder im Unendlichen hinreichend schnell abfallen und weil $\nabla_{\vec{r}'} \vec{w}(\vec{r}') = 0$ nach Voraussetzung vom Anfang des Kapitels (Seite 26).

Nebenrechnung(*)

$$\int_{\partial V} \varphi \cdot \vec{a} d\vec{f} \stackrel{\text{Gauß(2.1.1)}}{=} \int_V \nabla(\varphi \cdot \vec{a}) dv = \int_V (\nabla\varphi \cdot \vec{a} + \varphi \nabla\vec{a}) dv$$

Fassen wir φ nun als Komponente eines Vektors \vec{b} auf (also ein b_i), dann folgt

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \int_{\partial V} \vec{b} \cdot \vec{a} d\vec{f} &= \int_V (\nabla\vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \nabla\vec{a}) dv \\
&= \int_V (\nabla\vec{b} \cdot \vec{a}) dv + \int_V (\vec{b} \nabla\vec{a}) dv \\
\Rightarrow \int_V (\nabla\vec{b} \cdot \vec{a}) dv &= \int_{\partial V} \vec{b} \cdot \vec{a} d\vec{f} - \int_V (\vec{b} \nabla\vec{a}) dv
\end{aligned}$$

Damit folgt nach der eben geführten Diskussion

$$\operatorname{rot} \vec{A}(\vec{r}) = - \int_V \vec{w}(\vec{r}') \underbrace{\Delta \frac{1}{4\pi \cdot |\vec{r} - \vec{r}'|}}_{-\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}')} d^3 r' = \vec{w}(\vec{r}) \quad \square$$

Teil II.

Elektrodynamik

3. Elektrostatik

3.1. Grundgleichungen der Elektrostatik

Experimentelle Erkenntnis: Elektrische Ladung existiert und geladene Körper üben elektrostatische Kraft aufeinander aus. Im Falle der Idealisierung auf Punktladungen gilt das *Coulomb'sche Gesetz*.

3.1.1. Coulomb'sches Gesetz

$$\vec{K}_{12} = k \cdot q_1 q_2 \cdot \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}$$

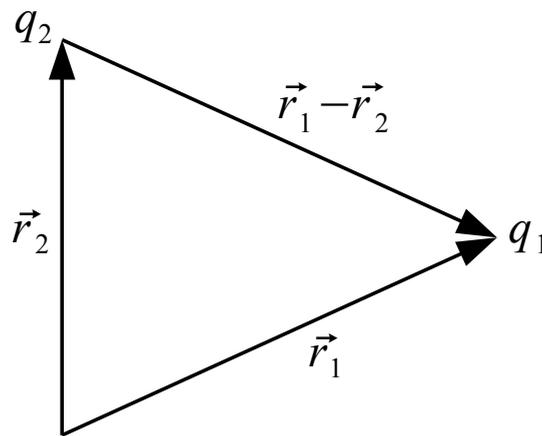
k Coulombkonstante

$q_{1,2}$ Punktladungen

\vec{K}_{12} Kraft wirkend auf q_1 (gleichnamige Ladungen stoßen sich ab)

Maßsystem: SI (Système international d'unités)

Ladung als neue *unabhängige* Grundgröße.



$[q] = \text{As}$ (Amperesekunde = Coulomb)

Dann $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ mit $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}}$

In reiner *Elektrostatik* ließe sich die Coulombkraft auch als Fernwirkung verstehen, mit Blick auf die volle Elektrodynamik nutzen wir jedoch gleich den Feldstandpunkt: Die Ladung q_2 erzeugt um sich herum ein elektrisches Feld.

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot q_2 \frac{\vec{r} - \vec{r}_2}{|\vec{r} - \vec{r}_2|^3}$$

Wird in dieses Feld eine weitere Ladung q_1 an die Stelle \vec{r}_1 eingebracht, wirkt auf sie die Kraft

$$\vec{K}(\vec{r}_1) = q_1 \cdot \vec{E}(\vec{r}_1)$$

Feststellung. Das Feld ist ein eigenständiges physikalisches Objekt. Wir werden später sehen, dass es Energie und Impuls hat.

Elektrisches Feld mehrerer Punktladungen

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \sum_{i=1}^N \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} q_i$$

3.1.2. Übergang zu kontinuierlicher Ladungsdichte

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_V \frac{\varrho(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3r'$$

ϱ Ladungsdichte

Bemerkung

Aus obiger Formel erhält man rückwärts die Punktladungsversion mit

$$\varrho(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N q_i \cdot \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_i)$$

Wegen

$$\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = -\text{grad} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$\Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = -\text{grad} \phi(\vec{r})$$

3.1.3. Elektrostatisches Potential

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned} \text{div} \vec{E}(\vec{r}) &= -\text{div} \text{grad} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_V \rho(\vec{r}') \cdot \underbrace{\Delta \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}}_{=-4\pi \cdot \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}')} d^3r' \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \operatorname{div} \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \varrho(\vec{r})$$

und wegen $\vec{E} = -\operatorname{grad} \phi$

$$\operatorname{rot} \vec{E}(\vec{r}) = \vec{0}$$

3.1.4. Poissongleichung

Wegen $\Delta \phi = -\operatorname{div}(-\operatorname{grad} \phi) = -\operatorname{div} \vec{E}$ folgt auf der Ebene des Potentials die *Poissongleichung des elektrostatischen Potentials*:

$$\Delta \phi(\vec{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \varrho(\vec{r})$$

(für $\varrho(\vec{r}) = 0$ wird die Gleichung „Laplacegleichung“ genannt)

Wird die bisherige Argumentation umgekehrt, folgt die Lösungstheorie der Poissongleichung direkt:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_V \frac{\varrho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'$$

ist eine Lösung der Poissongleichung.

- Die Funktion $G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$ heißt auch Green'sche Funktion zur Poissongleichung im \mathbb{R}^3 .
- Es gilt dann:

$$\Delta G(\vec{r}, \vec{r}') = -\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}')$$

und

$$\phi(\vec{r}) = \int_V G(\vec{r}, \vec{r}') \frac{\rho(\vec{r}')}{\epsilon_0} d^3r'$$

Behauptung. Die Lösung ist eindeutig, falls gefordert wird, dass $\phi(\vec{r}) \rightarrow 0$ für $|\vec{r}| \rightarrow \infty$.

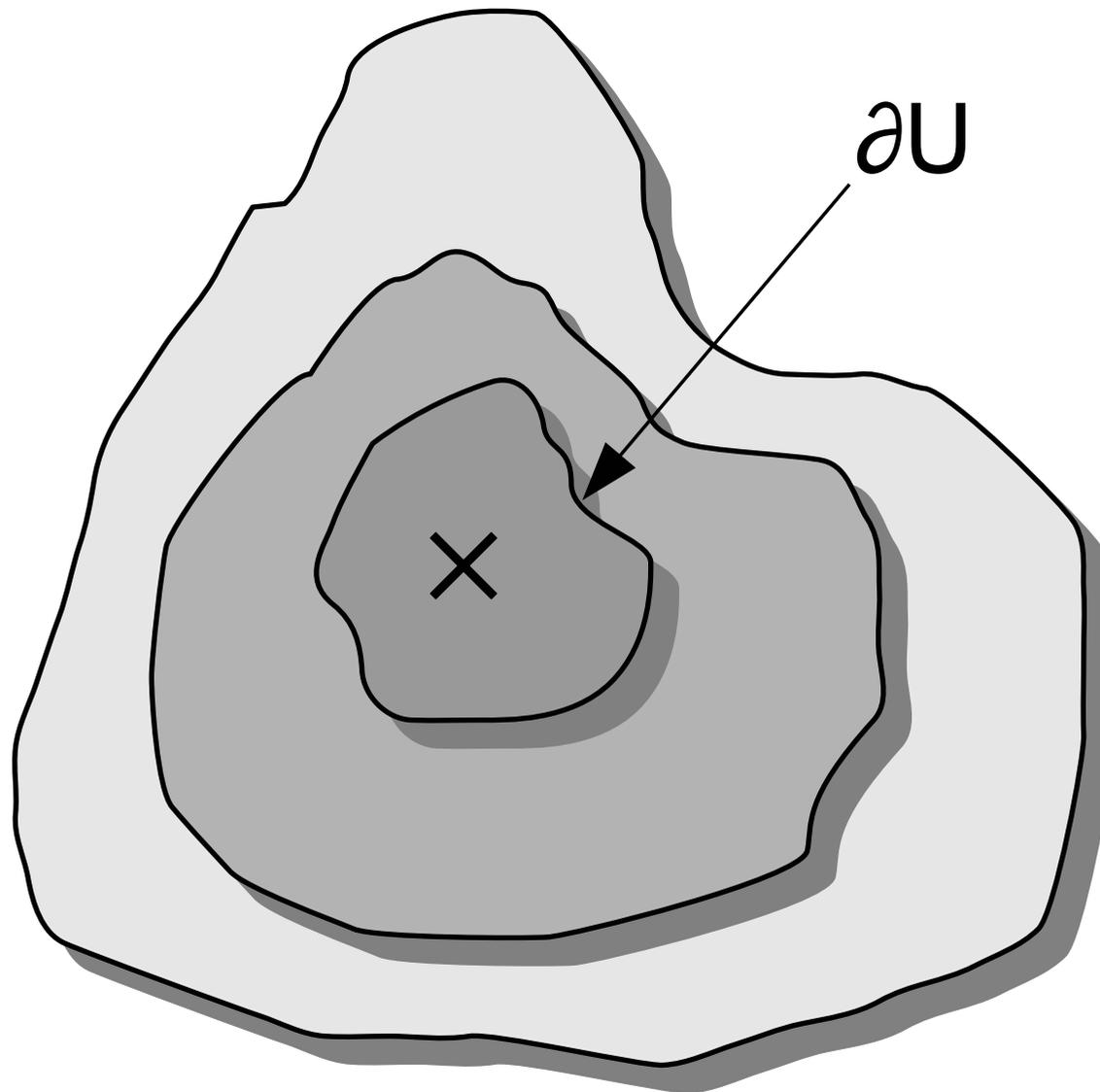
Beweis. Wir beweisen zunächst das folgende, hilfreiche Lemma.

Lemma. Sei in einem endlichen Gebiet V $\Delta \phi = 0$. Dann nimmt ϕ seine Extremwerte auf dem Rand ∂V an.

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass im Inneren keine lokalen Extrema existieren. Sei bei $\vec{r} \in V$ ein Extremalwert. Dann gibt es eine Umgebung U , so dass auf ∂U die Funktion ϕ konstant ist, d. h. $\phi = \phi_0$ auf ∂U . Green 1 in U für $\varphi = \psi = \phi - \phi_0$ ergibt

$$\begin{aligned} \int_{\partial U} (\phi - \phi_0) \operatorname{grad}(\phi - \phi_0) d\vec{f} &= \int_U \left[(\nabla(\phi - \phi_0))^2 + (\phi - \phi_0) \underbrace{\Delta(\phi - \phi_0)}_{=0} \right] dv \\ &\Rightarrow \int_U \underbrace{(\phi - \phi_0)}_{=0 \text{ auf } \partial U} \operatorname{grad} \phi d\vec{f} = \int_U (\nabla \phi)^2 dv \\ &\Rightarrow \nabla \phi = 0 \text{ in ganz } U \\ &\Rightarrow \phi \text{ konstant in } U \\ &\Rightarrow \text{Widerspruch zur angenommenen Existenz} \\ &\quad \text{eines Extremums im Inneren} \end{aligned}$$

□



Höhenlinien um ein Extremum im zweidimensionalen Fall

Nun wenden wir dieses Lemma auf ein immer größer werdendes endliches Gebiet mit $|\vec{r}| \rightarrow \infty$ für alle $\vec{r} \in \partial V$ an. Wenn $\phi(\vec{r}) \rightarrow 0$ für $|\vec{r}| \rightarrow \infty$, dann wird $|\phi|$ auf dem Rand beliebig klein. $|\phi|$ darf aber nicht größer als $|\phi|$ auf dem Rand sein. Also ist dort $\phi = 0$, d. h. insgesamt $\Delta \phi = 0$ und $\phi(\vec{r}) \rightarrow 0$ für $|\vec{r}| \rightarrow \infty$.

$$\Rightarrow \phi(\vec{r}) = 0$$

Seien ϕ_1, ϕ_2 zwei Lösungen. $\psi = \phi_1 - \phi_2$ erfüllt dann

$$\begin{aligned} \Delta \psi &= 0 \text{ und } \psi \rightarrow 0, \text{ für } |\vec{r}| \rightarrow \infty \\ \Rightarrow \psi &= 0 \Rightarrow \phi_1 = \phi_2 \end{aligned}$$

□

Feldlinien und Feldlinienbild

Feldlinie Kurve, die stets tangential zur Feldstärke läuft

Will man Feldstärken im Analogbild als Geschwindigkeitsvektoren einer (inkompressiblen) Flüssigkeitsströmung interpretieren, entspricht der Betrag der Geschwindigkeit mit dem die Feldlinie durchlaufen wird genau dem Betrag des Feldstärkevektors.

- Feldlinien (bzw. Feldstärken) stehen senkrecht auf der Äquipotentialfläche

$$\vec{E} = -\text{grad } \phi$$

Äquipotentialfläche Menge aller Punkte gleichen Potentials.

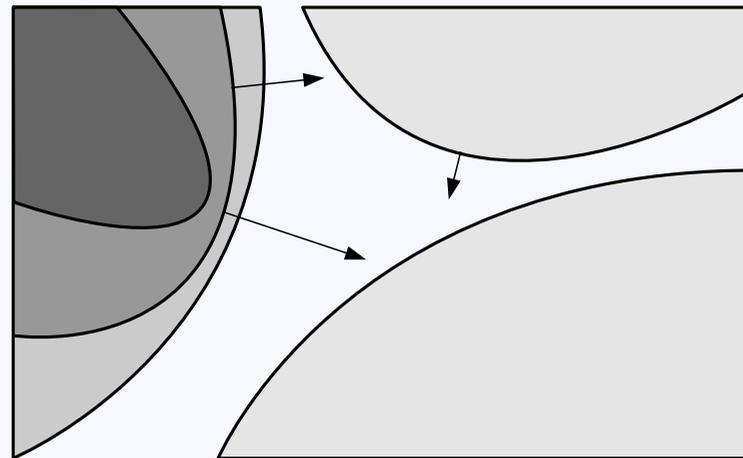
Sei $\vec{r}(t)$ eine Kurve in der Potentialfläche

$$\Rightarrow 0 = \frac{d\phi(\vec{r}(t))}{dt} = \sum_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \cdot \frac{dx_i}{dt}$$

d. h.

$$0 = \text{grad } \phi \frac{d\vec{r}}{dt}$$

- Der Betrag der Feldstärke ist also gleich dem Gefälle von ϕ entlang der Feldlinien.

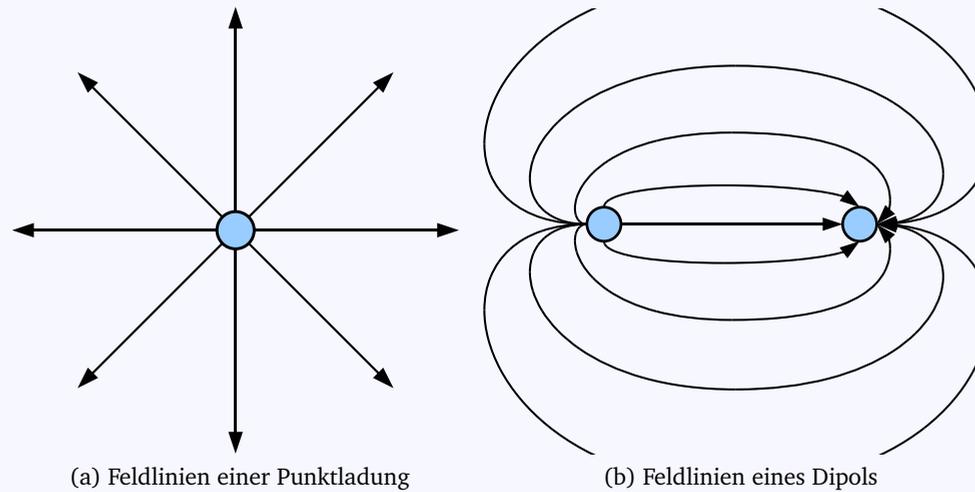


die Dichte der Äquipotentialkurven korreliert mit der Feldstärke

Visualisierung des Feldes im Feldlinienbild

- approximative Veranschaulichung mit endlich vielen Feldlinien (damit man sie einzeln zeichnen kann)
- Qualität wird besser, je mehr Feldlinien benutzt werden
- dabei Kodierung des Betrages der Feldstärke in die Anzahl der Feldlinien, die durch eine kleine Fläche senkrecht zur aktuellen Feldlinie gehen

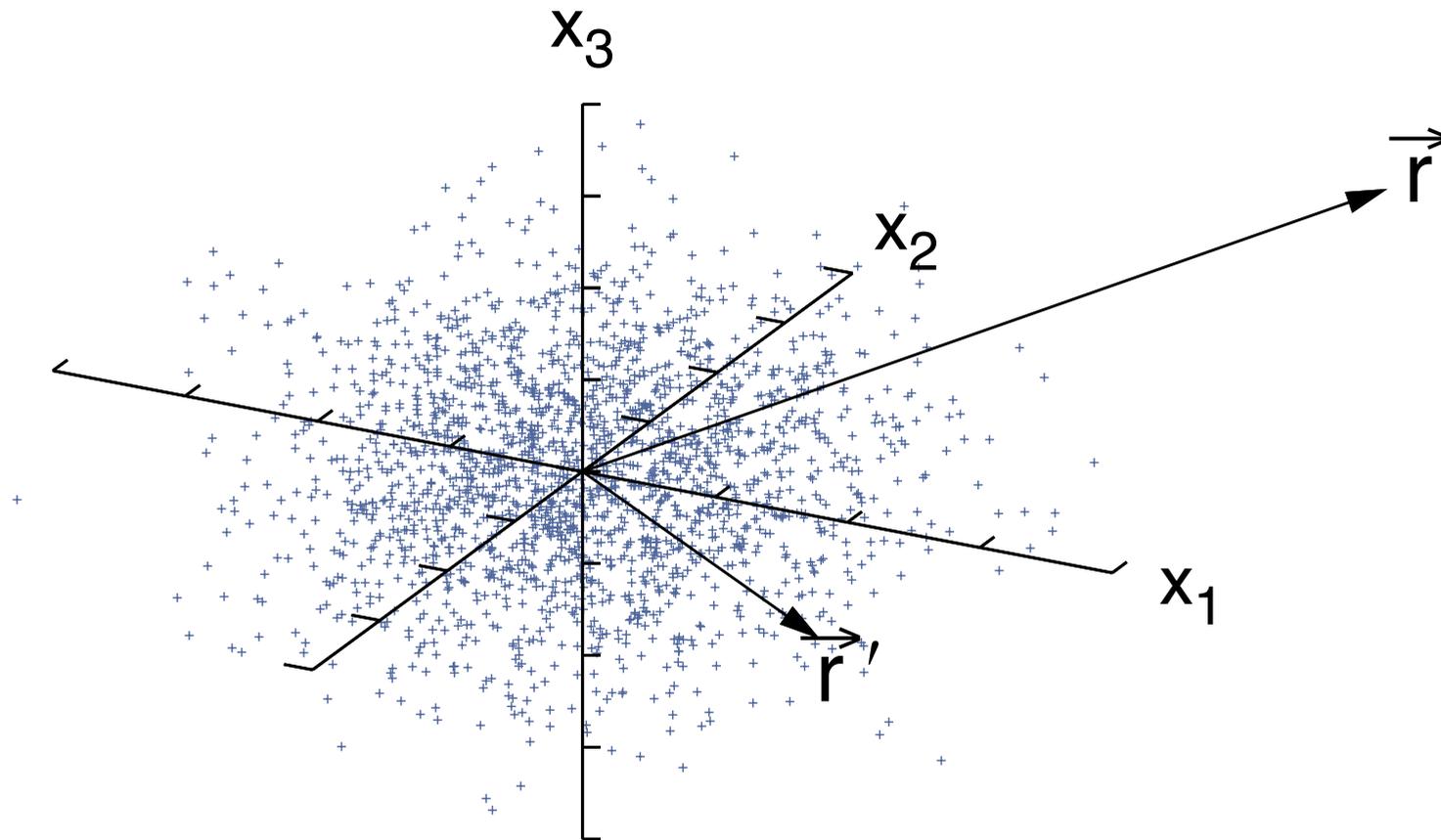
- Fluss der Feldstärke durch eine Fläche ist proportional zur Zahl der Feldlinien, die betreffende Fläche durchdringen
- Feldlinien können sich nicht schneiden (da die Feldstärke eindeutig ist)
- bei Feldern von Punktladungen: Feldlinien beginnen bzw. enden an Punkt positiver bzw. negativer Ladung (Quellen und Senken)



Beispiel: Potential/Feldstärke einer kugelsymmetrischen Ladungsverteilung

Da das Potential kugelsymmetrisch ist, gilt für die Ladungsdichte

$$\rho(\vec{r}') = \rho(r'), r' = |\vec{r}'|$$



näherungsweise kugelsymmetrische Ladungsverteilung

Trotzdem gilt für das Potential $\phi(\vec{r}) = \int_V \frac{\rho(r')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} d^3r'$, wenn auch nur von $r' = |\vec{r}'|$ abhängig. Die direkte Rechnung ist umständlich, besser ist die Argumentation über den Satz von Gauß (2.1.1). Wegen der Symmetrie des Problems ist auch ϕ nur vom Betrag von \vec{r} abhängig.

$$\begin{aligned}\phi &= \phi(r) \\ \Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) &= -\text{grad } \phi(r) \\ &= -\phi'(r) \cdot \text{grad } r \\ &= -\phi'(r) \cdot \frac{\vec{r}}{r}\end{aligned}$$

Also hat die elektrische Feldstärke die Form $\vec{E}(\vec{r}) = E(r) \cdot \frac{\vec{r}}{r}$, mit $E(r) = -\phi'(r)$

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \int_V \frac{\rho}{\epsilon_0} dv \stackrel{(2.1.1)}{=} \int_{\partial V} \vec{E} d\vec{f}$$

Wir wählen für V die Kugel mit dem Mittelpunkt im Ursprung und einem Radius r . Wir stellen fest, dass der Normalenvektor an ∂V in die gleiche Richtung zeigt wie der Radiusvektor.

$$\begin{aligned}\int_{\partial V} \vec{E} d\vec{f} &= \int_{\partial V} E(r) \cdot \underbrace{\frac{\vec{r}}{r} \cdot \frac{\vec{r}}{r}}_{=1} df \\ &= E(r) \int_{\partial V} 1 df \\ &= 4\pi r^2 E(r)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow E(r) &= \frac{1}{4\pi r^2} \cdot \int_{\partial V} \vec{E} d\vec{f} \\ &= \frac{1}{4\pi r^2} \cdot \int_V \frac{\varrho(\vec{r}')}{\epsilon_0} d^3 r' \\ &= \frac{1}{\epsilon_0 r^2} \cdot \int_0^r \varrho(r') r'^2 dr'\end{aligned}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{r}}{r} \cdot \frac{1}{\epsilon_0 r^2} \int_0^r \varrho(r') \cdot r'^2 dr'$$

Spezialfall: homogen geladene Kugel vom Radius R mit Gesamtladung Q

$$\varrho(r) = \begin{cases} \frac{Q}{4/3 \pi R^3} & \text{für } r \leq R \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Falls $r > R$:

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}) &= \frac{\vec{r}}{r} \cdot \frac{1}{\epsilon_0 r^2} \cdot \frac{Q}{4/3 \pi R^3} \cdot \underbrace{\int_0^R r'^2 dr'}_{\frac{1}{3} R^3} \\ &= \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \quad \left(E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right)\end{aligned}$$

Falls $r \leq R$:

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}) &= \frac{\vec{r}}{r} \cdot \frac{1}{\epsilon_0 r^2} \cdot \frac{Q}{4/3 \pi R^3} \cdot \underbrace{\int_0^r r'^2 dr'}_{\frac{1}{3} r^3} \\ &= \frac{\vec{r}}{R^3} \cdot \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \quad \left(E(r) = \frac{Q \cdot r}{4\pi\epsilon_0 R^3} \right)\end{aligned}$$

Bemerkungen

- Das Feld verhält sich außerhalb der Ladungswolke (auch bei beliebigem $\rho(\vec{r}')$) stets so, als wäre die Gesamtladung Q im Ursprung konzentriert.
- Im Inneren der Ladungswolke weicht die Feldstärke von der eines Punktladungsfeldes ab, insbesondere verschwindet die Divergenz für $r \rightarrow 0$.

3.2. Multipolentwicklung

Wie wir eben gesehen haben, erscheint das Feld außerhalb der kugelsymmetrischen Ladungswolke wie das einer Punktladung. Als nächstes untersuchen wir das allgemeine Verhalten beliebiger Ladungswolken in großen Abständen.

Sei $r := |\vec{r}|$, $r' := |\vec{r}'|$ und $\rho(\vec{r}') = 0$ für $r' > R$.

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_V \frac{\varrho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'$$

Dann ist für $r \gg R$ und $r' \leq R$ die **Taylorentwicklung** bei $\vec{r}' = \vec{0}$ eine gute Approximation.

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} &= \frac{1}{r} - x'_i \partial_i \frac{1}{r} + \frac{1}{2} x'_i x'_j \partial_i \partial_j \frac{1}{r} - \frac{1}{3!} x'_i x'_j x'_k \partial_i \partial_j \partial_k \frac{1}{r} + \dots \\ \partial_i \frac{1}{r} &= -\frac{x_i}{r^3} = -\frac{1}{r^2} \cdot \frac{x_i}{r} \\ \partial_i \partial_j \frac{1}{r} &= \frac{3x_i x_j - \delta_{ij} r^2}{r^5} = \frac{1}{r^3} \cdot \left(3 \cdot \frac{x_i x_j}{r^2} - \delta_{ij} \right) \\ \partial_i \partial_j \partial_k \frac{1}{r} &= \frac{3 \cdot (\delta_{ij} x_k + \delta_{ik} x_j + \delta_{kj} x_i) \cdot r^2 - 15 \cdot x_i x_j x_k}{r^7} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Sei m wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} m_{i_1 \dots i_l}^{(l)} &:= \int_V \varrho(\vec{r}') \cdot x'_{i_1} \cdot \dots \cdot x'_{i_l} d^3r' \\ m^{(0)} &:= Q = \int_V \varrho(\vec{r}') d^3r' \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{Q}{r} - m_i^{(1)} \partial_i \frac{1}{r} + \frac{1}{2} \cdot m_{ik}^{(2)} \partial_i \partial_k \frac{1}{r} + \sum_{l=3}^{\infty} (-1)^l \cdot \frac{1}{l!} \cdot m_{i_1 \dots i_l}^{(l)} \cdot \partial_{i_1} \dots \partial_{i_l} \frac{1}{r} \right)$$

Der Tensor $m_{ik}^{(2)}$ ist symmetrisch, woraus folgt, dass es nur 6 unabhängige Komponenten gibt. Er wird aber nur in der Konstruktion mit dem Tensor $\partial_i \partial_k \frac{1}{r}$ gebraucht. Dieser Tensor ist spurlos, weil seine Spur genau der Deltafunktion (2.4) $\Delta \frac{1}{r}$ entspricht.

Wegen der Spurlosigkeit von $\partial_i \partial_k \frac{1}{r}$ gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot m_{ik}^{(2)} \partial_i \partial_k \frac{1}{r} &= \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\left(m_{ik}^{(2)} - \frac{1}{3} \cdot \delta_{ik} m_{jj}^{(2)} \cdot \mathbb{I} \right)}_{\text{spurlos nach } *}} \partial_i \partial_k \frac{1}{r} \\ &= \frac{1}{6} \cdot \left(3 \cdot m_{ik}^{(2)} - \delta_{ik} m_{jj}^{(2)} \right) \partial_i \partial_k \frac{1}{r} \end{aligned}$$

Nebenrechnung(*)

Lemma. Es gilt für beliebige $(n \times n)$ -Matrizen A und B mit $\text{tr } B = 0$:

$$\text{tr}(A \cdot B) = \text{tr}\left(\underbrace{\left(A - \frac{1}{n} \cdot \text{tr } A \cdot \mathbb{I}\right)}_{=: \tilde{A}, \text{tr } \tilde{A}=0} \cdot B\right) = \text{tr}(\tilde{A} \cdot B)$$

Beweis. Die Spur einer $(n \times n)$ -Matrix A ist definiert als die Summe der Diagonalelemente.

$$\text{tr } A := \sum_{i=1}^n A_{ii}$$

Also gilt folgende Überlegung

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}\left(\left(A - \frac{1}{n} \cdot \operatorname{tr} A \cdot \mathbb{I}\right) \cdot B\right) &= \operatorname{tr}(A \cdot B - \frac{1}{n} \cdot \operatorname{tr}(A) \cdot B) \\
&= \operatorname{tr}(A \cdot B) - \underbrace{\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \cdot \operatorname{tr}(A) \cdot B_{ii}}_{\text{Zahl}} \\
&= \operatorname{tr}(A \cdot B) - \frac{1}{n} \cdot \operatorname{tr}(A) \cdot \sum_{i=1}^n B_{ii} \\
&= \operatorname{tr}(A \cdot B) - \frac{1}{n} \cdot \operatorname{tr}(A) \cdot \underbrace{\operatorname{tr}(B)}_{=0} \\
&= \operatorname{tr}(A \cdot B)
\end{aligned}$$

Betrachte die Spur von $\tilde{A} := A - \frac{1}{n} \operatorname{tr} A \cdot \mathbb{I}$:

$$\operatorname{tr} \tilde{A} = \operatorname{tr} A - \frac{1}{n} \cdot \operatorname{tr} A \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^n (\mathbb{I})}_{=n} = 0$$

□

$$Q := \int_V \varrho(\vec{r}') d^3 r'$$

Gesamtladung

$$\vec{m} := \int_V \varrho(\vec{r}') \vec{r}' d^3 r'$$

Dipolmoment

$$Q_{ik} := \int_V \varrho(\vec{r}') \left(3 x'_i x'_k - \delta_{ik} \vec{r}'^2 \right) d^3 r' \quad \text{Quadrupolmoment}$$

$$\vdots \quad \text{höhere Ordnungen}$$

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{Q}{r} - m_i \cdot \partial_i \frac{1}{r} + \frac{Q_{ik}}{6} \cdot \partial_i \partial_k \frac{1}{r} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^4}\right) \right) \\ &\stackrel{*}{=} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{Q}{r} + \frac{\vec{m}}{r^2} \cdot \vec{r} + \frac{Q_{ik}}{2r^3} \cdot \frac{x_i}{r} \cdot \frac{x_k}{r} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^4}\right) \right) \end{aligned}$$

Nebenrechnung(*)

Wir wissen, dass Q_{ik} spurlos ist, dass also $\text{tr } Q_{ik} = 0$.

$$\begin{aligned} \frac{Q_{ik}}{6} \cdot \partial_i \partial_k \frac{1}{r} &= \frac{Q_{ik}}{6} \cdot \left(\frac{3 \cdot x_i x_k}{r^5} - \frac{\delta_{ik}}{r^3} \right) \\ &= \frac{Q_{ik}}{2r^3} \cdot \frac{x_i x_k}{r^2} - \frac{Q_{ik}}{6} \cdot \frac{\delta_{ik}}{r^3} \\ &= \frac{Q_{ik}}{2r^3} \cdot \frac{x_i x_k}{r^2} - \underbrace{\text{tr } Q_{ik}}_{=0} \cdot \frac{1}{6r^3} \\ \Rightarrow \frac{Q_{ik}}{6} \cdot \partial_i \partial_k \frac{1}{r} &= \frac{Q_{ik}}{2r^3} \cdot \frac{x_i}{r} \cdot \frac{x_k}{r} \end{aligned}$$

Dafür haben wir die Spurlosigkeit von Q_{ik} ausgenutzt!

3.2.1. Unabhängige Komponenten bei Multipolmomenten

Wir stellen fest

- Q_{ij} ist symmetrisch und spurfrei \rightarrow 5 unabhängige Komponenten
- \vec{m} hat 3 unabhängige Komponenten

Im allgemeinen Fall für $l \geq 3$ gilt: da der Tensor $m_{i_1 \dots i_l}^{(l)}$ vollständig symmetrisch ist, also alle Permutationen von Indexanordnungen den gleichen Eintrag haben, ist die Anzahl der unabhängigen Komponenten kombinatorisch die Gleiche, als würde man l mal aus einem Topf mit drei verschiedenen **Kugeln ziehen** (mit zurücklegen). Die drei Kugeln repräsentieren in diesem Gedankenexperiment die drei Dimensionen, die jeder Index i_k annehmen kann. Es gibt demnach

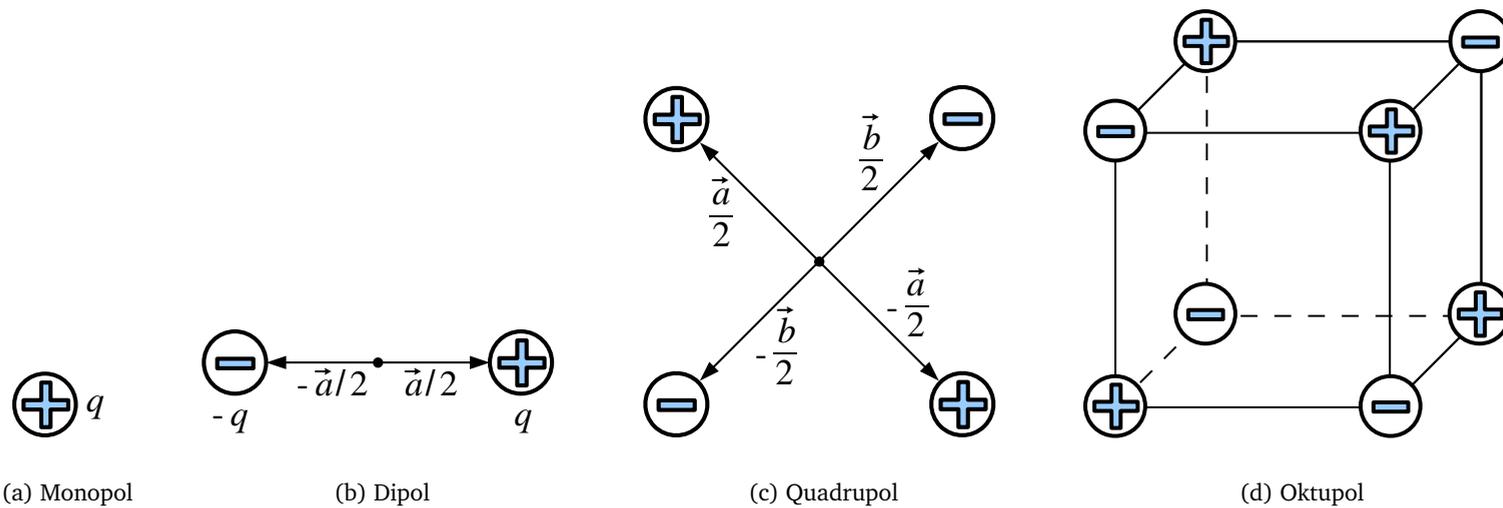
$$\binom{3+l-1}{l} = \binom{l+2}{l} = \frac{(l+2)!}{l! \cdot 2!} = \frac{(l+1) \cdot (l+2)}{2}$$

unabhängige Komponenten. Nur die spurlosen Anteile bezüglich jedes Indexpaares werden gebraucht, es fallen also so viele Komponenten weg, wie es Indexpaare gibt (jedes Paar erzeugt auch eine spurlose Hauptdiagonale). Bei $\binom{l}{2} = \frac{l \cdot (l-1)}{2}$ Indexpaaren werden also insgesamt

$$\frac{(l+1) \cdot (l+2)}{2} - \frac{l \cdot (l-1)}{2} = 2l + 1$$

unabhängige Komponenten benötigt.

Der Beitrag zum Potential $\phi(\vec{r})$ in der Ordnung $\frac{1}{r^{l+1}}$ wird durch $2l + 1$ unabhängige Komponenten des 2^l -Polmomentes beschrieben. Diese Zahlen charakterisieren die Ladungswolke.



Realisierung von Multipolen durch Punktladungen (und damit Erklärung des Wortes *Multipol*)

- Monopol

$$Q = q$$

- Dipol

$$\begin{aligned} \vec{m} &= \int_V \left(q \cdot \delta^{(3)}\left(\vec{r} - \frac{\vec{a}}{2}\right) - q \cdot \delta^{(3)}\left(\vec{r}' + \frac{\vec{a}}{2}\right) \right) \cdot \vec{r}' d^3 r' \\ &= q \cdot \vec{a} \end{aligned}$$

Für diese Anordnung zweier Punktladungen ist $Q = 0$, $Q_{ik} = 0$ aber das Oktupolmoment ungleich 0.

- Quadrupol

$$\vec{a} \perp \vec{b} \text{ und } |\vec{a}| = |\vec{b}|$$

$$\begin{aligned}
Q &= 0 \\
\vec{m} &= \int_V \left(q \cdot \delta^{(3)}(\vec{r}' - \frac{\vec{a}}{2}) + q \cdot \delta^{(3)}(\vec{r}' + \frac{\vec{a}}{2}) - q \cdot \delta^{(3)}(\vec{r}' - \frac{\vec{b}}{2}) - q \cdot \delta^{(3)}(\vec{r}' + \frac{\vec{b}}{2}) \right) \cdot \vec{r}' d^3r' \\
&= q \cdot \frac{\vec{a}}{2} - q \cdot \frac{\vec{a}}{2} - q \cdot \frac{\vec{b}}{2} + q \cdot \frac{\vec{b}}{2} \\
&= 0 \\
Q_{ik} &= \int_V \left(q \cdot \delta^{(3)}(\vec{r}' - \frac{\vec{a}}{2}) + q \cdot \delta^{(3)}(\vec{r}' + \frac{\vec{a}}{2}) - q \cdot \delta^{(3)}(\vec{r}' - \frac{\vec{b}}{2}) - q \cdot \delta^{(3)}(\vec{r}' + \frac{\vec{b}}{2}) \right) \cdot (3x'_i x'_k - \delta_{ik} r'^2) d^3r' \\
&= q \cdot \left(\left(3 \cdot \frac{a_i a_k}{4} - \delta_{ik} \frac{\vec{a}^2}{4} \right) \cdot 2 - \left(3 \cdot \frac{b_i b_k}{4} - \delta_{ik} \frac{\vec{b}^2}{4} \right) \cdot 2 \right) \\
&= \frac{q}{2} \cdot \left(3 \cdot (a_i a_k - b_i b_k) - \delta_{ik} (\vec{a}^2 - \vec{b}^2) \right)
\end{aligned}$$

Mit den Bedingungen $\vec{a} \perp \vec{b}$ und $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ ist das eine Parametrisierung durch 5 unabhängige Parameter (von \vec{a} und \vec{b} kommen vier, q ist der fünfte).

3.2.2. Multipolmomente und Kugelfunktion

$\phi(\vec{r})$ ist außerhalb der Ladungswolke eine Lösung der Laplacegleichung (3.1.4). Wir führen die Multipolentwicklung nun in Kugelkoordinaten durch. Da sich der Laplace-Operator auf kartesische Koordinaten bezieht, muss eine Transformation von kartesischen in Kugelkoordinaten erfolgen.

$$\begin{aligned}
x_1 &= r \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \varphi \\
x_2 &= r \cdot \sin \vartheta \cdot \sin \varphi \\
x_3 &= r \cdot \cos \vartheta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\partial_r &= \sin \vartheta \cdot \cos \varphi \partial_1 + \sin \vartheta \cdot \sin \varphi \partial_2 + \cos \vartheta \partial_3 \\ \partial_\vartheta &= r \cdot \cos \vartheta \cdot \cos \varphi \partial_1 + r \cdot \cos \vartheta \cdot \sin \varphi \partial_2 - r \cdot \sin \vartheta \partial_3 \\ \partial_\varphi &= -r \cdot \sin \vartheta \cdot \sin \varphi \partial_1 + r \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \varphi \partial_2\end{aligned}$$

Das heißt

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \partial_r \\ \partial_\vartheta \\ \partial_\varphi \end{pmatrix} &= \underbrace{\begin{pmatrix} \sin \vartheta \cdot \cos \varphi & \sin \vartheta \cdot \sin \varphi & \cos \vartheta \\ r \cdot \cos \vartheta \cdot \cos \varphi & r \cdot \cos \vartheta \cdot \sin \varphi & -r \cdot \sin \vartheta \\ -r \cdot \sin \vartheta \cdot \sin \varphi & r \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \varphi & 0 \end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix} &= A^{-1} \begin{pmatrix} \partial_r \\ \partial_\vartheta \\ \partial_\varphi \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \det(A) &= r^2 \cdot \sin \vartheta \\ \Rightarrow A^{-1} &= \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cdot \cos \varphi & \frac{1}{r} \cdot \cos \vartheta \cdot \cos \varphi & -\frac{1}{r} \cdot \frac{\sin \varphi}{\sin \vartheta} \\ \sin \vartheta \cdot \sin \varphi & \frac{1}{r} \cdot \cos \vartheta \cdot \sin \varphi & \frac{1}{r} \cdot \frac{\cos \varphi}{\sin \vartheta} \\ \cos \vartheta & -\frac{1}{r} \cdot \sin \vartheta & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Nebenrechnung (*)

Zur Erinnerung: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \forall \alpha$

Mit dem [Laplace'schen Entwicklungssatz](#) bekommt man:

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \cos \vartheta \cdot \det \begin{pmatrix} r \cdot \cos \vartheta \cdot \cos \varphi & r \cdot \cos \vartheta \cdot \sin \varphi \\ -r \cdot \sin \vartheta \cdot \sin \varphi & r \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \varphi \end{pmatrix} \\
&\quad + r \cdot \sin \vartheta \cdot \det \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cdot \cos \varphi & \sin \vartheta \cdot \sin \varphi \\ -r \cdot \sin \vartheta \cdot \sin \varphi & r \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \varphi \end{pmatrix} \\
&= \cos \vartheta \cdot (r^2 \cdot \cos \vartheta \cdot \sin \vartheta \cdot \underline{\cos^2 \varphi} + r^2 \cdot \cos \vartheta \cdot \sin \vartheta \cdot \underline{\sin^2 \varphi}) \\
&\quad + r \cdot \sin \vartheta \cdot (r \cdot \sin^2 \vartheta \cdot \underline{\cos^2 \varphi} + r \cdot \sin^2 \vartheta \cdot \underline{\sin^2 \varphi}) \\
&= r^2 \cdot \sin \vartheta \cdot \underline{\cos^2 \vartheta} + r^2 \cdot \sin \vartheta \cdot \underline{\sin^2 \vartheta} \\
&= r^2 \cdot \sin \vartheta
\end{aligned}$$

Mit dieser Determinante lässt sich nun die **inverse Matrix** von A berechnen.

$$\begin{aligned}
\text{adj}(A) &= \begin{pmatrix} \det \begin{pmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} & -\det \begin{pmatrix} A_{21} & A_{23} \\ A_{31} & A_{33} \end{pmatrix} & \det \begin{pmatrix} A_{21} & A_{22} \\ A_{31} & A_{32} \end{pmatrix} \\ -\det \begin{pmatrix} A_{12} & A_{13} \\ A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} & \det \begin{pmatrix} A_{11} & A_{13} \\ A_{31} & A_{33} \end{pmatrix} & -\det \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{31} & A_{32} \end{pmatrix} \\ \det \begin{pmatrix} A_{12} & A_{13} \\ A_{22} & A_{23} \end{pmatrix} & -\det \begin{pmatrix} A_{11} & A_{13} \\ A_{21} & A_{23} \end{pmatrix} & \det \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \end{pmatrix}^T \\
&= \begin{pmatrix} r^2 \cdot \sin^2 \vartheta \cdot \cos \varphi & r^2 \cdot \sin^2 \vartheta \cdot \sin \varphi & r^2 \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \vartheta \\ r \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \vartheta \cdot \cos \varphi & r \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \vartheta \cdot \sin \varphi & -r \cdot \sin^2 \vartheta \\ -r \cdot \sin \varphi & r \cdot \cos \varphi & 0 \end{pmatrix}^T
\end{aligned}$$

$$A^{-1} = \frac{\text{adj}(A)}{\det(A)}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cdot \cos \varphi & \sin \vartheta \cdot \sin \varphi & \cos \vartheta \\ \frac{1}{r} \cdot \cos \vartheta \cdot \cos \varphi & \frac{1}{r} \cdot \cos \vartheta \cdot \sin \varphi & -\frac{1}{r} \cdot \sin \vartheta \\ -\frac{1}{r} \cdot \frac{\sin \varphi}{\sin \vartheta} & \frac{1}{r} \cdot \frac{\cos \varphi}{\sin \vartheta} & 0 \end{pmatrix}^T$$

$$\begin{aligned}\Delta &= \sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \\ &= \left((\sin \vartheta \cdot \cos \varphi) \partial_r + \left(\frac{1}{r} \cdot \cos \vartheta \cdot \cos \varphi \right) \partial_\vartheta - \left(\frac{\sin \varphi}{r \cdot \sin \vartheta} \right) \partial_\varphi \right)^2 \\ &\quad + \left((\sin \vartheta \cdot \sin \varphi) \partial_r + \left(\frac{1}{r} \cdot \cos \vartheta \cdot \sin \varphi \right) \partial_\vartheta + \left(\frac{\cos \varphi}{r \cdot \sin \vartheta} \right) \partial_\varphi \right)^2 + \left((\cos \vartheta) \partial_r - \left(\frac{1}{r} \cdot \sin \vartheta \right) \partial_\vartheta \right)^2\end{aligned}$$

3.2.3. Laplace in Kugelkoordinaten

Nach Ausmultiplizieren und Zusammenfassen der Terme, erhält man die folgende Form:

$$\Delta = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2}{\partial r^2} r + \frac{1}{r^2} \cdot \left(\frac{1}{\sin \vartheta} \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta} \sin \vartheta \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right)$$

Wir betrachten den Fall $\Delta \phi = 0$. Um die partielle Differentialgleichung in Kugelkoordinaten für das Potentialfeld ϕ lösen zu können, versuchen wir das Problem auf die Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen zu reduzieren. Das gelingt mit einem sogenannten Separationsansatz, d. h. gesucht werden Lösungen der Form

$$\begin{aligned}\phi &= \underbrace{f(r)}_{\text{radial}} \cdot \underbrace{Y(\vartheta, \varphi)}_{\text{winkelabhängig}} \\ \Delta \phi &= 0 \\ \Leftrightarrow 0 &= Y(\vartheta, \varphi) \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \cdot f(r)) + \frac{f(r)}{r^2} \cdot \left(\frac{1}{\sin \vartheta} \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta} \sin \vartheta \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) Y(\vartheta, \varphi) \\ \Leftrightarrow \frac{r \cdot \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \cdot f(r))}{f(r)} &= - \frac{\left(\frac{1}{\sin \vartheta} \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta} \sin \vartheta \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) Y(\vartheta, \varphi)}{Y(\vartheta, \varphi)}\end{aligned}$$

Rechts steht eine Funktion, die nur von den Winkeln φ und ϑ abhängig ist, links eine Funktion des Radius r . Das ist konsistent nur möglich, wenn beide Seiten gleich ein und derselben Konstanten λ sind, also gar nicht von den Winkeln oder dem Radius abhängen. Um das zu sehen überlegt man sich, dass diese Gleichung für alle Winkel φ , ϑ und r gelten muss. Würde eine oder mehrere der Funktionen doch vom Argument abhängig sein, wäre die Gleichheit bei leichter Variation dieses Argumentes verletzt.

So ein λ könnten wir prinzipiell auch als $l \cdot (l + 1)$ darstellen, was zunächst noch unsinnig erscheint, sich aber im Verlaufe der Rechnung als nützlich erweist.

Radiale Komponente

$$\begin{aligned}
 l \cdot (l + 1) &= \frac{r \cdot \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \cdot f(r))}{f(r)} \\
 &= \frac{r \cdot \frac{\partial}{\partial r} (f(r) + r \cdot f'(r))}{f(r)} \\
 &= \frac{r \cdot (2 \cdot f'(r) + r \cdot f''(r))}{f(r)} \\
 \Rightarrow l \cdot (l + 1) \cdot f(r) &= r^2 \cdot f''(r) + 2r \cdot f'(r)
 \end{aligned}$$

Als Lösung findet man:

$$f(r) = A r^l + B r^{-l-1}$$

Winkelabhängige Komponente

$$\left(\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \cdot \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) Y(\vartheta, \varphi) = -l \cdot (l+1) \cdot Y(\vartheta, \varphi)$$

Es kann erneut separiert werden:

$$\begin{aligned} Y(\vartheta, \varphi) &= P(\vartheta) \cdot Q(\varphi) \\ \Rightarrow Q(\varphi) \cdot \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \cdot \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \cdot P(\vartheta) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \cdot P(\vartheta) \cdot Q''(\varphi) &= -l(l+1) \cdot Q \cdot P \\ \Rightarrow \sin^2 \vartheta \cdot \left(\frac{\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \cdot \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \cdot P(\vartheta) + l(l+1) \cdot P(\vartheta)}{P(\vartheta)} \right) &= -\frac{Q''(\varphi)}{Q(\varphi)} \end{aligned}$$

Parametrisieren der Separationskonstanten mittels m^2 :

$$\begin{aligned} Q''(\varphi) + m^2 Q(\varphi) &= 0 \\ \Rightarrow Q(\varphi) &= A \cdot e^{im\varphi} + B \cdot e^{-im\varphi} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \cdot \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \cdot P(\vartheta) + \left(l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \vartheta} \right) \cdot P(\vartheta) = 0$$

Mit $\cos \vartheta = z$, $\frac{d}{d\vartheta} = -\sin \vartheta \frac{d}{dz}$ und der Notierung $P(\varphi(z)) \rightarrow P(z)$ folgt die verallgemeinerte Legendre'sche Differentialgleichung.

3.2.4. Verallgemeinerte Legendre'sche Differentialgleichung

$$\left(\frac{d}{dz} (1 - z^2) \frac{d}{dz} + l(l + 1) - \frac{m^2}{1 - z^2} \right) P(z) = 0$$

Damit $Q(\varphi + 2\pi) = Q(\varphi)$ ist, muss m ganzzahlig sein.

Die Lösungen der Differentialgleichung hängen über

$$P_l^m(z) = (-1)^m \cdot (1 - z^2)^{\frac{|m|}{2}} \cdot \frac{d^{|m|}}{dz^{|m|}} P_l(z)$$

mit denen der Legendre-Gleichung zusammen.

Legendre-Gleichung

$$(1 - z^2) \cdot P_l''(z) - 2zP_l'(z) + l(l + 1) \cdot P_l(z) = 0$$

Nur für ganze $l \geq 0$ existieren im ganzen Intervall $z \in [-1, 1] \hat{=} \vartheta \in [0, \pi]$ reguläre Lösungen.

Legendre'sche Polynome

$$P_0(z) = 1, P_1(z) = z, P_2(z) = \frac{1}{2}(3z^2 - 1), \dots$$

und allgemein: $P_l(z) = \frac{1}{2^l \cdot l!} \cdot \frac{d^l (z^2 - 1)^l}{dz^l}$

3.2.5. Rodrigues Formel

$$\sum_{l=0}^{\infty} x^l \cdot P_l(z) = (1 - 2 \cdot xz + x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

Diese Formel müssen wir leider so akzeptieren, da die Herleitung zu kompliziert ist.

Bemerkung

Die Differentialgleichung hat für beliebiges l natürlich stets zwei linear unabhängige Lösungen. Die zweite Lösung ist aber bei ganzem $l \geq 0$ bei $z = \pm 1$ singular. Für ganze $l \geq 0$ ist dann auch $P_l^m(z)$ bis auf den Faktor $(1 - z^2)^{\frac{|m|}{2}}$ ein Polynom.

Die zulässigen Werte von m sind dann weiter offenbar

$$-l \leq m \leq l, m \text{ ganzzahlig}$$

Die Funktionen

$$Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{(2l+1) \cdot (l-|m|)!}{4\pi \cdot (l+|m|)!}} \cdot P_l^m(\cos \vartheta) \cdot e^{im\varphi}$$

heißen *Kugelflächenfunktionen*. Sie sind orthonormiert im Sinne von

$$\int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} Y_{lm}^*(\vartheta, \varphi) Y_{l'm'}(\vartheta, \varphi) d\varphi d \underbrace{z}_{\cos \vartheta} = \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

und bilden ein vollständiges Orthonormalsystem für Funktionen auf der Einheitskugel

$$h(\vartheta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l h_{lm} \cdot Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$$

mit

$$h_{lm} = \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} Y_{lm}^*(\vartheta, \varphi) \cdot h(\vartheta, \varphi) d\varphi d \cos \vartheta$$

Schließlich lässt sich die allgemeine Lösung der Laplacegleichung (3.1.4) darstellen als

$$\phi(\vec{x}) = \sum_{l=0}^{\infty} (A r^l + B r^{-l-1}) \sum_{m=-l}^l C_{lm} \cdot Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$$

Multipolentwicklung mittels Kugelfunktion

$$\begin{aligned}\phi(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' \\ \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} &= \frac{1}{r} \cdot \left(1 - \frac{2r'}{r} \cdot \cos\gamma + \frac{r'^2}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \\ \gamma &= \angle(\vec{r}, \vec{r}') \\ &\stackrel{(3.2.5)}{=} \frac{1}{r} \cdot \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^l P_l(\cos\gamma)\end{aligned}$$

Mithilfe eines Additionstheorems für Kugelfunktionen

$$P_l(\cos\gamma) = \frac{4\pi}{2l+1} \cdot \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\vartheta', \varphi') \cdot Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$$

erhalten wir

$$\Rightarrow \phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{r^{l+1}} \cdot \int_V (r')^l \cdot \rho(\vec{r}') \cdot \frac{4\pi}{2l+1} \cdot Y_{lm}^*(\vartheta', \varphi') \cdot Y_{lm}(\vartheta, \varphi) d^3r'$$

3.2.6. Multipolmomente der Ladungsverteilung

$$q_{lm} := \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \cdot \int_V (r')^l \varrho(\vec{r}') \cdot Y_{lm}^*(\vartheta', \varphi') d^3r'$$

Dann folgt

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{r^{l+1}} \cdot \sum_{m=-l}^l \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} q_{lm} \cdot Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$$

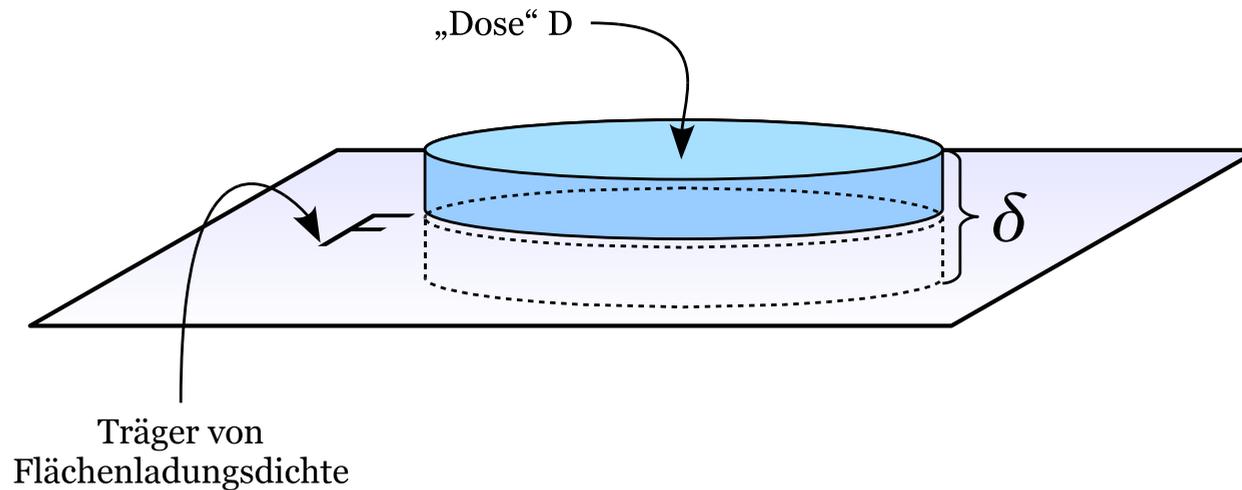
Zu festen l gibt es $2l + 1$ Momente. Auf die gleiche Anzahl waren wir auch bei der Abzählung unabhängiger Komponenten von Q_{ik} auf Seite 49 gekommen. Gegenüber der vorher behandelten Multipolentwicklung in kartesischen Koordinaten hat diese Darstellung den Vorteil der expliziten Kontrolle der Winkelabhängigkeit. Dazu kommt, dass wir an dieser Stelle die Entwicklung in allen Ordnungen erhalten haben.

3.3. Elektrostatik bei Anwesenheit von Leitern

Leiter sind Materialien mit frei beweglichen Ladungsträgern. Im statischen Falle muss deshalb innerhalb von Leitern $\vec{E} = \vec{0}$ sein, denn anderenfalls würden sich die frei beweglichen Ladungen noch verschieben. Da außerhalb $\vec{E} \neq \vec{0}$ sein kann, sind Leiteroberflächen zwangsweise Unstetigkeitsflächen des Vektorfeldes \vec{E} . Außerdem sitzen Ladungen gezwungenermaßen auf der Leiteroberfläche.

3.3.1. Effekt flächenhaft verteilter Ladungen

Sei σ die Flächenladungsdichte (Ladung/Fläche)



Wie wir festgestellt hatten (3.1.3), gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0}, \operatorname{rot} \vec{E} = \vec{0} \Rightarrow \int_{\partial D} \vec{E} d\vec{f} = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \text{Gesamtladung in } V \\ &\Rightarrow \int_{\gamma} \vec{E} d\vec{r} = 0 \end{aligned}$$

Zunächst wird das erste Integral auf eine „Dose“ der Höhe δ wie in der Abbildung ausgewertet. Dann gilt ($\vec{E}_{(\pm)}$ Grenzwerte oben/unten)

$$\begin{aligned} \int_{D \cap F} (\vec{E}_{(+)} - \vec{E}_{(-)}) d\vec{f} &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\partial D} \vec{E} d\vec{f} \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \int_{D \cap F} \sigma d\vec{f} \end{aligned}$$

Nach Ausführung dieses Grenzprozesses lassen wir die Grundfläche der Dose gegen Null gehen.

$$\Rightarrow (\vec{E}_{(+)} - \vec{E}_{(-)}) \cdot \vec{n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

\vec{n} Einheitsnormalenvektor an Fläche F

Das heißt die Normalkomponente von \vec{E} macht einen Sprung, der gleich der Flächenladungsdichte ist. Nun wird das zweite Integral ausgewertet.

$$\Rightarrow (\vec{E}_{(+)} - \vec{E}_{(-)}) \cdot \vec{t} = 0, \forall \vec{t} \text{ tangential zu } F$$

Das heißt die Tangentialkomponente von \vec{E} ist an der geladenen Fläche stetig.

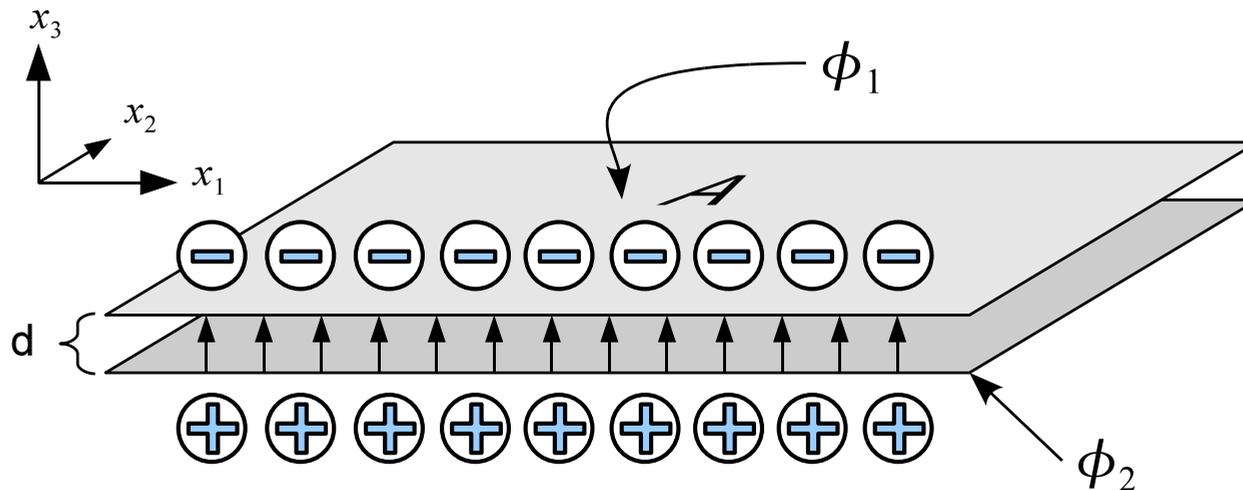
Bemerkungen

Diese Stetigkeitsaussagen gelten auch für den Fall, dass bis an die Fläche heran noch Ladungen mit der Volumendichte ρ verteilt sind!

Da das Feld im Inneren eines Leiters verschwindet ($\vec{E} = \vec{0}$), folgt

- die Feldstärke \vec{E} steht senkrecht auf den Leiteroberflächen und
- Leiteroberflächen sind Äquipotentialflächen.

Potentiale auf Leiteroberflächen und Ladungen können nicht völlig unabhängig vorgegeben werden. Das sieht man am einfachsten am idealen *Plattenkondensator*.



zwei Leiteroberflächen mit Flächeninhalt A

Die Randeffekte sind vernachlässigbar, wenn die Fläche A gegen ∞ geht und alles auf die Flächeneinheit bezogen wird. Für das Potential zwischen den Leitern ist $\Delta \phi = 0$. Wegen der Symmetrie des Problems ist ϕ nur von x_3 abhängig.

$$\begin{aligned}\frac{d^2 \phi}{dx_3^2} = 0 &\Rightarrow \phi \text{ hängt linear von } x_3 \text{ ab} \\ &\Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = E \vec{e}_3, E \text{ konstant} \\ &\Rightarrow E = -\frac{\phi_1 - \phi_2}{d}\end{aligned}$$

Andererseits ist $Q_1 = \sigma_1 \cdot A$, $Q_2 = \sigma_2 \cdot A$, $E = \sigma_2 / \epsilon_0$, $-E = \sigma_1 / \epsilon_0$

$$\Rightarrow -Q_1 = +Q_2 = Q, \quad \frac{Q}{\epsilon_0 A} = (\phi_2 - \phi_1) / d$$

$$Q = C \cdot (\phi_2 - \phi_1)$$

$C = \frac{\epsilon_0 A}{d}$ ist die Kapazität des Plattenkondensators

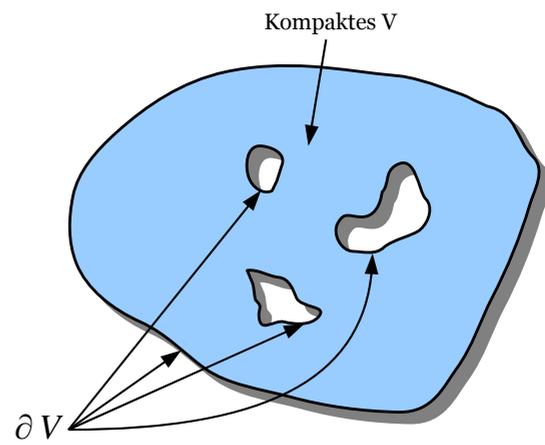
Wir wollen nun die allgemeine Situation mit mehreren beliebig geformten Leiteroberflächen diskutieren. Die Ränder von V seien Leiteroberflächen. Diese sind dann Äquipotentialflächen. Dann gilt: Bei Vorgabe des Potentials auf den Leiteroberflächen und der Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$ innerhalb von V , ist die Lösung der Poissongleichung $\Delta \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$ eindeutig fixiert. Das führt zum sogenannten *Dirichlet'schen Randwertproblem*.

Dirichlet'sches Randwertproblem Liegt vor, wenn die Lösung einer partiellen Differentialgleichung in einem Gebiet V durch die Vorgabe von Werten für die gesuchte Funktion auf dem Rand ∂V eindeutig bestimmt werden kann.

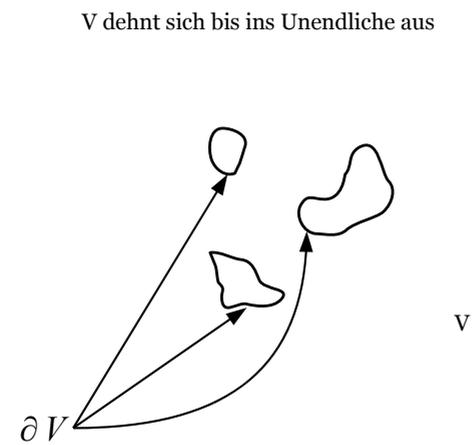
Nachweis der Eindeutigkeit der Lösung

Beweis. Seien ϕ_1, ϕ_2 zwei Lösungen und bezeichne ϕ die Differenz.

$$\Rightarrow \Delta \phi = 0 \text{ in } V \text{ und } \phi = 0 \text{ auf } \partial V$$



(a) Endliche Ausdehnung

(b) Unendliche Ausdehnung mit der Zusatzforderung $\phi \rightarrow 0$ für $|\vec{r}| \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned}
\stackrel{(2.2.1)}{\Rightarrow} \int_V \left((\text{grad } \phi)^2 + \phi \Delta \phi \right) d^3r &= \int_{\partial V} \phi \cdot \text{grad } \phi d\vec{f} \\
\Rightarrow \int_V (\text{grad } \phi)^2 d^3r &= 0 \\
\Rightarrow \phi &= 0 \quad \square
\end{aligned}$$

$\phi = 0$ folgt auch, wenn auf dem Rand $\text{grad } \phi \cdot \vec{n} = 0$ ist.

Bei Vorgabe der Normalableitung von ϕ auf dem Rand und einer Ladungsverteilung $\varrho(\vec{r})$ innerhalb von V ist die Lösung der Poissongleichung (3.1.4) $\Delta \phi = -\frac{\varrho}{\epsilon_0}$ ebenfalls eindeutig fixiert. Die Suche nach der Lösung bezeichnet man in diesem Falle als *Neumann'sches Randwertproblem*.

Neumann'sches Randwertproblem Liegt vor, wenn die Lösung einer partiellen Differentialgleichung in einem Gebiet V durch die Vorgabe von Werten für die Normalableitung der gesuchten Funktion auf dem Rand ∂V eindeutig bestimmt werden kann.

Bemerkungen

Bei kompaktem V kann $\vec{n} \cdot \text{grad } \phi$ nicht völlig beliebig vorgegeben werden. Der von $\varrho(\vec{r})$ erzeugte Fluss muss sich mit dem Fluss von ∂V aus ins Innere von V zu 0 kompensieren.

Da $\vec{E}_n = -\text{grad } \phi \cdot \vec{n}$ direkt an die Oberflächenladung von Leitern gekoppelt ist, bedeutet bei Anwendung auf von Leitern begrenzte Gebiete

- die Dirichlet-Randbedingung die Vorgabe der Potentiale der einzelnen Leiter sowie
- die Neumann-Randbedingung die Vorgabe der Ladungen der einzelnen Leiter.

Wir wollen zumindest für den Dirichlet-Fall die Existenz der Lösung nachweisen.

Eindeutigkeit

Beweis. Dazu nehmen wir zunächst die Existenz einer Funktion $G(\vec{r}, \vec{r}')$ an (Green'sche Funktion), mit

$$\Delta_{\vec{r}'} G(\vec{r}, \vec{r}') = -\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}') \text{ und } G(\vec{r}, \vec{r}') = 0 \text{ f\u00fcr } \vec{r}' \in \partial V$$

$$\Rightarrow \phi(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \int_V G(\vec{r}, \vec{r}') \cdot \varrho(\vec{r}') d^3 r' - \int_{\partial V} \varphi(\vec{r}') \cdot \text{grad}_{\vec{r}'} G(\vec{r}, \vec{r}') d\vec{f}'$$

Das ist eine L\u00f6sung von $\Delta \phi = -\frac{\varrho(\vec{r})}{\epsilon_0}$, $\phi(\vec{r}) = \varphi(\vec{r})$ f\u00fcr $\vec{r} \in \partial V$, wie wir jetzt zeigen wollen. Mit Green 2 (2.2.2)

$$\int_V (\varphi \cdot \Delta \psi - \psi \cdot \Delta \varphi) d^3 r = \int_{\partial V} (\varphi \cdot \text{grad } \psi - \psi \cdot \text{grad } \varphi) d\vec{f}$$

mit

$$\varphi = \phi(\vec{r}'), \quad \psi = G(\vec{r}, \vec{r}')$$

folgt:

$$\begin{aligned} \int_V \left(\phi(\vec{r}') \cdot \underbrace{\Delta G(\vec{r}, \vec{r}')}_{-\delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}')} - G(\vec{r}, \vec{r}') \cdot \underbrace{\Delta \phi(\vec{r}')}_{-\frac{\varrho(\vec{r}')}{\epsilon_0}} \right) d^3 r' &= \int_{\partial V} \left(\phi(\vec{r}') \cdot \text{grad}' G(\vec{r}, \vec{r}') - \underbrace{G(\vec{r}, \vec{r}')}_{=0} \cdot \text{grad}' \phi(\vec{r}') \right) d\vec{f}' \\ &\Rightarrow -\phi(\vec{r}) + \frac{1}{\epsilon_0} \int_V G(\vec{r}, \vec{r}') \cdot \varrho(\vec{r}') d^3 r' = \int_{\partial V} \phi(\vec{r}') \cdot \text{grad}' G(\vec{r}, \vec{r}') d\vec{f}' \end{aligned}$$

Existenz

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + F$$

erfüllt unsere Forderungen an G , falls gilt

$$\Delta_{\vec{r}'} F = 0$$

und

$$F(\vec{r}, \vec{r}') = -\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \text{ für } \vec{r}' \in \partial V$$

Da das Dirichletproblem für die Laplacegleichung (3.1.4) eindeutig lösbar ist, folgt die Existenz von G . Die explizite Konstruktion gestaltet sich im allgemeinen Fall allerdings schwierig. Entscheidend ist aber, dass G existiert und ausschließlich durch die Geometrie des Problems bestimmt ist!

Symmetrie

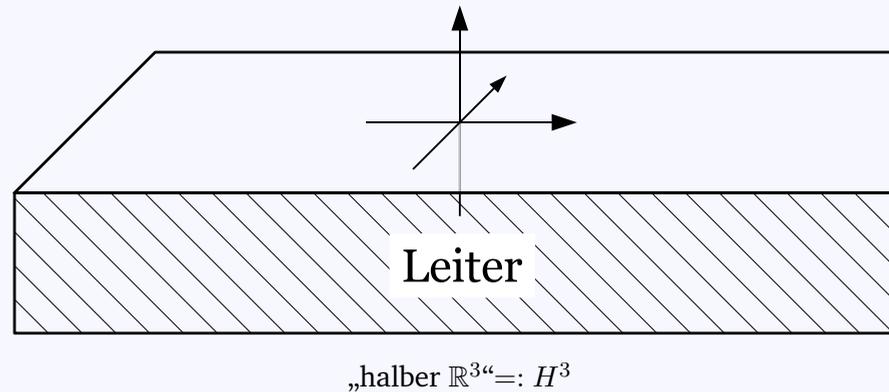
Wir wollen nun zeigen, dass die Green'sche Funktion symmetrisch ist. Dazu verwenden wir Green 2 (2.2.2) mit $\varphi(\vec{r}) = G(\vec{r}', \vec{r})$ und $\psi(\vec{r}) = G(\vec{r}'', \vec{r})$.

$$\begin{aligned} & \int_{\partial V} (\underbrace{G(\vec{r}', \vec{r})}_{=0 \text{ auf } \partial V} \cdot \text{grad}_{\vec{r}} G(\vec{r}'', \vec{r}) - \underbrace{G(\vec{r}'', \vec{r})}_{=0 \text{ auf } \partial V} \cdot \text{grad}_{\vec{r}} G(\vec{r}', \vec{r})) d\vec{f} \\ &= \int_V (G(\vec{r}', \vec{r}) \cdot \underbrace{\Delta_{\vec{r}} G(\vec{r}'', \vec{r})}_{=\delta^{(3)}(\vec{r}'' - \vec{r})} - G(\vec{r}'', \vec{r}) \cdot \underbrace{\Delta_{\vec{r}} G(\vec{r}', \vec{r})}_{=\delta^{(3)}(\vec{r}' - \vec{r})}) d^3r \\ &= G(\vec{r}', \vec{r}'') - G(\vec{r}'', \vec{r}') = 0 \end{aligned}$$

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = G(\vec{r}', \vec{r})$$

□

Spiegelladungsmethode im leitenden Halbraum



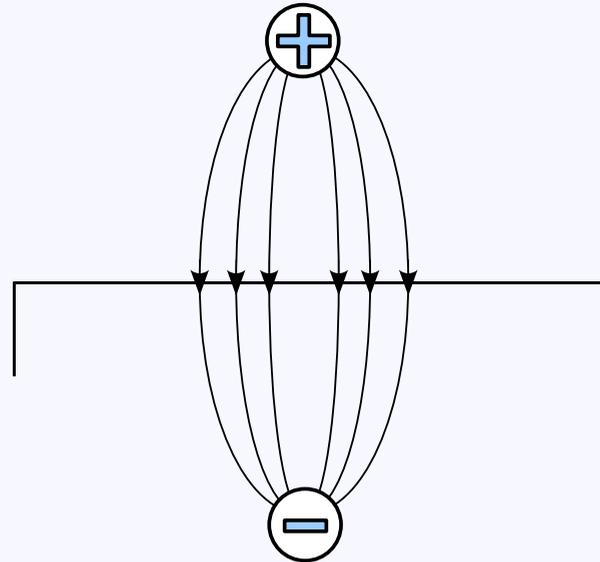
Green'sche Funktion im \mathbb{R}^3

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Gesucht

$$G_{H^3}(\vec{r}, \vec{r}') \text{ mit } \Delta G = -\delta(\vec{r} - \vec{r}'), \vec{r}, \vec{r}' \in H^3 \\ \text{und } G(\vec{r}, \vec{r}') = 0 \text{ f\"ur } \vec{r}' \in \partial H^3$$

Wie wir bereits wissen, ist G_{H^3} eindeutig bestimmt.



Induzierte Spiegelladung

Der Blick auf die Situation mit der Spiegelladung offenbart

$$G_{H^3}(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi} \cdot \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'_s|} \right)$$

$$\text{mit } \vec{r}' = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}'_s = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -x_3 \end{pmatrix}$$

Nun wird die bisherige Diskussion auf den folgenden Fall angewandt (allgemeine Kondensatorsituation):

$$\partial V = \bigcup_i \partial V_i, \quad \partial V_i \cap \partial V_j = \emptyset \quad \forall i, j : i \neq j, \quad \rho = 0 \text{ in } V$$

Intuitiv ist die allgemeine Kondensatorsituation also eine Menge von disjunkten Leiterstücken, die die ganze Ladung halten.

$$\phi(\vec{x}) = \phi_i \text{ für } \vec{x} \in \partial V_i, \text{ d. h. } \phi_i \text{ ist das Potential des } i\text{-ten Leiters}$$

Auf dem i -ten Leiter ist dann die Ladung

$$Q_i = \int_{\partial V_i} \sigma d\vec{f} = -\epsilon_0 \int_{\partial V_i} \vec{E} d\vec{f} = \epsilon_0 \int_{\partial V_i} \text{grad } \phi d\vec{f}$$

$$d\vec{f} = \vec{n} df, \quad \vec{n} \text{ zeigt in den Leiter hinein! (aus } V \text{ heraus)}$$

Q_i und ϕ_i sind aber nicht unabhängig, denn

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r}) \stackrel{(\rho=0)}{=} - \int_{\partial V} \phi(\vec{r}') \cdot \text{grad}_{\vec{r}'} G(\vec{r}, \vec{r}') d\vec{f}' \\ \Rightarrow Q_i = -\epsilon_0 \int_{\partial V_i} \int_{\partial V} \text{grad grad}' G(\vec{r}, \vec{r}') \cdot \phi(\vec{r}') d\vec{f}' d\vec{f} \end{aligned}$$

Unter Benutzung von $\int_{\partial V} = \sum_j \int_{\partial V_j}$ entsteht

$$Q_i = \sum_j C_{ij} \cdot \phi_j$$

$$C_{ij} := -\epsilon_0 \int_{\partial V_i} \int_{\partial V_j} \text{grad} \text{grad}' G(\vec{r}, \vec{r}') d\vec{f}' d\vec{f}$$

und wegen der Symmetrie-Eigenschaft der Green'schen Funktion

$$C_{ij} = C_{ji}$$

C_{ij} Kapazitätskoeffizienten (rein geometrisch)

3.4. Energie des elektrostatischen Feldes

Gegeben sind N Punktladungen. Gesucht wird die Arbeit, die nötig ist, um die Punktladungen aus dem Unendlichen an ihre Positionen $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N$ zu bringen.

Ladung q_1 : keine Arbeit $W_1 = 0$

Ladung q_2 : $W_2 = q_2 \cdot \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 \cdot |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}$

Ladung q_3 : $W_3 = q_3 \cdot \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 \cdot |\vec{r}_3 - \vec{r}_1|} + q_3 \cdot \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 \cdot |\vec{r}_3 - \vec{r}_2|}$

⋮

$$\Rightarrow W = \sum_{i=1}^N W_i = \sum_{i>j} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 \cdot |\vec{r}_i - \vec{r}_j|} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 \cdot |\vec{r}_i - \vec{r}_j|}$$

Übertragen auf eine kontinuierliche Ladungsverteilung kommen wir zu

$$W = \frac{1}{2} \cdot \int_V \frac{\varrho(\vec{r}) \cdot \varrho(\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0 \cdot |\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r d^3r'$$

Diese Arbeit bezeichnet man auch als elektrostatische Energie der Ladungsverteilung. Man kann W durch das zugehörige elektrische Feld beschreiben:

$$\begin{aligned} \int_V \frac{\varrho(\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0 \cdot |\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' &= \phi(\vec{r}) \Rightarrow W = \frac{1}{2} \cdot \int_V \varrho(\vec{r}) \cdot \phi(\vec{r}) d^3r \\ \varrho(\vec{r}) &= -\epsilon_0 \Delta \phi \Rightarrow W = -\frac{\epsilon_0}{2} \cdot \int_V \Delta \phi \cdot \phi d^3r \\ \Rightarrow W &= -\frac{\epsilon_0}{2} \cdot \int_V \nabla(\phi \nabla \phi) d^3r + \frac{\epsilon_0}{2} \cdot \int_V \nabla \phi \cdot \nabla \phi d^3r \end{aligned}$$

Das erste Integral wandeln wir über den Satz von Gauß (2.1.1) in ein Oberflächenintegral über eine beliebig große Kugel um. Der Beitrag geht im Grenzwert dann gegen Null.

$$\nabla \phi = -\vec{E} \Rightarrow$$

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \cdot \int_V \vec{E}^2 d^3r$$

Hier knüpft nun eine (in der reinen Elektrostatik nicht zwangsläufige) *Uminterpretation* an: die Energie des elektrostatischen Feldes ist auch dort, wo gar keine Ladungen sind.

Die Energiedichte des elektrostatischen Feldes ist

$$\frac{\epsilon_0}{2} \vec{E}^2$$

4. Magnetostatik

Die Beschreibung der Wechselwirkung von Permanentmagneten lässt sich völlig analog zur Elektrostatik gestalten, wenn man als zusätzliche Bedingung hinzunimmt:

⚡ magnetische Monopole

Magnetische Felder von Permanentmagneten werden von Dipolen hervorgerufen. Die Messung der Richtung des Feldes lässt sich mit kleinen Dipolen (Magnetnadeln) durchführen. Die Stärke des Feldes kann man beispielsweise über das auf die Magnetnadeln wirkende Drehmoment ermitteln.

An diesem Punkt der Diskussion ist es noch nicht offensichtlich, dass Elektro- und Magnetostatik etwas miteinander zu tun haben, allerdings geht aus Experimenten hervor, dass bewegte elektrische Ladungen (Ströme) Magnetfelder erzeugen.

4.1. Stationäre Ströme und Biot-Savart'sches Gesetz

Wir beginnen mit der allgemeinen Bilanzierung einer kontinuierlich verteilten physikalischen Größe, die weder erzeugt noch vernichtet werden kann, hier am Beispiel der elektrischen Ladung.

Sei $\rho(\vec{r}, t)$ die im Allgemeinen zeitabhängige Ladungsdichte und $\vec{j}(\vec{v}, t)$ die zugehörige elektrische Stromdichte (Ladung/Fläche · Zeit).

Betrachten wir nun ein kompaktes Gebiet V . Dann ist $Q_V = \int_V \rho d^3r$ die Ladung im Gebiet V . Diese kann sich nur dann zeitlich ändern, wenn sie durch den Rand fließt.

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \int_V \rho d^3r = - \int_{\partial V} \vec{j} d\vec{f} \stackrel{(2.1.1)}{=} - \int_V \operatorname{div} \vec{j} d^3r$$

Weil das auch für beliebig kleine Gebiete gilt, folgt die Kontinuitätsgleichung.

4.1.1. Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho(\vec{r}, t)}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j}(\vec{r}, t) = 0$$

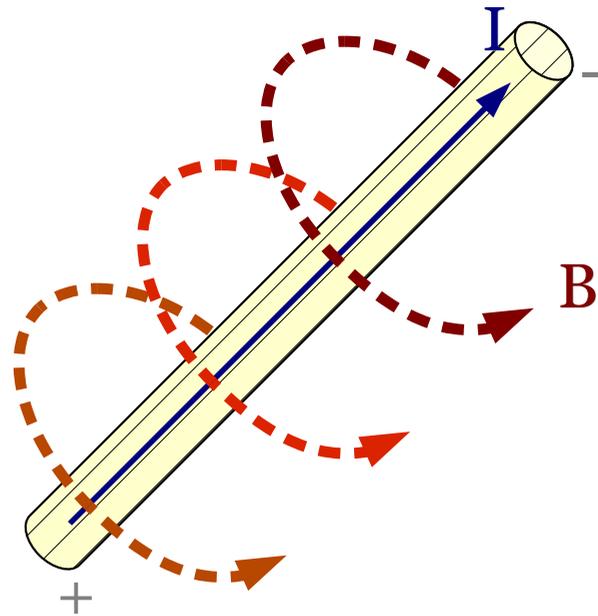
Falls ρ und \vec{j} zeitunabhängig sein sollen, muss außerdem noch $\operatorname{div} \vec{j} = 0$ gelten. Das ist die Voraussetzung für die Magnetostatik.

Experimentelle Befunde

- Ein stromdurchflossener Leiter erzeugt ein Magnetfeld.
- Die Kraftwirkung des Magnetfeldes auf den stromdurchflossenen Leiter ist sowohl senkrecht zum Magnetfeld, als auch zur Stromrichtung.

4.1.2. Biot-Savart-Gesetz

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3r'$$



Magnetfeld um einen stromdurchflossenen Leiter

\vec{B} ist die magnetische Induktion

Kraftwirkung auf bewegte Ladungen bzw. Ladungsströme

Betrachte eine Punktladung mit Ladung q und Geschwindigkeit \vec{v} .

4.1.3. Lorentzkraft

$$\vec{K} = q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$$

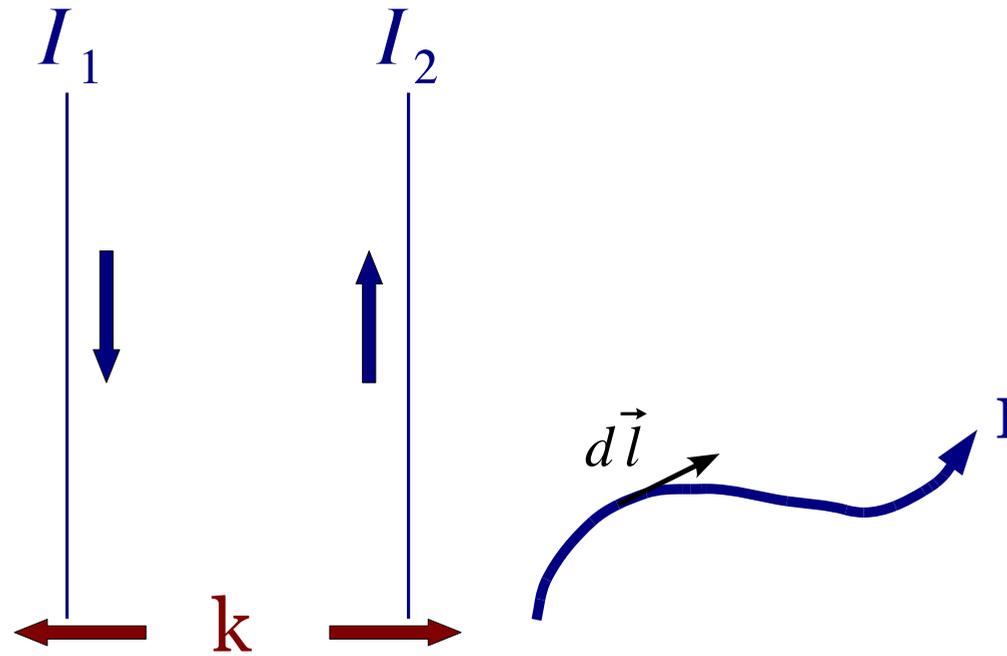
Für die Kraft, die auf ein eindimensionales Leiterstück wirkt, das von Strom I durchflossen wird, ergibt sich:

$$d\vec{k} = I d\vec{l} \times \vec{B}$$

Bemerkung zu den Maßeinheiten

Im Prinzip könnte man für die magnetische Polstärke (mgn. Dipolmoment/Länge) eine neue, unabhängige Größe einführen, wie bei der Ladung geschehen, man benutzt aber stattdessen eine Anbindung an die elektrische Ladung, d. h. im Ausdruck für die Lorentzkraft verzichtet man auf ein unabhängiges γ mit $\vec{K} = \gamma \cdot q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$ und setzt $\gamma = 1$. Damit folgt für \vec{B}

$$[B] = \frac{\text{kg m}}{\text{s}^2} \cdot \left(\text{As} \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^{-1} = \frac{\text{kg}}{\text{As}^2} =: 1 \text{ T} = 10^4 \text{ Gau\ss}$$



(a) Zwei parallele Leiter; $|d\vec{k}| = 2 \cdot \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 I_2}{k} dz$ mit $d\vec{l} = \vec{e}_3 dz$

(b) Gebogener Draht

Man geht sogar noch weiter und nimmt die Kraftgleichung und das Biot-Savart-Gesetz (4.1.2), um die Kraft zwischen zwei parallelen Leitern darzustellen und nutzt dies zur Definition von *Ampère*.

Ampère Ein Ampère ist die Stärke eines zeitlich unveränderlichen elektrischen Stromes, der durch zwei im Vakuum parallel im Abstand 1 Meter voneinander angeordnete, geradlinige, unendlich lange Leiter von vernachlässigbar kleinem, kreisförmigem Querschnitt fließend, zwischen diesen Leitern pro Meter Leiterlänge die Kraft $2 \cdot 10^{-7}$ N hervorrufen würde.

Im Gegensatz zu ϵ_0 , welches nach der Definition von Ampère und mit Ampèresekunden, der Einheit der Ladung, experimentell bestimmt werden muss, folgt der Wert von μ_0 durch die Bindung an die elektrische Ladung jetzt direkt. Damit ist μ_0 dann folgendermaßen definiert

$$\mu_0 := 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{kg m}}{\text{A}^2 \text{s}^2}$$

Genauso wie hinter dem Gesetz von Coulomb auf Seite 31 die differentielle Form $\text{div } \vec{E} = 1/\epsilon_0 \cdot \varrho(\vec{r})$ als Grundgesetz steht, erwarten wir auch hier eine differentielle Formulierung der Magnetostatik. Aufgrund der Nichtexistenz von magnetischen Monopolen gilt $\text{div } \vec{B} = 0$. Aus der allgemeinen Diskussion über Vektoranalysis wissen wir, dass ein Vektorfeld durch Quellen und Wirbel eindeutig bestimmt ist, deshalb betrachten wir nun die Rotation von \vec{B} , wie sie aus dem Biot-Savart-Gesetz von Seite 77 folgt.

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{B}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \int_V \nabla_{\vec{r}} \times \left(\frac{\vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right) d^3r' \\ &\stackrel{(1.2.1)}{=} \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \int_V \left(\vec{j}(\vec{r}') \cdot \left(\nabla_{\vec{r}} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right) - (\vec{j}(\vec{r}') \cdot \nabla_{\vec{r}}) \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right) d^3r' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \int_V \vec{j}(\vec{r}') \cdot \left(\nabla_{\vec{r}} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right) d^3r' - \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \int_V (\vec{j}(\vec{r}') \cdot \nabla_{\vec{r}}) \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3r' \end{aligned}$$

Wir erinnern uns an die Herleitung der Deltafunktion von Seite 19

$$\begin{aligned}
 \nabla \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} &= -\nabla \nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -\Delta \frac{1}{r - r'} = 4\pi \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}') \\
 \Rightarrow \text{rot } \vec{B}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \int_V \vec{j}(\vec{r}') \cdot \left(4\pi \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}') \right) d^3 r' - \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \int_V (\vec{j}(\vec{r}') \cdot \nabla_{\vec{r}}) \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3 r \\
 &= \mu_0 \cdot \int_V \vec{j}(\vec{r}') \cdot \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}') d^3 r' - \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \int_V \left(\vec{j}(\vec{r}') \cdot \underbrace{\nabla_{\vec{r}}}_{=-\nabla_{\vec{r}'}} \right) \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3 r \\
 &= \mu_0 \cdot \vec{j}(\vec{r}) + \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \int_V \underbrace{(\vec{j}(\vec{r}') \cdot \nabla_{\vec{r}'})}_{=j_k(\vec{r}') \frac{\partial}{\partial x'_k} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3 r \\
 &\Rightarrow j_k(\vec{r}') \frac{\partial}{\partial x'_k} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \frac{\partial}{\partial x'_k} \left(j_k(\vec{r}') \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right) - \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \cdot \text{div } \vec{j}(\vec{r}')
 \end{aligned}$$

Da \vec{j} erhalten bleibt und stationär ist, ist $\text{div } \vec{j} = 0$. Wir verwenden nun den Satz von Gauß (2.1.1) und $\vec{j} = \vec{0}$ im Unendlichen

$$\int_V \left(\frac{\partial}{\partial x'_k} \left(j_k(\vec{r}') \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right) - \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \cdot \text{div } \vec{j}(\vec{r}') \right) d^3 r' = 0$$

also

4.1.4. Ampère'sches Gesetz

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

bzw. via Stokes (2.1.2)

$$\int_{\partial F} \vec{B} d\vec{r} = \mu_0 \cdot \int_F \vec{j} d\vec{f}$$

Vergleich der Grundgleichungen Elektrostatik/Magnetostatik

Magnetostatik	Elektrostatik
$\operatorname{div} \vec{B} = 0$	$\operatorname{rot} \vec{E} = 0$
$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$	$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$

Vektorpotential

Wir erinnern uns an die Dekomposition des Vektorfeldes in Divergenz und Rotation von Seite 26.

Da

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{B} = 0 &\Rightarrow \exists \vec{A} : \vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A} \\ \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} &\Rightarrow \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = \mu_0 \vec{j} \\ &\Rightarrow \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} \stackrel{(1.2.1)}{=} \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{A}) - \Delta \vec{A} \end{aligned}$$

\vec{A} Vektorpotential

Da $\text{rot grad } \varphi = 0$ ist, ist \vec{A} nicht eindeutig bestimmt. Die Transformation $\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \text{grad } \varphi$ heißt *Eichtransformation*.

Eichtransformation Eine Transformation, in der eine frei wählbare Funktion als Transformationsparameter auftritt. Ist diese Funktion von den gewählten Koordinaten unabhängig, spricht man von einer globalen, andernfalls von einer lokalen Eichtransformation.

Sei $\text{div } \vec{A} \neq 0$. Wir stellen nun an die Eichtransformierte $\vec{A}' = \vec{A} + \text{grad } \varphi$ die Forderung $0 = \text{div } \vec{A}' = \text{div } \vec{A} + \Delta \varphi$. Aufgrund der Lösbarkeit der Poissongleichung (3.1.4) kann φ stets so eingerichtet werden, dass $\text{div } \vec{A}' = 0$.

In diesem Sinne erfülle nun \vec{A} die Eichbedingung $\text{div } \vec{A} = 0$. Dann folgt

$$-\Delta \vec{A} = \mu_0 \vec{j} \Rightarrow$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r'$$

$\text{rot } \vec{A} = \vec{B}$ liefert natürlich wieder das Biot-Savart-Gesetz (4.1.2).
Explizites Nachrechnen zeigt, dass in der Tat $\text{div } \vec{A} = 0$ ist.

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \vec{A} &= \nabla_{\vec{r}} \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' \right) \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \int_V \vec{j}(\vec{r}') \cdot \underbrace{\nabla_{\vec{r}} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}}_{\nabla_{\vec{r}'} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}} d^3r' \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \int_V \nabla_{\vec{r}'} \left(\vec{j}(\vec{r}') \cdot \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) - \underbrace{\operatorname{div} \vec{j}(\vec{r}')}_{=0} \cdot \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \int_V \nabla_{\vec{r}'} \left(\vec{j}(\vec{r}') \cdot \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) d^3r' \\
&\stackrel{(2.1.1)}{=} \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \underbrace{\int_{\partial V} \vec{j}(\vec{r}') \cdot \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{f}'}_{=0} \\
&= 0
\end{aligned}$$

4.2. Feld lokalisierter Stromverteilungen

In der Formulierung mithilfe des Vektorpotentials sieht die Magnetostatik von stationären Strömen der Elektrostatik sehr ähnlich. Es ist deshalb sehr leicht ein Analogon zur elektrostatischen Multipolentwicklung zu finden. Wir betrachten hier nur die Taylorentwicklung bei $\vec{r}' = \vec{0}$ bis zum Dipolmoment. ($r = |\vec{r}'|$)

$$\begin{aligned}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} &= \frac{1}{r} - x_i' \partial_i \frac{1}{r} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^3}\right) \\ \partial_i \frac{1}{r} &= -\frac{x_i}{r^3} \\ \Rightarrow A_k(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \left(\frac{1}{r} \cdot \int_V j_k(\vec{r}') d^3r' + \frac{1}{r^3} \cdot \int_V j_k(\vec{r}') x_i' x_i d^3r' + \dots \right)\end{aligned}$$

Nun gilt

$$\begin{aligned}\int j_i(\vec{r}) d^3r &\stackrel{*}{=} 0 \\ \int x_k j_i(\vec{r}) d^3r &\stackrel{*}{=} - \int x_i j_k(\vec{r}) d^3r \\ \Rightarrow A_k(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{1}{r^3} \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\int_V (j_k(\vec{r}') \cdot x_i' - j_i x_k') \cdot x_i d^3r'}_{= \frac{1}{2r^3} \cdot \int [(\vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}')) \times \vec{r}]_k d^3r'} + \dots\end{aligned}$$

Nebenrechnung(*)

Voraussetzung: $\text{div } \vec{j} = 0$ und $\vec{j} \rightarrow \vec{0}$ für große r

$$\Rightarrow \partial_i (x_k j_i) = \underbrace{\frac{\partial x_k}{\partial x_i}}_{=j_k} j_i + x_k \partial_i j_i = j_k \text{ wegen } \text{div } \vec{j} = 0$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \forall f(\vec{r}) : \int_V f(\vec{r}) \cdot j_k(\vec{r}) d^3r &= \int_V f(\vec{r}) \cdot \partial_i (x_k j_i) d^3r \\
&= \int_V \partial_i (f(\vec{r}) \cdot x_k j_i) d^3r - \int_V (\partial_i f(\vec{r})) \cdot x_k j_i d^3r \\
&\stackrel{(2.1.1)}{=} \underbrace{\int_V f(\vec{r}) \cdot x_k j_i d^3r}_{\rightarrow 0 \text{ wegen } \vec{j} \rightarrow \vec{0}} - \int_V (\partial_i f(\vec{r})) \cdot x_k j_i d^3r \\
\Rightarrow \int_V f(\vec{r}) \cdot j_k(\vec{r}) d^3r &= - \int_V (\partial_i f(\vec{r})) \cdot x_k j_i d^3r
\end{aligned}$$

Wähle nun $f(\vec{r}) = 1$:

$$\Rightarrow \int_V j_k(\vec{r}) d^3r = 0$$

und für $f(\vec{r}) = x_i$:

$$\Rightarrow - \int_V x_k j_i d^3r = \int_V x_i j_k d^3r$$

4.2.1. Magnetisches Dipolmoment

Durch

$$\vec{m}_{\text{mgn}} := \frac{1}{2} \cdot \int_V \vec{r} \times \vec{j}(\vec{r}) d^3r$$

folgt

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{1}{r^3} \cdot \vec{m}_{\text{mgn}} \times \vec{r} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^3}\right)$$

Schließlich folgt daraus

$$\vec{B}(\vec{r}) = \text{rot } \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \left(\frac{3\vec{r} \cdot (\vec{m}_{\text{mgn}} \cdot \vec{r})}{r^5} - \frac{\vec{m}_{\text{mgn}}}{r^3} \right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^4}\right)$$

Bemerkung

Im elektrischen Falle folgt aus

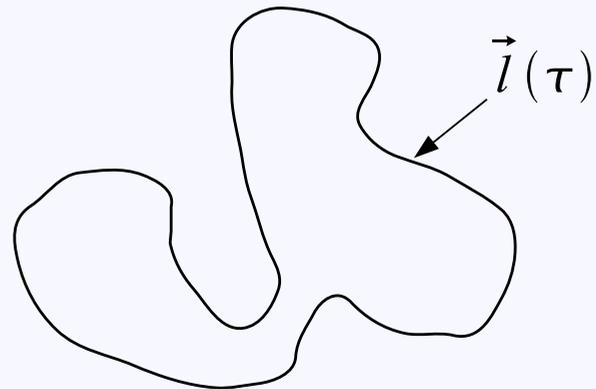
$$\begin{aligned}\phi &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^3} \cdot (\vec{m} \cdot \vec{r}) \\ E &= -\text{grad } \phi \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{3\vec{r} \cdot (\vec{m} \cdot \vec{r})}{r^5} - \frac{\vec{m}}{r^3} \right)\end{aligned}$$

Damit ist auf der Ebene der Dipole eine völlige Analogie gezeigt worden, wenn man davon absieht, dass elektrische Dipole durch Ladungen und magnetische durch Ströme erzeugt werden.

Magnetfeld eines stromdurchflossenen Kreises

Vorbetrachtung

Zunächst leiten wir das Biot-Savart-Gesetz (4.1.2) für den Fall her, dass der Strom durch einen eindimensionalen Draht fließt.



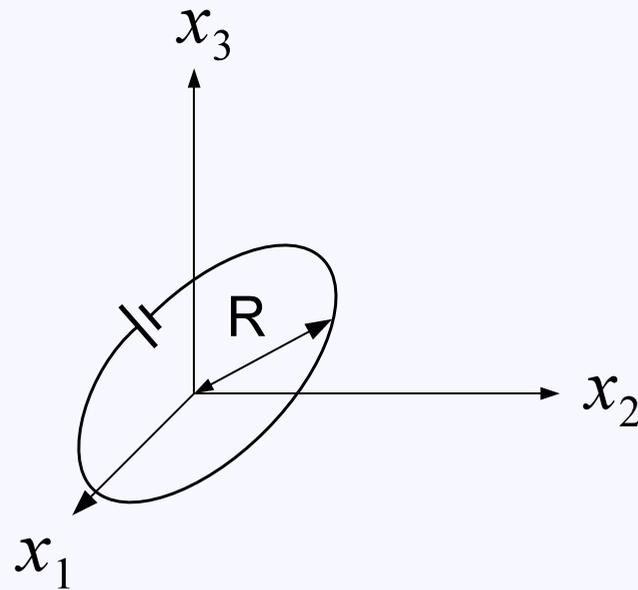
Ringintegral \oint_C Wegintegral über eine geschlossene Kurve C .

$$\vec{j}(\vec{r}) = I \oint \frac{d\vec{l}(\tau)}{d\tau} \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{l}(\tau)) d\tau$$

$$\Rightarrow \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \oint \int_V \frac{I \frac{d\vec{l}}{d\tau} \times (\vec{r} - \vec{r}') \cdot \delta^{(3)}(\vec{r}' - \vec{l}(\tau))}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3r' d\tau$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \cdot \oint \frac{d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{l}(\tau))}{|\vec{r} - \vec{l}(\tau)|^3} d\tau$$

Jetzt betrachten wir den spezielleren Fall eines kreisförmigen Drahtes.



$$\vec{l}(\tau) = \begin{pmatrix} R \cdot \cos \tau \\ R \cdot \sin \tau \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{d\vec{l}}{d\tau} = \begin{pmatrix} -R \cdot \sin \tau \\ R \cdot \cos \tau \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{d\vec{l}}{d\tau} \times (\vec{r} - \vec{l}) = \begin{pmatrix} -R \cdot \sin \tau \\ R \cdot \cos \tau \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 - R \cdot \cos \tau \\ x_2 - R \cdot \sin \tau \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_3 \cdot R \cdot \cos \tau \\ x_3 \cdot R \cdot \sin \tau \\ R^2 - R \cdot (x_1 \cos \tau + x_2 \sin \tau) \end{pmatrix}$$

Mit

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} \varrho \cdot \cos \varphi \\ \varrho \cdot \sin \varphi \\ x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 \cos \tau + x_2 \sin \tau = \varrho \cdot \cos(\tau - \varphi)$$

gilt weiter

$$\begin{aligned} |\vec{r} - \vec{l}| &= \sqrt{(x_1 - R \cdot \cos \tau)^2 + (x_2 - R \cdot \sin \tau)^2 + x_3^2} \\ &= \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + R^2 - 2R \cdot (x_1 \cdot \sin \tau + x_2 \cdot \cos \tau)} \\ &= \sqrt{|\vec{r}|^2 + R^2 - 2R \cdot \varrho \cdot \cos(\tau - \varphi)} \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} B_1(\vec{r}) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{x_3 \cdot R \cdot \cos \tau}{\left(|\vec{r}|^2 + R^2 - 2R \cdot \varrho \cdot \cos(\tau - \varphi)\right)^{\frac{3}{2}}} d\tau \\ B_2(\vec{r}) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{x_3 \cdot R \cdot \sin \tau}{\left(|\vec{r}|^2 + R^2 - 2R \cdot \varrho \cdot \cos(\tau - \varphi)\right)^{\frac{3}{2}}} d\tau \\ B_3(\vec{r}) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - R \cdot \varrho \cdot \cos(\tau - \varphi)}{\left(|\vec{r}|^2 + R^2 - 2R \cdot \varrho \cdot \cos(\tau - \varphi)\right)^{\frac{3}{2}}} d\tau \end{aligned}$$

Die Integrale liefern elliptische Funktionen. Uns interessiert nun das Verhalten bei großen Abständen $|\vec{r}| \gg R$. Wir benutzen dabei unsere Kenntnisse über magnetische Dipolmomente von Seite 87.

$$\begin{aligned}
\vec{m}_{\text{mgn}} &= \frac{1}{2} \cdot \oint_V \vec{r} \times \frac{d\vec{l}}{d\tau} \cdot I \cdot \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{l}(\tau)) d^3r d\tau \\
&= \frac{I}{2} \cdot \oint \vec{l}(\tau) \times \frac{d\vec{l}}{d\tau} d\tau \\
&= \frac{I}{2} \cdot \oint \underbrace{\begin{pmatrix} R \cdot \cos \tau \\ R \cdot \sin \tau \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -R \cdot \sin \tau \\ R \cdot \cos \tau \\ 0 \end{pmatrix}}_{= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ R^2 \end{pmatrix}} d\tau \\
&= \frac{I}{2} \cdot R^2 \cdot \vec{e}_3 \cdot \underbrace{\oint}_{2\pi} d\tau
\end{aligned}$$

Für den Kreisstrom ergibt sich

$$\vec{m}_{\text{mgn}} = I\pi \cdot R^2 \cdot \vec{e}_3$$

5. Zeitabhängige Felder

5.1. Maxwellgleichungen

5.1.1. Faraday'sches Induktionsgesetz

$$\int_{\partial F} \vec{E} d\vec{r} = -\frac{d}{dt} \cdot \int_F \vec{B} d\vec{f}$$

Zeitlich veränderliche Magnetflüsse erzeugen eine elektrische Ringspannung. Prinzipiell ließe sich eine Proportionalitätskonstante festlegen, allerdings ist dieser Effekt für zeitlich unveränderliche aber ortsabhängige Felder bereits durch die Lorentzkraft auf Seite 79 erklärbar. Dort hatten wir bereits die Konstante 1 gewählt.

$$\int_F \operatorname{rot} \vec{E} d\vec{f} + \frac{d}{dt} \int_F \vec{B} d\vec{f} = 0, F \text{ beliebig} \Rightarrow$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t} = 0$$

In der Statik galt außerdem

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

Wegen $\operatorname{div} \operatorname{rot} \equiv 0$ muss das für zeitabhängige Stromdichten modifiziert werden, denn es gilt auch $\operatorname{div} \vec{j} = -\frac{\partial \varrho}{\partial t}$ nach der Kontinuitätsgleichung (4.1.1). Maxwells Lösungsansatz ist

$$\varrho = \epsilon_0 \operatorname{div} \vec{E} \Rightarrow \operatorname{div} \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = 0$$

Es liegt nun nahe im zeitabhängigen Fall in $\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ den Strom \vec{j} durch $\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0$ zu ersetzen. Die resultierende Gleichung ist dann mathematisch konsistent und bestätigt sich auch im Experiment. Man nennt $\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ manchmal Maxwell'schen Verschiebungsstrom.

Damit ist dann

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

5.1.2. Maxwell'sche Gleichungen

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= 1/\epsilon_0 \cdot \varrho & \operatorname{div} \vec{B} &= 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0 & \operatorname{rot} \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \mu_0 \vec{j} \end{aligned}$$

mit der Abkürzung $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \cdot \epsilon_0}}$

Die vier Maxwell'schen Gleichungen bestimmen das elektrische und magnetische Feld bei vorgegebenen ϱ und \vec{j} . Das elektromagnetische Feld wirkt seinerseits auf die Ladungen und Ströme. Für die Kraft auf eine bewegte Punktladung gilt allgemein

$$\vec{K} = \underbrace{q \vec{E}(\vec{r}(t), t)}_{\text{elektrische Kraft}} + q \underbrace{\frac{d\vec{r}(t)}{dt} \times \vec{B}(\vec{r}(t), t)}_{\text{Lorentzkraft}}$$

Im Allgemeinen ist also ein gekoppeltes System von Differentialgleichungen zu lösen, das sowohl die Felder als auch die Positionen der felderzeugenden Ladungen festlegt.

5.2. Potentiale und Eichtransformation

Aus der Elektrostatik wissen wir

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}) &= -\text{grad } \phi(\vec{r}) \\ \vec{B}(\vec{r}) &= \text{rot } \vec{A}(\vec{r})\end{aligned}$$

Mit Blick auf die Maxwellgleichungen und wegen $\text{rot grad} \equiv 0$ sowie $\text{div rot} \equiv 0$ folgt

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \text{rot } \vec{A}(\vec{r}, t)$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \text{rot } \vec{E} + \text{rot } \frac{\partial \vec{A}(\vec{r}, t)}{\partial t} &= 0 \\ \Rightarrow \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}(\vec{r}, t)}{\partial t} &= -\text{grad } \phi(\vec{r}, t)\end{aligned}$$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\text{grad } \phi(\vec{r}, t) - \frac{\partial \vec{A}(\vec{r}, t)}{\partial t}$$

Die Potentiale sind auch hier wieder nicht eindeutig fixiert.

Eichtheorie Die Bewegungsgleichungen einer physikalischen Theorie folgen aus einer Wirkung, die invariant unter Eichtransformation ist.

Die Elektrodynamik ist eine Eichtheorie, deren Potentialfunktionen ϕ und \vec{A} man um die partiellen Ableitungen einer beliebig wählbaren Funktion Λ abändern kann, ohne die physikalische Aussage über die Feldstärken zu verändern.

$$\begin{aligned}\phi &\rightarrow \phi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \\ \vec{A} &\rightarrow \vec{A} + \text{grad } \Lambda(\vec{r}, t)\end{aligned}$$

Die Potentiale werden nun in die Maxwellgleichung eingesetzt:

$$\begin{aligned}\text{div} \left(-\text{grad } \phi - \partial_t \vec{A} \right) &= \frac{1}{\epsilon_0} \rho \\ \text{rot rot } \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(-\text{grad } \phi - \frac{\partial}{\partial t} \vec{A} \right) &= \mu_0 \vec{j}\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}\text{rot rot } \vec{A} &= \text{grad}(\text{div } \vec{A}) - \Delta \vec{A} \\ \Rightarrow -\Delta \phi - \partial_t \text{div } \vec{A} &= \frac{1}{\epsilon_0} \rho \\ -\Delta \vec{A} + \text{grad div } \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \partial_t \text{grad } \phi &= \mu_0 \vec{j}\end{aligned}$$

Wir versuchen nun, wie in der Magnetostatik, durch geschickte Wahl einer Eichbedingung, eine Vereinfachung der Gleichungen zu erreichen.

5.2.1. Lorenzbedingung

$$\operatorname{div} \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$

Falls

$$\operatorname{div} \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = \gamma \text{ mit } \gamma \neq 0$$

Eichtransformation

$$\begin{aligned} \vec{A} &= \vec{A}' - \operatorname{grad} \Lambda \\ \phi &= \phi' + \partial_t \Lambda \\ 0 &\stackrel{!}{=} \operatorname{div} \vec{A} + \frac{1}{c^2} \partial_t \phi' \\ &= \gamma - \Delta \Lambda + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial t^2} \\ \text{also } \Delta \Lambda - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial t^2} &= \gamma \end{aligned}$$

Wir werden gleich zeigen, dass diese partielle Differentialgleichung stets Lösungen hat. Unter Nutzung der Lorenzbedingung, folgt

5.2.2. Inhomogene Wellengleichung

$$\begin{aligned}\frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \Delta \phi &= \frac{1}{\epsilon_0} \rho \\ \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \Delta \vec{A} &= \mu_0 \vec{j}\end{aligned}$$

ϕ und \vec{A} genügen der sogenannten inhomogenen Wellengleichung.

Als nächstes lösen wir die Gleichungen für vorgegebene ρ und \vec{j} unter Beachtung der Kontinuitätsgleichung von Seite 77. Aus dem statischen Fall von Seite 34 wissen wir :

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'$$

Eine erste Überlegung für die Übertragung auf den zeitabhängigen Fall, wäre

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_V \frac{\rho(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'$$

Das ist aber leider falsch, da $\Delta \phi(\vec{r}, t)$ dann gleich $\frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{r}, t)$ wäre. Die Wellengleichung mit dem zusätzlichen Term $\frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}$ wird dadurch nicht erfüllt.

Der eben diskutierte Versuch setzte voraus, dass sich Änderungen von $\rho(\vec{r}', t)$ an der Stelle $\vec{r}' \neq \vec{r}$ augenblicklich am Orte \vec{r} bemerkbar machen. Ein besserer Versuch wäre es, einer endlichen Signalausbreitungsgeschwindigkeit Rechnung zu tragen. Dann kommt man auf

$$\rho(\vec{r}, t) \rightarrow \rho(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{a})$$

$\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{a}$ wäre dann die Zeit, die vergeht, bis sich eine Veränderung von ϱ ausgehend vom Ort \vec{r}' am Punkt \vec{r} im gesuchten Potential bemerkbar macht. a ist die Geschwindigkeit, mit der die Information über die Änderung übertragen wird.

$$\begin{aligned}\phi(\vec{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_V \frac{\varrho(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{a})}{|\vec{r}-\vec{r}'|} d^3r' \\ \Rightarrow \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi(\vec{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \cdot \int_V \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varrho(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{a}) d^3r' \\ \Delta \phi &=? \\ \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\varrho(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{a})}{|\vec{r}-\vec{r}'|} &= \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right) \cdot \varrho + \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \varrho \\ \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\varrho(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{a})}{|\vec{r}-\vec{r}'|} &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right) \cdot \varrho + \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} \varrho + \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \varrho + \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \varrho \\ \Delta \frac{\varrho(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{a})}{|\vec{r}-\vec{r}'|} &= \varrho \cdot \Delta \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} + 2 \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \cdot \frac{\partial \varrho}{\partial x_i} + \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \cdot \Delta \varrho(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{a})\end{aligned}\quad (1)$$

Nun ist weiter:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = -\frac{x_i - x'_i}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} |\vec{r}-\vec{r}'| = \frac{x_i - x'_i}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \varrho(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{a}) = -\frac{(x_i - x'_i)}{a \cdot |\vec{r}-\vec{r}'|} \cdot \partial_t \varrho\quad (3)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \varrho = -\frac{\delta_{ij}}{a \cdot |\vec{r} - \vec{r}'|} \cdot \partial_t \varrho + \frac{(x_i - x'_i) \cdot (x_j - x'_j)}{a \cdot |\vec{r} - \vec{r}'|^3} \cdot \partial_t \varrho + \frac{(x_i - x'_i) \cdot (x_j - x'_j)}{a^2 \cdot |\vec{r} - \vec{r}'|^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varrho$$

$$\Delta \varrho(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{a}) = -\frac{2}{a \cdot |\vec{r} - \vec{r}'|} \cdot \partial_t \varrho + \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varrho \quad (4)$$

Mit (2), (3) und (4) wird aus (1)

$$\Delta \frac{\varrho(\vec{r}, t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{a})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \varrho \cdot \Delta \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + 2 \cdot \left(-\frac{x_i - x'_i}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right) \cdot \left(-\frac{x_i - x'_i}{a \cdot |\vec{r} - \vec{r}'|} \partial_t \varrho \right) - \frac{2}{a \cdot |\vec{r} - \vec{r}'|^2} \partial_t \varrho + \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \cdot \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varrho$$

$$= -4\pi \cdot \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}') \cdot \varrho + \frac{2 \cdot \overbrace{(x_i - x'_i)^2}^{|\vec{r} - \vec{r}'|^2}}{a \cdot |\vec{r} - \vec{r}'|^4} \partial_t \varrho - \frac{2}{a \cdot |\vec{r} - \vec{r}'|^2} \partial_t \varrho + \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \cdot \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varrho$$

$$= -4\pi \cdot \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}') \cdot \varrho(\vec{r}, t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{a}) + \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \cdot \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varrho$$

Die inhomogene Wellengleichung ist für ϕ nur dann erfüllt, wenn $a^2 = c^2$.

5.2.3. Retardierte Potentiale

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_V \frac{\varrho(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'$$

Unser Ansatz liefert Lösungen der Gleichung für $a^2 = c^2$, wir können also auch $a = -c$ wählen. Die zugehörigen Lösungen heißen *avancierte Potentiale*. Sie sind aus Kausalitätsgründen zu verwerfen, da die Wirkung vor der Ursache stattfinden würde. Die gefundenen Potentiale erfüllen auch die Lorenzbedingung auf Seite 99, falls für $\varrho \cdot \vec{j}$ die Kontinuitätsgleichung gilt.

Man sollte sich an dieser Stelle noch einmal kurz Zeit nehmen, um zu rekapitulieren, was wir da gerade herausgefunden haben. Die Wellengleichung ist nur dann erfüllt, wenn eine endlich schnelle Signalausbreitung zugrunde gelegt wird.

5.3. Elektromagnetische Wellen im Vakuum

In Gebieten mit $\varrho = 0$ und $\vec{j} = \vec{0}$ gilt für ϕ und \vec{A} die homogene Wellengleichung.

5.3.1. Homogene Wellengleichung

$$\begin{aligned}\frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} \cdot \phi - \Delta \phi &= 0 \\ \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} \cdot \vec{A} - \Delta \vec{A} &= \vec{0}\end{aligned}$$

Mit $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$ und $\vec{E} = -\text{grad } \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} \cdot \vec{B} - \Delta \vec{B} &= \text{rot} \left(\frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} \cdot \vec{A} - \Delta \vec{A} \right) = \vec{0} \\ \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} \cdot \vec{E} - \Delta \vec{E} &= -\text{grad} \left(\frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} \cdot \phi - \Delta \phi \right) - \frac{\partial}{\partial t} \cdot \left(\frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} \cdot \vec{A} - \Delta \vec{A} \right) = 0\end{aligned}$$

Sowohl \vec{E} als auch \vec{B} genügen also auch einzeln der homogenen Wellengleichung.

5.3.2. Ebene Wellen als Lösung der Wellengleichung

Wir benutzen den Ansatz

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}, t) &= \vec{E}_0(\vec{k}) \cdot e^{i \cdot (\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \\ \vec{B}(\vec{r}, t) &= \vec{B}_0(\vec{k}) \cdot e^{i \cdot (\vec{k}\vec{r} - \omega t)}\end{aligned}$$

\vec{E} und \vec{B} müssen als physikalische Felder zwar reell sein, aber man kann trotzdem mit komplexen Feldern arbeiten, weil die Wellengleichung und die Maxwell-Gleichungen bei $\varrho = 0$ und $\vec{j} = \vec{0}$ als lineare Gleichungen dem *Superpositionsprinzip* genügen. Das heißt, die Summe zweier Lösungen ist ebenfalls eine Lösung.

Da die Koeffizienten der Gleichungen reellwertig sind, ist mit jeder komplexen Lösung auch der komplex-konjugierte Ausdruck eine Lösung.

$$\vec{E} \text{ Lösung} \Rightarrow \vec{E}^* \text{ Lösung} \Rightarrow \text{Re } \vec{E} \text{ und Im } \vec{E} \text{ Lösung}$$

Eingesetzt in die Wellengleichung ergibt der Ansatz

$$\left(\frac{1}{c^2} \cdot (-i\omega)^2 - (i\vec{k})^2 \right) \cdot \vec{E}_0(\vec{k}) \cdot e^{i \cdot (\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \stackrel{!}{=} 0$$

Das ist genau dann erfüllt, falls folgendes gilt

$$\omega = \pm c \cdot |\vec{k}|$$

Interpretation der Lösung

An festem Ort ändern sich \vec{E} und \vec{B} periodisch mit der Zeit. Nach der Periodenlänge $\frac{2\pi}{\omega}$ liegen erneut die selben Werte vor. Deshalb ist

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi}$$

die Frequenz der Schwingung.

ω Winkelgeschwindigkeit

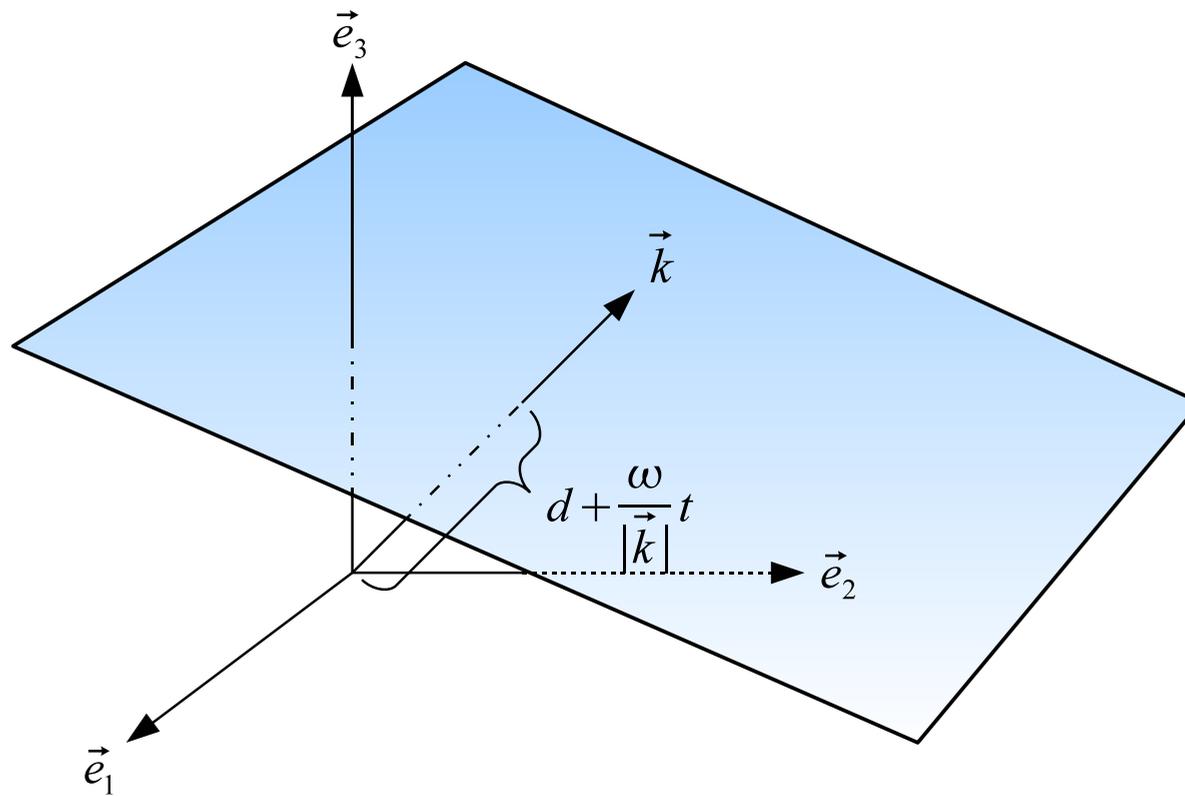
Für alle Punkte im Raum, für die $\vec{k}\vec{r} - \omega t = d \cdot |\vec{k}|$ mit $d = \text{const}$ bzw. $\frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} \cdot \vec{r} - \frac{\omega t}{|\vec{k}|} = d$ gilt, liegen die gleichen Werte vor.

$\vec{k}\vec{r} - \omega t = d \cdot |\vec{k}|$ ist bei fester Zeit die Gleichung für eine Ebene im Raum. \vec{k} steht senkrecht auf dieser Ebene, deren Abstand zum Ursprung gleich $d + \frac{\omega t}{|\vec{k}|}$ ist.

Variiert man (bei fester Zeit) d , so erhält man eine Schar paralleler Ebenen. Auf jeder dieser Ebenen sind \vec{E} und \vec{B} jeweils konstant. Der Wert der Felder ist dort bei $\vec{k}\vec{r} - \omega t$ und $\vec{k}\vec{r} - \omega t + 2\pi$ gleich. Der Abstand zwischen den entsprechenden Ebenen ist

$$d + \frac{2\pi}{|\vec{k}|}$$

d. h. bei festem t findet man in der Richtung von \vec{k} ein räumlich periodisches Muster.



$$\lambda = \frac{2\pi}{|\vec{k}|}$$

λ Wellenlänge

Schließlich bewegt sich das Muster als Ganzes mit der Zeit in die Richtung von \vec{k} . Die dazugehörige Geschwindigkeit ist

$$\frac{\omega}{|\vec{k}|} = c = \nu \cdot \lambda$$

\vec{k} Wellenzahlvektor

Also ist $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$ die Ausbreitungsgeschwindigkeit elektromagnetischer Wellen, d. h. die Lichtgeschwindigkeit.

Bemerkung

Bei allgemeinen Wellenphänomenen ist $\omega = \omega(\vec{k})$ (nichtlinear). Das trifft auch auf elektromagnetische Wellen in kontinuierlichen Medien zu. Dann ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit frequenzabhängig. Liegt ein solcher Fall vor, spricht man von Dispersion.

Die Wellen für \vec{E} - und \vec{B} -Feld müssen natürlich auch die Maxwell-Gleichungen erfüllen ($\rho = 0, \vec{j} = \vec{0}$)

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= 0 & \operatorname{div} \vec{B} &= 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0 & \operatorname{rot} \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= 0 \end{aligned}$$

Wie wir eben festgestellt haben, gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= i\vec{k} \cdot \vec{E}_0(\vec{k}) \cdot e^{i(\vec{r}\vec{k} - \omega t)} \\ \operatorname{div} \vec{B} &= i\vec{k} \cdot \vec{B}_0(\vec{k}) \cdot e^{i(\vec{r}\vec{k} - \omega t)} \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= i\vec{k} \times \vec{E}_0(\vec{k}) \cdot e^{i(\vec{r}\vec{k} - \omega t)} \\ \operatorname{rot} \vec{B} &= i\vec{k} \times \vec{B}_0(\vec{k}) \cdot e^{i(\vec{r}\vec{k} - \omega t)} \\ \partial_t \vec{E} &= -i\omega \cdot \vec{E}_0(\vec{k}) \cdot e^{i(\vec{r}\vec{k} - \omega t)} \\ \partial_t \vec{B} &= -i\omega \cdot \vec{B}_0(\vec{k}) \cdot e^{i(\vec{r}\vec{k} - \omega t)} \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \vec{k} \cdot \vec{E}_0(\vec{k}) &= 0 \\ \vec{k} \cdot \vec{B}_0(\vec{k}) &= 0 \\ \vec{k} \times \vec{E}_0(\vec{k}) &= \omega \cdot \vec{B}_0(\vec{k}) \\ \vec{k} \times \vec{B}_0(\vec{k}) &= -\frac{\omega}{c^2} \cdot \vec{E}_0(\vec{k}) \end{aligned}$$

Also stehen \vec{k} , \vec{E}_0 und \vec{B}_0 senkrecht aufeinander. Elektromagnetische Wellen sind demnach transversale Wellen ($\vec{E}(\vec{r}, t)$ und $\vec{B}(\vec{r}, t)$ sind stets senkrecht zur Ausbreitungsrichtung \vec{k}).

Wegen des Superpositionsprinzips folgen die allgemeinen Lösungen der homogenen Gleichungen:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \int \left(\vec{E}_0(\vec{k}) \cdot e^{i \cdot (\vec{k}\vec{r} - c \cdot |\vec{k}|t)} + \vec{E}_0^*(-\vec{k}) \cdot e^{i \cdot (\vec{k}\vec{r} + c \cdot |\vec{k}|t)} \right) d^3k$$

Diese sind per Konstruktion reell, wegen

$$\begin{aligned} E &= \int \left(E_0(\vec{k}) \cdot e^{i \cdot (\vec{k}\vec{r} - c \cdot |\vec{k}|t)} + \hat{E}_0(\vec{k}) \cdot e^{i \cdot (\vec{k}\vec{r} + c \cdot |\vec{k}|t)} \right) d^3k \\ E^* &= \int \left(E_0^*(\vec{k}) \cdot e^{i \cdot (-\vec{k}\vec{r} + c \cdot |\vec{k}|t)} + \hat{E}_0^*(\vec{k}) \cdot e^{i \cdot (-\vec{k}\vec{r} - c \cdot |\vec{k}|t)} \right) d^3k \\ &= \int \left(E_0^*(-\vec{k}) \cdot e^{i \cdot (\vec{k}\vec{r} + c \cdot |\vec{k}|t)} + \hat{E}_0^*(-\vec{k}) \cdot e^{i \cdot (\vec{k}\vec{r} - c \cdot |\vec{k}|t)} \right) d^3k \\ E = E^* &\Leftrightarrow \hat{E}_0(\vec{k}) = E_0^*(-\vec{k}) \end{aligned}$$

Bemerkung

Die Transversalität folgt auch aus den Wellengleichungen für \vec{A} und ϕ zusammen mit der Lorenzbedingung auf Seite 99.

Beweis.

$$\begin{aligned} \vec{A} &= \vec{A}_0 \cdot e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \\ \phi &= \phi_0 \cdot e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \vec{A} + \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial t} &= 0 \\ \Leftrightarrow \vec{k} \vec{A}_0 - \frac{1}{c^2} \cdot \omega \cdot \phi_0 &= 0\end{aligned}$$

$$\phi_0 = c \cdot \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} \cdot \vec{A}_0$$

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \operatorname{rot} \vec{A} &&= i \vec{k} \times \vec{A}_0 \cdot e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \\ \vec{E} &= -\operatorname{grad} \phi - \partial_t \vec{A} &&= -i \vec{k} \cdot \phi_0 \cdot e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} + i \underbrace{\omega}_{=c \cdot |\vec{k}|} \cdot \vec{A}_0 \cdot e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{B}_0 &= i \vec{k} \times \vec{A}_0 \\ \vec{E}_0 &= i \omega \cdot \vec{A}_0 - i \vec{k} \cdot \phi_0\end{aligned}$$

Damit folgt

$$\vec{k} \cdot \vec{E}_0 = i \cdot \left(\omega \vec{k} \cdot \vec{A}_0 - \vec{k}^2 \cdot \phi_0 \right)$$

$$\begin{aligned}
&= i \cdot \left(\omega \vec{k} \cdot \vec{A}_0 - k^2 \cdot c \cdot \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} \cdot A_0 \right) \\
&= i \cdot \left(c \cdot |\vec{k}| \cdot \vec{k} \cdot \vec{A}_0 - c \cdot |\vec{k}| \cdot \vec{k} \cdot A_0 \right) \\
&= 0 \\
\vec{k} \cdot \vec{B}_0 &= i \vec{k} \cdot \left(\vec{k} \times \vec{A}_0 \right) \\
&= 0 \\
\vec{E}_0 \cdot \vec{B}_0 &= - \left(\omega \cdot \vec{A}_0 - \vec{k} \cdot \phi_0 \right) \cdot \left(\vec{k} \times \vec{A}_0 \right) \\
&= -\omega \cdot \underbrace{\vec{A}_0 \cdot \left(\vec{k} \times \vec{A}_0 \right)}_{=0} + \underbrace{\vec{k} \cdot \phi_0 \cdot \left(\vec{k} \times \vec{A}_0 \right)}_{=0} \\
&= 0
\end{aligned}$$

□

5.3.3. Polarisierung monochromatischer, ebener Wellen

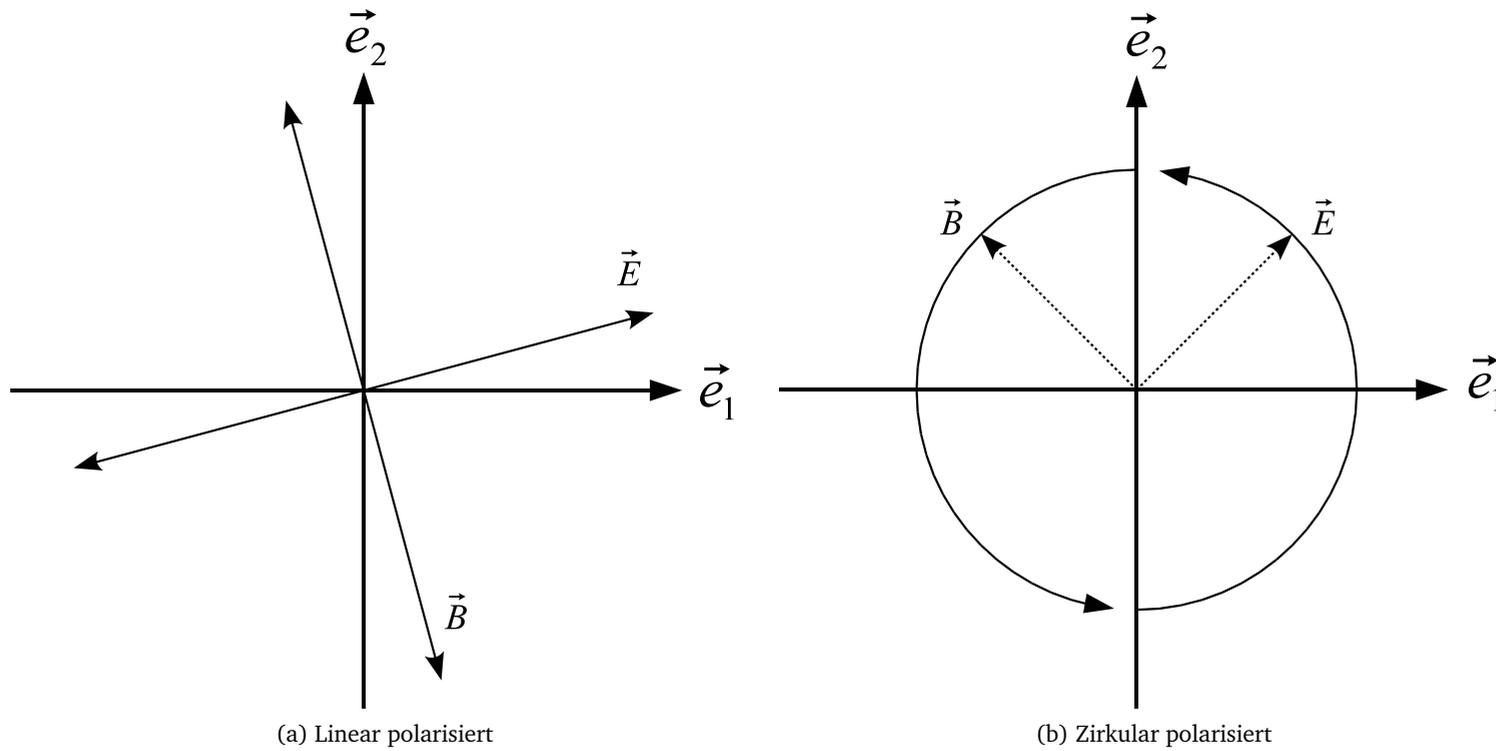
Wir wählen das Koordinatensystem so, dass $\vec{k} = k \cdot \vec{e}_3$ ist.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \vec{E} &= E_{10} \vec{e}_1 \cdot \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \varphi_1) + E_{20} \vec{e}_2 \cdot \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \varphi_2) \\
&\left(\vec{E} = \text{Re}(\vec{E}_0 \cdot e^{i \cdot (\vec{k}\vec{r} - \omega t)}), E_{j0} = |E_{j0}| \cdot e^{i\varphi} \right)
\end{aligned}$$

Mit der Maxwellgleichung $\text{rot } \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$ (5.1.2) folgt

$$\vec{B} = -\frac{|E_{20}|}{c} \vec{e}_1 \cdot \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \varphi_2) + \frac{|E_{10}|}{c} \vec{e}_2 \cdot \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \varphi_1)$$

\vec{E} und \vec{B} liegen also stets in einer Ebene senkrecht auf \vec{k} , d. h. in der (x_1, x_2) -Ebene.



Lineare Polarisation

Das ist der Spezialfall $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$.

$$\begin{aligned}\vec{E} &= (E_{10}\vec{e}_1 + E_{20}\vec{e}_2) \cdot \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \varphi) \\ \vec{B} &= \left(-\frac{|E_{20}|}{c}\vec{e}_1 + \frac{|E_{10}|}{c}\vec{e}_2 \right) \cdot \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \varphi)\end{aligned}$$

Zirkulare Polarisation

Das ist der Spezialfall $\varphi_2 = \varphi_1 \pm \pi/2$, $E_{10} = E_{20} = E$.

$$\Rightarrow \vec{E} = E \cdot \left(\vec{e}_1 \cdot \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \varphi) \mp \vec{e}_2 \cdot \sin(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \varphi) \right)$$

Dann ist $|\vec{E}|^2$ überall und für alle Zeiten konstant. Der \vec{E} -Vektor durchläuft einen Kreis in der (x_1, x_2) -Ebene, dessen Umlaufrichtung durch die \pm -Alternative bestimmt wird.

Allgemeiner Fall

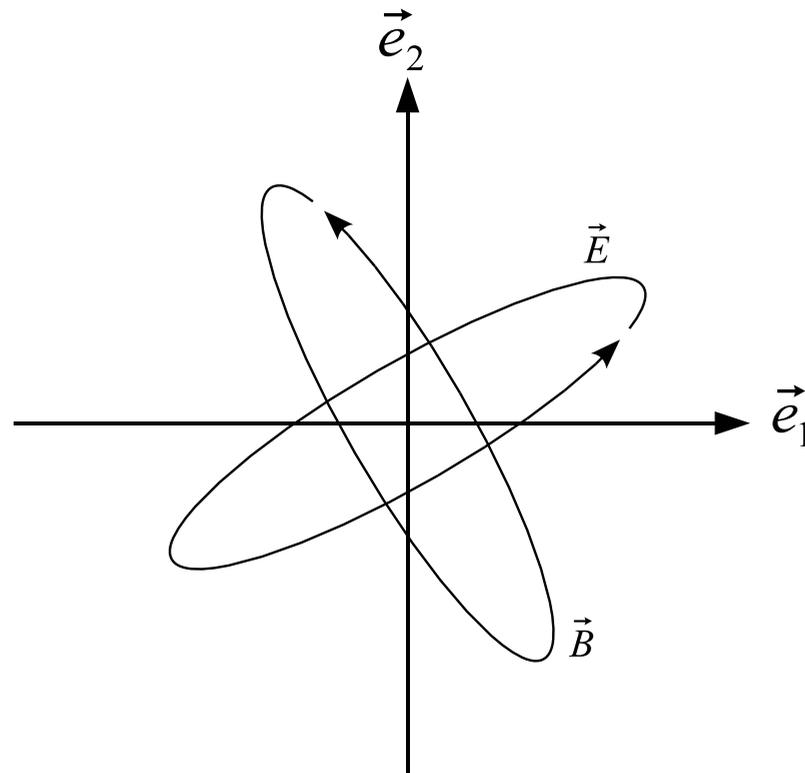
Es ist zweckmäßig von φ_2 auf $\varphi_2 - \pi/2$ überzugehen, weil $\cos(x - \pi/2) = \sin x$ ist.

$$\Rightarrow \vec{E} = E_{10}\vec{e}_1 \cdot \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \varphi_1) + E_{20}\vec{e}_2 \cdot \sin(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \varphi_2)$$

Es lässt sich zeigen, dass durch die Drehung des Koordinatensystems in der (x_1, x_2) -Ebene stets $\varphi_1 = \varphi_2$ erreicht werden kann.

$$\Rightarrow \frac{E_1^2}{E_{10}^2} + \frac{E_2^2}{E_{20}^2} = \cos^2(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \varphi_1) + \sin^2(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \varphi_2) = 1$$

Der Feldstärkevektor läuft in der Ebene senkrecht zu \vec{k} auf einer Ellipsenbahn.



Allgemeiner Fall

5.4. Energie und Impuls des elektromagnetischen Feldes

Ein Teilchen erfährt im elektromagnetischen Feld die Kraft

$$\vec{K} = q \cdot \left(\vec{E}(\vec{r}, t) + \dot{\vec{r}}(t) \times \vec{B}(\vec{r}, t) \right)$$

Die pro Zeit geleistete Arbeit ist

$$\frac{dA}{dt} = \vec{K} \cdot \dot{\vec{r}} = q \cdot \vec{E} \cdot \dot{\vec{r}}$$

Beachte: das Magnetfeld leistet keine Arbeit am Teilchen.

Daraus folgt im allgemeineren Fall einer kontinuierlichen Stromdichte

$$\frac{dA}{dt} = \int_V \vec{j}(\vec{r}, t) \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) d^3r$$

Für Punktteilchen ist $\vec{j}(\vec{r}, t) = q \cdot \dot{\vec{r}}(t) \cdot \delta^{(3)}(\vec{r}_q - \vec{r}(t))$.

Wir postulieren die Energieerhaltung für das Gesamtsystem aus Teilchen und Feld. Die Änderung der Energie der Teilchen ist betragsmäßig gerade gleich der Änderung der Energie des Feldes. Daraus folgt für die Energie W des Feldes:

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} &= - \int_V \vec{j} \cdot \vec{E} d^3r \\ &\stackrel{(5.1,2)}{=} - \frac{1}{\mu_0} \cdot \int_V \left(\text{rot } \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot \vec{E} d^3r \end{aligned}$$

$$= \underbrace{\frac{\epsilon_0}{2} \cdot \int_V \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}^2 d^3r}_{\text{Arbeit im elektrostatischen Feld (3.4)}} - \frac{1}{\mu_0} \cdot \int_V \text{rot } \vec{B} \cdot \vec{E} d^3r$$

Nun ist $\vec{E} \text{ rot } \vec{B} = \vec{B} \text{ rot } \vec{E} - \text{div}(\vec{E} \times \vec{B})$ nach (1.2.1).

Aus der Maxwell-Gleichung von Seite 96

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \Rightarrow \vec{E} \text{ rot } \vec{B} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \vec{B}^2 - \text{div}(\vec{E} \times \vec{B}) \\ \Rightarrow \frac{dW}{dt} &= \int_V \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon_0}{2} \vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 \right) d^3r + \frac{1}{\mu_0} \int_V \text{div}(\vec{E} \times \vec{B}) d^3r \end{aligned}$$

$$\stackrel{(2.1.1)}{\Rightarrow} \frac{dW}{dt} = \int_V \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon_0}{2} \vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 \right) d^3r + \int_{\partial V} \frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \times \vec{B}) d\vec{f}$$

Interpretation

5.4.1. Energiedichte des elektromagnetischen Feldes

$$e(\vec{r}, t) := \frac{\epsilon_0}{2} \cdot \vec{E}^2(\vec{r}, t) + \frac{1}{2\mu_0} \cdot \vec{B}^2(\vec{r}, t)$$

5.4.2. Poynting-Vektor

$$\vec{S}(\vec{r}, t) := \frac{1}{\mu_0} \cdot \vec{E} \times \vec{B}$$

Vektor der *Energieflussdichte* des Feldes.

Energieflussdichte Die Dichte und die Richtung des Energietransportes einer elektromagnetischen Welle. Der Begriff des Energieflusses ist identisch mit dem physikalischen Begriff der Leistung, die Bezeichnung Energieflussdichte ist daher zur Leistungsdichte gleichwertig.

Analoge Manipulation für den Impuls

Für ein einzelnes Teilchen gilt

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{K} = q \cdot \left(\vec{E}(\vec{r}, t) + \dot{\vec{r}}(t) \times \vec{B}(\vec{r}, t) \right)$$

Die Impulsänderung einer kontinuierlichen Stromladungsverteilung ist demnach

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \int_V \left(\rho \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) + \vec{j} \times \vec{B}(\vec{r}, t) \right) d^3r$$

Wir postulieren die Impulserhaltung für Feld und Ströme.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{d\vec{p}_{\text{Feld}}}{dt} &= - \int_V \left(\rho \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) + \vec{j} \times \vec{B} \right) d^3r \\ &\stackrel{(5.1.2)}{=} - \int_V \left(\epsilon_0 \cdot \vec{E} \operatorname{div} \vec{E} + \frac{1}{\mu_0} \cdot (\operatorname{rot} \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) \times \vec{B} \right) d^3r \\ \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \times \vec{B} &= \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \times \vec{B}) - \vec{E} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ &\stackrel{(5.1.2)}{=} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \times \vec{B}) + \vec{E} \times \operatorname{rot} \vec{E} \\ \frac{d\vec{p}_{\text{Feld}}}{dt} &= \int_V \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{\mu_0 c^2} \cdot \vec{E} \times \vec{B} d^3r - \int_V \left(\epsilon_0 \cdot \vec{E} \operatorname{div} \vec{E} - \frac{1}{\mu_0} \cdot \vec{B} \times \operatorname{rot} \vec{B} - \frac{1}{\mu_0 c^2} \cdot \vec{E} \times \operatorname{rot} \vec{E} \right) d^3r \end{aligned}$$

Das zweite Integral lässt sich in ein Randintegral überführen.

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{falls } (i, j, k) : (1, 2, 3), (3, 1, 2) \text{ oder } (2, 3, 1) \\ -1 & \text{falls } (i, j, k) : (3, 2, 1), (1, 3, 2) \text{ oder } (2, 1, 3) \text{ Levi-Civita-Symbol} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Wir betrachten das Integral komponentenweise.

$$\begin{aligned}
& \int_V \left[\epsilon_0 \cdot \vec{E} \operatorname{div} \vec{E} - \frac{1}{\mu_0} \cdot \vec{B} \times \operatorname{rot} \vec{B} - \frac{1}{\mu_0 c^2} \cdot \vec{E} \times \operatorname{rot} \vec{E} \right] d^3 r \\
&= \int_V \epsilon_0 \cdot E_i \partial_j E_j - \frac{1}{\mu_0} \cdot \underbrace{[\vec{B} \times \operatorname{rot} \vec{B}]_i}_{\epsilon_{ijk} B_j [\underbrace{\nabla \times \vec{B}}_{\epsilon_{klm} \partial_l B_m}]_k} - \frac{1}{\mu_0 c^2} \cdot \underbrace{[\vec{E} \times \operatorname{rot} \vec{E}]_i}_{\epsilon_{ijk} E_j [\underbrace{\nabla \times \vec{E}}_{\epsilon_{klm} \partial_l E_m}]_k} d^3 r \\
&= \int_V \left(\epsilon_0 \cdot E_i \partial_j E_j - \frac{1}{\mu_0} \cdot \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} B_j \partial_l B_m - \epsilon_0 \cdot \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} E_j \partial_l E_m \right) d^3 r \\
&\stackrel{*}{=} \int_V \left(\underbrace{\epsilon_0 \cdot E_i \partial_j E_j}_{*} - \frac{1}{\mu_0} \cdot B_j \partial_i B_j + \frac{1}{\mu_0} \cdot B_j \partial_j B_i - \epsilon_0 \cdot E_j \partial_i E_j + \underbrace{\epsilon_0 \cdot E_j \partial_j E_i}_{*} \right) d^3 r \\
&= \int_V \underbrace{\partial_j \left(\epsilon_0 E_i E_j + \frac{1}{\mu_0} B_i B_j - \delta_{ij} \cdot \left(\frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 + \frac{\epsilon_0}{2} \vec{E}^2 \right) \right)}_{\text{Maxwell'scher Spannungstensor}} d^3 r
\end{aligned}$$

Nebenrechnung(*)

$$\begin{aligned}
\underbrace{\epsilon_{ijk} \epsilon_{klm}}_{=\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}} T_j \partial_l T_m &= (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) \cdot T_j \partial_l T_m \\
&= \delta_{il} \delta_{jm} \cdot T_j \partial_l T_m - \delta_{im} \delta_{jl} \cdot T_j \partial_l T_m
\end{aligned}$$

Da δ_{ab} nur dann 1 ist, wenn $a = b$ gilt und wir über die Indizes summieren (Summenkonvention), folgt aus Obigen sofort, dass alle Summanden 0 sind, wenn $i \neq l$ oder $j \neq m$ ist. Dieselbe Argumentation gilt für den zweiten Term (also $i = m$ und $j = l$).

$$\Rightarrow \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} T_j \partial_l T_m = T_j \partial_i T_j - T_j \partial_j T_i$$

Wir wollen die Interpretation des Maxwell'schen Spannungstensors als Zusammenfassung der Impulsflussdichten nicht weiter verfolgen und halten nur fest, dass

5.4.3. Impulsdichte

$$\epsilon_0 \vec{E} \times \vec{B}$$

$\epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2}$ ergibt noch den bemerkenswerten Zusammenhang

$$\text{Energieflussdichte} = c^2 \cdot \text{Impulsflussdichte}$$

in Analogie zum relativistischen $E = mc^2$.

Als nächstes wenden wir diese Erkenntnisse auf die linear polarisierten ebenen Wellen an.

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}_0 \cdot \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \varphi) & (\text{rot } \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0, \text{ Maxwell(5.1.2)}) \\ \vec{B} &= 1/c \cdot \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} \times \vec{E}_0 \cdot \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \varphi) \end{aligned}$$

Daraus folgt für die Energiedichte

$$\begin{aligned}
 e(\vec{r}, t) &= \frac{\epsilon_0}{2} \vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 \\
 &= \left(\frac{\epsilon_0}{2} \vec{E}_0^2 + \frac{1}{2\mu_0 c^2} \cdot \underbrace{\left(\frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} \times \vec{E}_0 \right)^2}_{\vec{E}_0^2} \right) \cdot \cos^2(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \varphi)
 \end{aligned}$$

$$e(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \vec{E}_0^2 \cdot \cos^2(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \varphi)$$

Für die Energieflussdichte gilt

$$\frac{1}{\mu_0} \vec{E}_0 \times \left(\frac{1}{c} \cdot \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} \times \vec{E}_0 \right) = \frac{1}{\mu_0 c |\vec{k}|} \cdot \left(\vec{k} \cdot (\vec{E}_0 \cdot \vec{E}_0) - \vec{E}_0 \cdot \underbrace{(\vec{k} \cdot \vec{E}_0)}_{=0} \right)$$

$$\vec{S}(\vec{r}, t) = c \cdot \epsilon_0 \vec{E}_0^2 \cdot \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} \cdot \cos^2(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \varphi)$$

Der Energiefluss erfolgt in Richtung von \vec{k} .

Von Interesse sind nun noch die zeitlichen Mittelwerte:

$$\overline{e(\vec{r})} := \frac{1}{T} \cdot \int_0^T e(\vec{r}, t) dt \text{ mit } T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\begin{aligned} \frac{\omega}{2\pi} \cdot \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \cos^2(\omega t - \vec{k}\vec{r} - \varphi) dt & \stackrel{*}{=} \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \cos^2(x + a) dx \\ & = \frac{1}{4\pi} \cdot [\sin(x + a) \cdot \cos(x + a) + x]_0^{2\pi} \\ & = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\overline{e(\vec{r})} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2$$
$$\overline{\vec{S}(\vec{r})} = \frac{c \cdot \epsilon_0}{2} \cdot E_0^2 \cdot \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}$$

Nebenrechnung(*)

$$\frac{\omega}{2\pi} \cdot \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \cos^2(\omega t - \vec{k}\vec{r} - \varphi) dt$$

Substitution mit $x = t\omega$:

$$t = \frac{x}{\omega}$$
$$\Rightarrow dt = \frac{d(\frac{x}{\omega})}{dx} dx$$
$$= \frac{1}{\omega} dx$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{\omega}{2\pi} \cdot \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \cos^2(\omega t - \vec{k}\vec{r} - \varphi) dt &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{\frac{2\pi}{\omega} \cdot \omega} \omega \cdot \cos^2\left(\omega \frac{x}{\omega} - \vec{k}\vec{r} - \varphi\right) \cdot \frac{1}{\omega} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \cos^2(\underbrace{x - \vec{k}\vec{r} - \varphi}_{=:a}) dx \end{aligned}$$

Das heißt zeitliche Mittel von Energiedichte und Energieflussdichte sind proportional zu \vec{E}_0^2 und von der Frequenz unabhängig.

Verhalten von Energiedichte und Energieflussdichte bei der Überlagerung zweier Wellen

Sei

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}_1 \cdot \cos(\vec{k}_1\vec{r} - \omega_1 t + \varphi_1) + \vec{E}_2 \cdot \cos(\vec{k}_2\vec{r} - \omega_2 t + \varphi_2) \\ \Rightarrow \vec{E}^2 &= \vec{E}_1^2 \cdot \cos^2(\vec{k}_1\vec{r} - \omega_1 t + \varphi_1) + \vec{E}_2^2 \cdot \cos^2(\vec{k}_2\vec{r} - \omega_2 t + \varphi_2) \\ &\quad + \vec{E}_1\vec{E}_2 \cdot (\cos((\vec{k}_1 + \vec{k}_2) \cdot \vec{r} - (\omega_1 + \omega_2) \cdot t + \varphi_1 + \varphi_2) + \cos((\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \cdot \vec{r} - (\omega_1 - \omega_2) \cdot t + \varphi_1 - \varphi_2)) \end{aligned}$$

Für $\omega_1 \neq \omega_2$ ist der Interferenzterm oszillierend. Dieser Beitrag verschwindet durch die zeitliche Mittelung der Größen, also verhalten sich Energie und Energieflussdichte in diesem Fall additiv.

5.5. Erzeugung/Abstrahlung elektromagnetischer Wellen

Wir wollen in diesem Abschnitt untersuchen, unter welchen Bedingungen Ladungsträger elektromagnetische Wellen abstrahlen. Dazu führen wir zunächst eine allgemeine Diskussion und betrachten dann als Spezialfall die Strahlung eines periodisch schwingenden Dipols (den Prototypen einer Antenne).

5.5.1. Feld einer bewegten Punktladung

Wir betrachten die retardierten Potentiale von Seite 102 für eine einzelne Punktladung mit

$$\begin{aligned}\varrho(\vec{r}', t) &= q \cdot \delta^{(3)}(\vec{r}' - \vec{r}(t)) \\ \vec{j}(\vec{r}', t) &= q \cdot \dot{\vec{r}}(t) \cdot \delta^{(3)}(\vec{r}' - \vec{r}(t))\end{aligned}$$

wobei $\vec{r}(t)$ die Bahnkurve des Teilchens beschreibt. Für das Potential folgt dann

$$\begin{aligned}\phi(\vec{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_V \frac{\varrho(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_V \frac{\varrho(\vec{r}', t')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \cdot \delta(t' - t + \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}) dt' d^3r' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_V \frac{q \cdot \delta^{(3)}(\vec{r}' - \vec{r}(t')) \cdot \delta(t' - t + \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dt' d^3r' \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int \delta(t' - t + \frac{|\vec{r} - \vec{r}(t')|}{c}) \frac{dt'}{|\vec{r} - \vec{r}(t')|}\end{aligned}$$

Die Integration über t' hängt wegen der Deltafunktion nur von einem speziellen $t_* = t'$ ab. Es muss dann also gelten

$$t_* - t + \frac{|\vec{r} - \vec{r}(t_*)|}{c} = 0$$

Unter Benutzung von

$$\delta(f(t')) = \frac{1}{|\dot{f}(t_*)|} \cdot \delta(t' - t_*), \quad f(t') = t' - t + \frac{|\vec{r} - \vec{r}(t')|}{c}$$

entsteht

$$\begin{aligned}
 \dot{f}(t') &= 1 + \frac{\dot{\vec{r}}(t') \cdot (\vec{r}(t') - \vec{r})}{c \cdot |\vec{r} - \vec{r}(t')|} \\
 \Rightarrow \dot{f}(t_*) &= 1 - \frac{(\vec{r} - \vec{r}(t_*)) \cdot \dot{\vec{r}}(t_*)}{c \cdot |\vec{r} - \vec{r}(t_*)|} \\
 &= \frac{|\vec{r} - \vec{r}(t_*)| - 1/c \cdot (\vec{r} - \vec{r}(t_*)) \cdot \dot{\vec{r}}(t_*)}{|\vec{r} - \vec{r}(t_*)|}
 \end{aligned}$$

5.5.2. Lienard-Wichert Potentiale

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}(t_*)| - \frac{\dot{\vec{r}}(t_*) \cdot (\vec{r} - \vec{r}(t_*))}{c}}$$

und mit analoger Herleitung

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{q \cdot \dot{\vec{r}}(t_*)}{|\vec{r} - \vec{r}(t_*)| - \frac{\dot{\vec{r}}(t_*) \cdot (\vec{r} - \vec{r}(t_*))}{c}}$$

Da t_* durch die endlich schnelle Signalausbreitung ebenfalls vom Ort abhängt, benötigen wir für die Berechnung der zugehörigen Feldstärken den entsprechenden Gradienten.

$$t_* = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}(t_*)|}{c}$$

$$\partial_i t_* = \partial_i \frac{|\vec{r} - \vec{r}(t_*)|}{c}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{grad } t_* &= -\frac{1}{c} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}(t_*)}{|\vec{r} - \vec{r}(t_*)|} - \frac{1}{c} \cdot \frac{\frac{\partial \vec{r}(t_*)}{\partial t_*} (\vec{r}(t_*) - \vec{r})}{|\vec{r} - \vec{r}(t_*)|} \cdot \text{grad } t_* \\ &= -\frac{\vec{R}}{R \cdot c} + \left(\frac{\vec{R}}{R \cdot c} \cdot \vec{v}(t_*) \right) \cdot \text{grad } t_* \end{aligned}$$

Wobei $\vec{R}(t_*) = \vec{r} - \vec{r}(t_*)$, $R(t_*) = |\vec{R}|$ und $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$ sind.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{grad } t_* &= \frac{\frac{\vec{R}(t_*)}{R \cdot c}}{\frac{\vec{R}(t_*) \cdot \vec{v}(t_*)}{R \cdot c} - 1} \\ \Rightarrow \text{grad } t_* &= \frac{\vec{R}}{\vec{R} \cdot \vec{v} - R \cdot c} \end{aligned}$$

Analog ergibt sich

$$\frac{\partial t_*}{\partial t} = \frac{1}{1 - \frac{\vec{R} \cdot \vec{v}}{Rc}}$$

Nach einiger Rechnung kommt man damit auf:

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}, t) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \cdot \left(R - \frac{\vec{v} \cdot \vec{R}}{c}\right)^3} \cdot \left(\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \cdot \left(\vec{R} - \frac{\vec{v} R}{c}\right) + \frac{1}{c^2} \cdot \vec{R} \times \left(\left(\vec{R} - \frac{\vec{v} R}{c}\right) \times \dot{\vec{v}} \right) \right) \\ \vec{B}(\vec{r}, t) &= \frac{1}{c} \cdot \frac{\vec{R}}{R} \times \vec{E} \end{aligned}$$

Zur Energieflossdichte (5.4.2)

$$\begin{aligned}
\vec{S} &= \frac{1}{\mu_0} \cdot \vec{E} \times \vec{B} \\
&= \frac{1}{\mu_0 c} \cdot \vec{E} \times \left(\frac{\vec{R}}{R} \times \vec{E} \right) \\
&= \frac{1}{\mu_0 c} \cdot \left(\vec{E}^2 \cdot \frac{\vec{R}}{R} - \left(\vec{E} \cdot \frac{\vec{R}}{R} \right) \cdot \vec{E} \right)
\end{aligned}$$

\vec{E} hat die Form $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_{\text{nah}}(\vec{r}, t) + \vec{E}_{\text{fern}}(\vec{r}, t)$ mit $\vec{E}_{\text{nah}} = \mathcal{O}(\frac{1}{r^2})$ und $\vec{E}_{\text{fern}} = \mathcal{O}(\frac{1}{r})$ und $\vec{E}_{\text{fern}} = 0$ für $\dot{\vec{v}} = 0$. Als nächstes betrachten wir die Abstrahlung ins Unendliche für diese beiden Komponenten.

Die Größe der Kugeloberfläche ist proportional zu R^2 , der Beitrag von \vec{E}_{nah} zu \vec{S} proportional zu $\frac{1}{R^4}$ und der von \vec{E}_{fern} zu \vec{S} proportional zu $\frac{1}{R^2}$.

Die Abstrahlung ins Unendliche tritt nur auf, falls $\dot{\vec{v}} \neq 0$ ist.

Als nächstes untersuchen wir die Abstrahlung aus einer bewegten Ladungswolke.

$$\begin{aligned}
\vec{A}(\vec{r}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r' \\
\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} &= \frac{1}{r} - x'_i \partial_i \frac{1}{r} + \frac{1}{2} x'_i x'_j \partial_i \partial_j \frac{1}{r} + \dots \\
\vec{j}(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}) &= \underbrace{\vec{j}(\vec{r}', t - \frac{r}{c})}_{=: t_*} + x'_i \partial_i r \cdot \frac{\dot{\vec{j}}(\vec{r}', t - \frac{r}{c})}{c} + \dots
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \int_V \left(\underbrace{\frac{\vec{j}(\vec{r}', t_*)}{r}}_{(1)} + \underbrace{\frac{1}{r} x_i' \partial_i r \cdot \frac{\dot{\vec{j}}(\vec{r}', t_*)}{c}}_{(2)} - \underbrace{x_i' \partial_i \frac{1}{r} \cdot \vec{j}(\vec{r}', t_*)}_{(3)} + \dots \right) d^3 r'$$

Wir beschränken uns auf den Fall, dass \vec{j} periodisch mit der Frequenz ω schwingt.

$$\Rightarrow |\dot{\vec{j}}| \sim \omega \cdot |\vec{j}|, \quad |\ddot{\vec{j}}| \sim \omega^2 \cdot |\vec{j}|$$

Wir erwarten, dass die abgestrahlte Welle auch die Frequenz ω hat. Dann ist die Wellenlänge

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega} \text{ bzw. } \omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$$

Term (1) $\sim \frac{1}{r}$, Term (2) $\sim \frac{R'}{2r}$, Term (3) $\sim \frac{R'}{r^2}$, R' Skala für die Ausdehnung der Quelle

Term (3) und höhere Entwicklungsterme können nicht zur Abstrahlung beitragen:

$$|\vec{A}| \sim \frac{1}{r^2} \rightarrow |\vec{B}| \sim \frac{1}{r^2} \rightarrow |\vec{E} \times \vec{B}| \sim \frac{1}{r^4}$$

Es reicht also aus für die Abstrahlung nur die Terme (1) und (2) zu betrachten. Falls die Ausdehnung der Quelle nun noch klein im Vergleich zur Wellenlänge ist ($\frac{R'}{\lambda} \ll 1$), dann dominiert nur Term (1).

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \cdot \int_V \vec{j}(\vec{r}', t_*) \cdot \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{R'}{\lambda} + \frac{R'}{r}\right)\right) d^3 r'$$

$$\begin{aligned}
\dot{\vec{m}} &= \int_V \dot{\rho}(\vec{r}, t) \cdot \vec{r} d^3r \\
&= - \int_V \operatorname{div} \vec{j} \cdot \vec{r} d^3r \\
&= \int_V (\vec{j} \cdot \vec{\nabla}) \cdot \vec{r} d^3r \\
&= \int_V \vec{j} d^3r \\
\Rightarrow \vec{A}(\vec{r}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi r} \cdot \dot{\vec{m}}(t_*) \cdot \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{R'}{\lambda} + \frac{R'}{r}\right)\right)
\end{aligned}$$

Bemerkung

Analog kann der zweite Term durch die Zeitableitung des Quadrupolmomentes und des magnetischen Dipolmomentes ausgedrückt werden.

Wir betrachten im Folgenden den Beitrag von $\dot{\vec{m}}$.

$$\begin{aligned}
\vec{B}(\vec{r}, t) &= \operatorname{rot} \vec{A}(\vec{r}, t) \\
&= \operatorname{rot} \left(\frac{\mu_0}{4\pi r} \cdot \dot{\vec{m}}\left(t - \frac{r}{c}\right) \right) \\
\partial_i \left(\frac{1}{r} \cdot \dot{m}_j \left(t - \frac{r}{c}\right) \right) &= -\frac{x_i}{r^3} \cdot \dot{m}_j(t_*) - \frac{1}{r^2} \cdot \frac{x_i}{c} \cdot \ddot{m}_j(t_*) \\
\Rightarrow \vec{B}(\vec{r}, t) &= -\frac{\mu_0}{4\pi r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \times \dot{\vec{m}}(t_*) - \frac{\mu_0}{4\pi r c} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \times \ddot{\vec{m}}(t_*)
\end{aligned}$$

5.5.3. Dipolstrahlung

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r c} \cdot \ddot{\vec{m}}(t_*) \times \frac{\vec{r}}{r} + \frac{\mu_0}{4\pi r^2} \cdot \dot{\vec{m}}(t_*) \times \frac{\vec{r}}{r}$$

Nach Maxwell auf Seite 96 gilt $\dot{\vec{E}} = c^2 \cdot \text{rot } \vec{B}$ außerhalb der Ladungswolke.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \dot{\vec{E}} &= c^2 \cdot \frac{\mu_0}{4\pi r c^2} \cdot \left(\ddot{\vec{m}}(t_*) \times \frac{\vec{r}}{r} \right) \times \frac{\vec{r}}{r} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right) \\ \vec{E} &= \frac{\mu_0}{4\pi r} \cdot \left(\ddot{\vec{m}}(t_*) \times \frac{\vec{r}}{r} \right) \times \frac{\vec{r}}{r} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right) \end{aligned}$$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = c \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) \times \frac{\vec{r}}{r} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

Für den Poynting-Vektor folgt

$$\begin{aligned}
\vec{S} &= \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \\
&= \frac{1}{\mu_0} \cdot c \cdot \left(\vec{B} \times \frac{\vec{r}}{r} \right) \times \vec{B} \\
&= \frac{c}{\mu_0} \cdot \left(\frac{\vec{r}}{r} \cdot \vec{B}^2 - \vec{B} \cdot \left(\frac{\vec{r}}{r} \cdot \vec{B} \right) \right)
\end{aligned}$$

Weiterhin gilt

$$\begin{aligned}
\vec{B}^2 &= \frac{\mu_0^2}{16\pi^2 r^2 c^2} \cdot \left(\ddot{m}^2 - \left(\ddot{m} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \right)^2 \right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^3}\right) \\
\frac{\vec{r}}{r} \cdot \vec{B} &= 0 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right)
\end{aligned}$$

$$\vec{S}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{16\pi^2 c} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \left(\ddot{m}^2 - \left(\ddot{m} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \right)^2 \right) \Big|_{t=t_*} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^3}\right)$$

Sei weiter

$$\begin{aligned}
\vec{m} &= \vec{m}_0 \cdot \cos(\omega t) \\
\Rightarrow \ddot{\vec{m}} &= -\omega^2 \cdot \vec{m}_0 \cdot \cos(\omega t) \\
\vartheta &= \angle\left(\frac{\vec{r}}{r}, \vec{m}_0\right) \\
\Rightarrow \vec{S}(\vec{r}, t) &= \frac{\mu_0}{16\pi^2 c} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \cdot \omega^4 \cdot |\vec{m}_0|^2 \sin^2 \vartheta \cdot \cos^2\left(\omega \cdot \left(t - \frac{r}{c}\right)\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^3}\right)
\end{aligned}$$

Der Energiefluss ist radial ($\sim \frac{\vec{r}}{r}$).
 Energiefluss durch Raumwinkel $d\Omega = \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$ bei ϑ, φ im Abstand r (Faktor $\frac{1}{r^2}$ kürzt sich heraus)

$$dI(t, \vartheta, \varphi) = \frac{\mu_0}{16\pi^2 c} \cdot \omega^4 \cdot |\vec{m}_0|^2 \cdot \sin^2 \vartheta \cdot \cos^2\left(\omega \cdot \left(t - \frac{r}{c}\right)\right) d\Omega$$

Abstrahlung gemittelt über die Zeit:

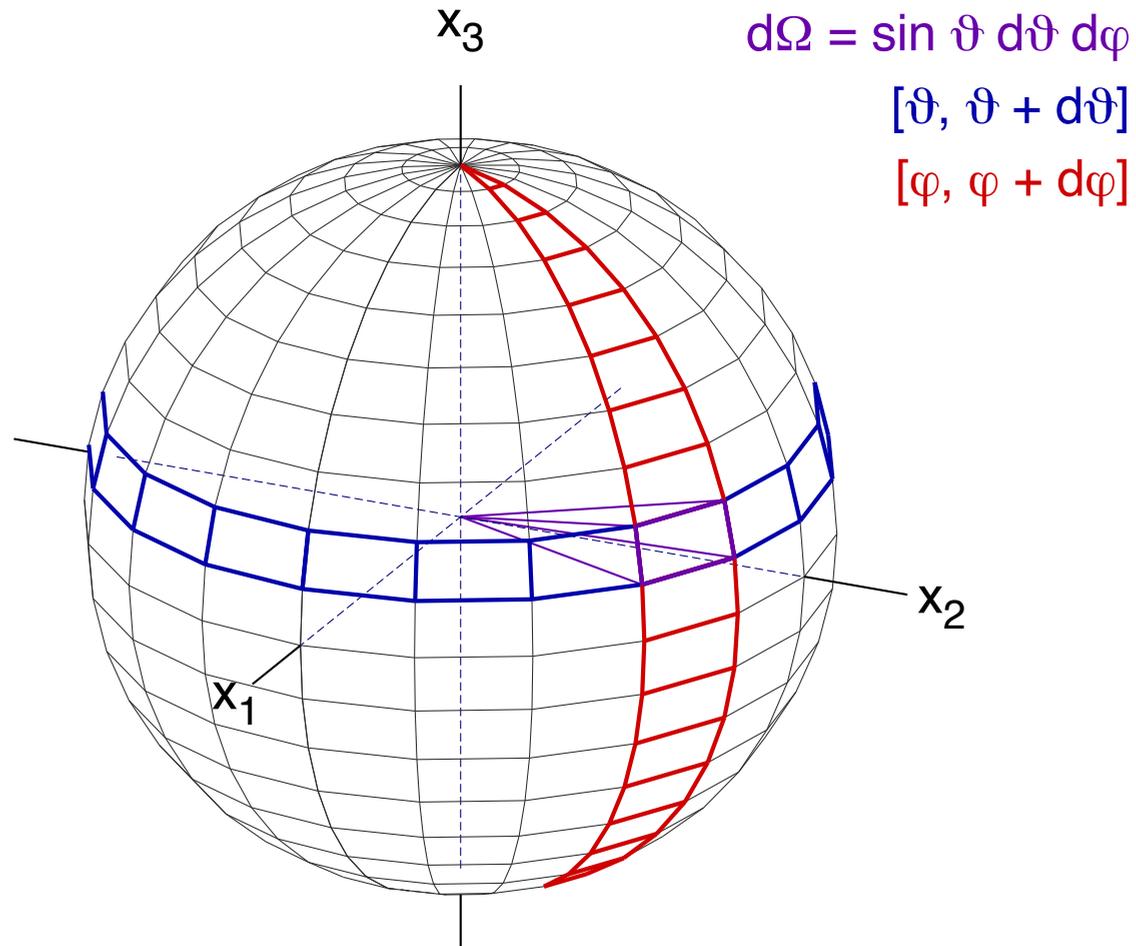
$$\frac{1}{T} \cdot \int_0^T \cos^2(\omega t) dt = \frac{1}{2}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega}$$

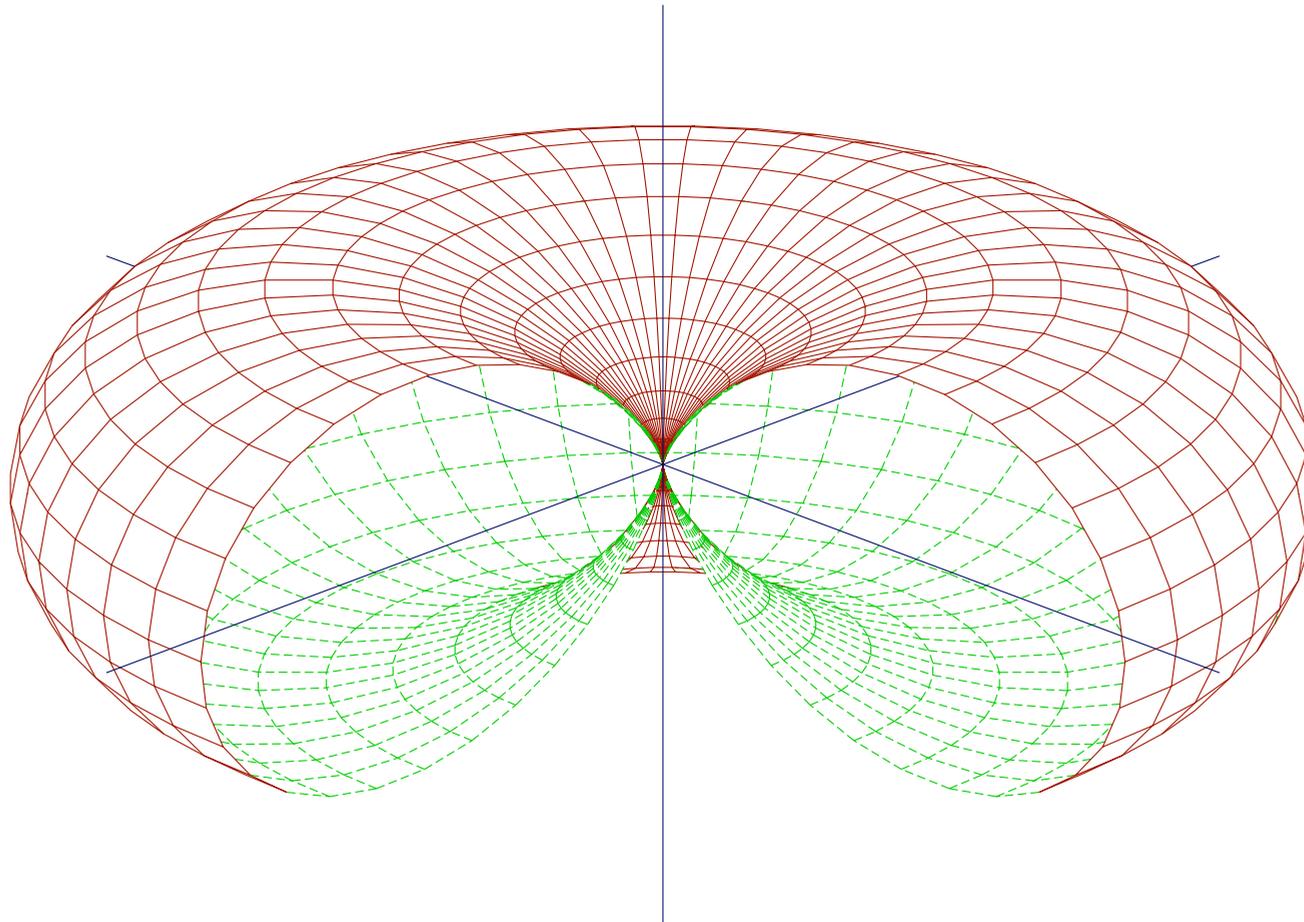
$$\overline{dI}(\vartheta, \varphi) = \frac{\mu_0}{32\pi^2 c} \cdot \omega^4 \cdot |\vec{m}_0|^2 \cdot \sin^2 \vartheta d\Omega$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin^2 \vartheta \cdot \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = 2\pi \cdot \frac{4}{3}$$

5.5.4. Zeitgemittelte Gesamtabstrahlung

$$\bar{I} = \frac{\mu_0}{12\pi c} \cdot \omega^4 \cdot |\vec{m}_0|^2$$





Polardiagramm der zeitlich gemittelten Abstrahlungsintensität eines schwingenden Dipols (Antenne)

Bemerkungen

- Bei gleichen $|\vec{m}_0|$ erfolgt eine stärkere Abstrahlung für hohe Frequenzen und damit kleine Wellenlängen. Diese Formel ist unter anderem wichtig um die blaue Farbe des Himmels zu erklären.
- Der bislang unterdrückte Term (2) lässt sich sowohl durch ein magnetisches Dipol-, als auch durch ein Quadrupolmoment ausdrücken. (magnetische Dipol- bzw. Quadrupolstrahlung)

6. Elektrodynamik in kontinuierlichen Medien

6.1. Vergleich mit dem Vakuumfall

Bisher wurden Ladungen und Ströme nur verteilt im ansonsten leeren Raum als Quellen eines elektromagnetischen Feldes betrachtet. Nun wenden wir uns den Fällen zu, in denen der umgebende Raum gefüllt mit einem kontinuierlichen Medium selbst elektrische und magnetische Eigenschaften hat, die das Feld beeinflussen. Dafür betrachten wir zunächst die Maxwell-Gleichungen (5.1.2):

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \epsilon_0 \vec{E} &= \varrho & \operatorname{div} \vec{B} &= 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\partial_t \vec{B} & \operatorname{rot} \frac{1}{\mu_0} \vec{B} &= \vec{j} + \partial_t \epsilon_0 \vec{E} \end{aligned}$$

und das Kraftgesetz:

$$\vec{K} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$$

Wir definieren weiter

$$\begin{aligned} \vec{D} &:= \epsilon_0 \vec{E} \\ \vec{H} &:= \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \end{aligned}$$

und ersparen uns damit die Proportionalitätskonstanten in den Gleichungen.

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{D} &= \varrho & \operatorname{div} \vec{B} &= 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\partial_t \vec{B} & \operatorname{rot} \vec{H} &= \vec{j} + \partial_t \vec{D} \\ & & \vec{K} &= q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} \end{aligned}$$

Bekannt ist, dass \vec{E} , die elektrische Feldstärke, und \vec{B} , die magnetische Induktion, für die Kraftwirkung auf Ladungsträger zuständig sind. \vec{D} und \vec{H} werden direkt durch die Quellenverteilung ρ und die Wirbel $\vec{j} + \partial\vec{D}$ bestimmt. Sie werden *Erregungsgrößen* genannt.

Experimentell entdeckt man

Die Anwesenheit kontinuierlicher Medien beeinflusst das Verhältnis zwischen den Erregungsgrößen und der elektrischen Feldstärke bzw. magnetischen Induktion.

Der einfachste Ansatz zur physikalischen Beschreibung besteht in der Einführung von relativen Konstanten, also Konstanten, die an ein Medium gebunden sind. Das führt zu

$$\vec{D} = \epsilon_0 \cdot \epsilon \cdot \vec{E}$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0 \cdot \mu} \cdot \vec{B}$$

ϵ relative Permittivität

μ relative Permeabilität

Dieser Ansatz funktioniert leider nur eingeschränkt und muss für den allgemeinen Fall modifiziert werden:

- Bei *anisotropen* Medien wird das skalare ϵ bzw. μ zu einem Tensor.
- Bei starken Feldern ist das Verhältnis zwischen den Erregungsgrößen und \vec{E} und \vec{B} nichtlinear.
- Die Beziehung zwischen \vec{D} bzw. \vec{E} und \vec{H} bzw. \vec{B} kann von der Vorgeschichte oder der Frequenz abhängen. Beispiele dafür sind
 - ▷ [Hysterese-Effekte](#)

- ▷ Ferromagnetika
- ▷ Ferroelektrika

Isotropie Bezeichnet die Unabhängigkeit einer Eigenschaft von der Richtung.

Aus Resultaten der Thermodynamik und Quantenmechanik lässt sich schließen, dass $\epsilon \geq 1$ und $\mu > 0$ sein müssen. Für $\mu > 1$ spricht man von paramagnetischen, für $\mu < 1$ von diamagnetischen Stoffen.

Eine weitere Auswirkung eines umgebenden Mediums besteht darin, dass Ladungsträger, die im elektromagnetischen Feld beschleunigt werden, durch Stöße mit den Bestandteilen der kontinuierlichen Medien abgebremst werden. Im stationären Fall ergibt sich in linearer Näherung das *Ohm'sche Gesetz*.

6.1.1. Ohm'sches Gesetz

$$\vec{j} = \sigma \cdot \vec{E}$$

σ Leitfähigkeit

- In anisotropen Medien ist σ ein Tensor.
- Bei zeitlich veränderlichen Feldern besteht im Allgemeinen eine Frequenzabhängigkeit.
- In starken Feldern verliert das Gesetz seine Gültigkeit, da die Relation zwischen \vec{j} und \vec{E} nichtlinear ist.

Zusammenfassung der Gleichungen

Die Maxwell-Gleichungen in Medien gelten universell.

6.1.2. Maxwell-Gleichungen

$$\begin{array}{ll} \operatorname{div} \vec{D} = \rho & \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E} = -\partial_t \vec{B} & \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \partial_t \vec{D} \end{array}$$

6.1.3. Kraftgesetz

$$\vec{K} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$$

wobei die Materialgleichungen wie folgt aussehen:

$$\begin{array}{lll} \vec{D} = \vec{D}(\vec{E}) & \text{mit dem einfachsten Fall} & \vec{D} = \epsilon_0 \cdot \epsilon \cdot \vec{E} \\ \vec{H} = \vec{H}(\vec{B}) & \text{mit dem einfachsten Fall} & \vec{H} = \frac{1}{\mu_0 \cdot \mu} \cdot \vec{B} \\ \vec{j} = \vec{j}(\vec{E}, \vec{B}) & \text{mit dem einfachsten Fall} & \vec{j} = \sigma \cdot \vec{E} \end{array}$$

6.2. Mikroskopische Theorie der Elektrodynamik in Kontinua

Es ist uns im Allgemeinen nicht möglich mit Messinstrumenten tatsächlich ein Feld zwischen einer geringen Anzahl an Ladungsträgern zu messen, weil die Abstände relativ klein sein müssen, damit sie überhaupt messbar miteinander

interagieren können. Um die physikalischen Betrachtungen realistischen Verhältnissen anzupassen, wollen wir deshalb Volumina von Würfeln mit einer Kantenlänge von etwa 100 Molekülen untersuchen. Ladungsträger können im mikroskopischen Maßstab in *freie* und *gebundene* Ladungen eingeteilt werden.

frei im Kontinuum beliebig beweglich

gebunden im Kontinuum nur bezüglich bestimmter Ruhelagen etwas verschiebbar

Ebenfalls aufgeteilt werden die Ladungsdichten in $\eta_{\text{frei}}(\vec{r}, t)$ und $\eta_{\text{geb}}(\vec{r}, t)$.

$$\begin{aligned}\eta_{\text{frei}} &= \sum_i q_i \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_i(t)) \\ \eta_{\text{geb}} &= \sum_n \eta_n(\vec{r}, t) \\ \eta_n(\vec{r}, t) &= \sum_j q_{nj} \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_{nj}(t)) \\ \vec{r}_{nj} &= \vec{s}_n(t) + \vec{d}_{nj}\end{aligned}$$

$\vec{r}_i(t)$ Bahn der i -ten freien Punktladung

$\eta_n(\vec{r}, t)$ Ladungsdichte des n -ten Moleküls

$\vec{r}_{nj}(t)$ Bahn der Ladung j im Molekül n

$\vec{s}_n(t)$ Position des Molekülmittelpunktes n

Wir führen eine Mittelungsoperation über die besprochenen Volumina ein und definieren für eine physikalische Größe $a(\vec{r}, t)$

$$\langle a(\vec{r}, t) \rangle := \int_V f(\vec{y}) \cdot a(\vec{r} + \vec{y}, t) d^3\vec{y}$$

wobei $f(\vec{y})$ eine Funktion ist, die im Inneren von V konstant ist und am Rand ∂V schnell gegen Null geht. Diese Funktion repräsentiert in gewissem Sinne unser Messinstrument, das alle physikalischen Einheiten von a gleichberechtigt in V gleichzeitig misst. Sie erfülle außerdem die Normierung

$$\int_V f(\vec{y}) d^3\vec{y} := 1$$

$$\Rightarrow \langle \eta_n(\vec{r}, t) \rangle = \sum_j q_{nj} \cdot f(|\vec{r} - \vec{r}_{nj}(t)|) = \sum_j q_{nj} \cdot f(|\vec{r} - \vec{s}_n|) - \sum_j q_{nj} \cdot \vec{d}_{nj} \cdot \nabla f(|\vec{r} - \vec{s}_n|) + \dots$$

Wir definieren

$$Q_n := \sum_j q_{nj} \quad \text{Ladung von Molekül } n$$

$$\vec{p}_n := \sum_j q_{nj} \cdot \vec{d}_{nj} \quad \text{Dipolmoment von Molekül } n$$

Also

$$\langle \eta_n \rangle = Q_n f(|\vec{r} - \vec{s}_n|) - \vec{p}_n \cdot \nabla f(|\vec{r} - \vec{s}_n|) + \dots$$

$$\Rightarrow \langle \eta(\vec{r}, t) \rangle = \underbrace{\sum_i q_i f(|\vec{r} - \vec{r}_i(t)|)}_{\text{freie Träger}} + \sum_n Q_n f(|\vec{r} - \vec{s}_n(t)|) - \nabla \cdot \sum_n \vec{p}_n f(|\vec{r} - \vec{s}_n(t)|) + \dots$$

Makroskopische Ladungsdichte

$$\varrho(\vec{r}, t) := \underbrace{\sum_i q_i f(|\vec{r} - \vec{r}_i(t)|)}_{\text{freie Träger}} + \underbrace{\sum_n Q_n f(|\vec{r} - \vec{s}_n(t)|)}_{\text{geladene Moleküle}}$$

Makroskopische Dipoldichte

$$\vec{P}(\vec{r}, t) := \sum_n \vec{p}_n f(|\vec{r} - \vec{s}_n(t)|)$$

Das bedeutet

6.2.1. Mittlere Ladungsdichte

$$\langle \eta \rangle = \varrho(\vec{r}, t) - \nabla \vec{P}(\vec{r}, t) + \dots$$

Sei nun $\vec{e}(\vec{r}, t)$ das mikroskopische elektrische Feld. Dann folgt für die makroskopische Variante

$$\vec{E}(\vec{r}, t) := \langle \vec{e}(\vec{r}, t) \rangle$$

und damit

$$\operatorname{div} \vec{E}(\vec{r}, t) = \langle \operatorname{div} \vec{e}(\vec{r}, t) \rangle = \left\langle \frac{1}{\epsilon_0} \eta \right\rangle = \frac{1}{\epsilon_0} \varrho - \frac{1}{\epsilon_0} \operatorname{div} \vec{P} + \dots$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \varrho \quad \text{mit} \quad \vec{D} = \epsilon_0 \cdot \vec{E} + \vec{P}$$

Falls \vec{P} nur linear von \vec{E} abhängt, ist es in der Form $\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E}$ zu schreiben, mit $\epsilon = 1 + \chi$, wobei χ *Suszeptibilität* genannt wird.

Suszeptibilität Eine Materialeigenschaft, welche die Fähigkeit der elektrischen Polarisierung in einem externen elektrischen Feld angibt.

Eine analoge Konstruktion funktioniert für die magnetischen Größen.

6.3. Elektromagnetische Wellen in kontinuierlichen Medien

Die Ableitung der Wellengleichung erfolgt analog zum Vakuum-Fall, wenn ϵ_0 durch $\epsilon_0 \cdot \epsilon$ und μ_0 durch $\mu_0 \cdot \mu$ ersetzt werden. Dann folgt für die Lichtgeschwindigkeit

6.3.1. Phasengeschwindigkeit in Medien

$$v_P = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0 \epsilon \mu}} = \frac{c}{\sqrt{\mu \epsilon}} = \frac{c}{n}$$

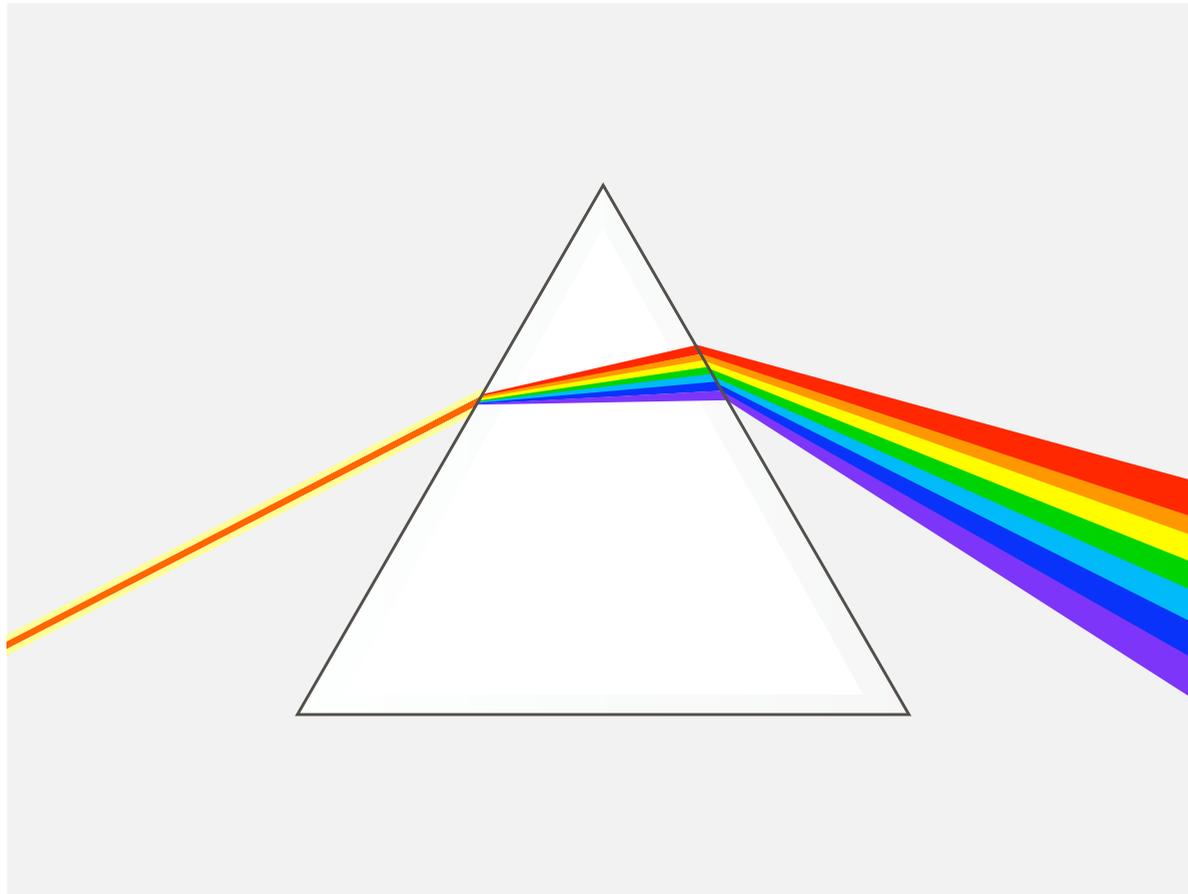
v_P Phasengeschwindigkeit

n Brechungsindex

Im Allgemeinen ist der Brechungsindex frequenzabhängig, womit sich Dispersionseffekte erklären lassen.

Als Konsequenz folgt für den allgemeinen Fall der Ausbreitung von Wellenpaketen als Superposition ebener Wellen

$$\omega(\vec{k}) = \frac{c}{n(\omega)} \cdot |\vec{k}|$$



Dispersion am Prisma

Die Beziehung zwischen ω und \vec{k} ist nichtlinear.

Wir wollen nun untersuchen wie sich ein Wellenpaket in einem isotropen Medium verhält. In einem solchen Medium ist ω nur von der Länge des Wellenzahlvektors \vec{k} abhängig.

Sei

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \int \vec{E}(\vec{k}) \cdot e^{i \cdot (\vec{k}\vec{r} - \omega(\vec{k})t)} d^3k$$

und $\vec{E}(\vec{k})$ nur in der Umgebung von \vec{k}_0 von Null verschieden. Dann gilt in linearer Näherung, dass dort

$$\begin{aligned} \omega(\vec{k}) &= \omega(\vec{k}_0) + (\vec{k} - \vec{k}_0) \cdot \frac{\vec{k}_0}{|\vec{k}_0|} \cdot \omega'(|\vec{k}_0|) + \dots \\ \Rightarrow \vec{E}(\vec{r}, t) &= \int \vec{E}(\vec{k}) \cdot e^{i \cdot (\vec{k}\vec{r} - \omega(|\vec{k}_0|) \cdot t - \frac{(\vec{k} - \vec{k}_0) \cdot \vec{k}_0}{|\vec{k}_0|} \cdot \omega'(|\vec{k}_0|)t + \dots)} d^3k \\ &= e^{i \cdot (|\vec{k}_0|\omega' - \omega(|\vec{k}_0|)) \cdot t} \cdot \int \vec{E}(\vec{k}) \cdot e^{i\vec{k} \cdot (\vec{r} - \frac{\vec{k}_0}{|\vec{k}_0|} \cdot \omega' t)} d^3k \\ &= e^{i \cdot (|\vec{k}_0|\omega' - \omega(|\vec{k}_0|)) \cdot t} \cdot \vec{E}(\vec{r} - \frac{\vec{k}_0}{|\vec{k}_0|} \cdot \omega' t, 0) \end{aligned}$$

Das Paket pflanzt sich also mit folgender Geschwindigkeit fort:

6.3.2. Gruppengeschwindigkeit in Medien

$$v_G = \frac{d\omega}{dk}$$

v_G Gruppengeschwindigkeit

Bei $\omega = c \cdot |\vec{k}|$ (also im Vakuum) ist $v_G = v_P = c$. In kontinuierlichen Medien ist allgemein $v_P \neq v_G$.

- v_P kann größer als c werden, da Brechungsindizes $n < 1$ erlaubt sind.
- v_G bleibt kleiner als c , wenn $n > 1$ ist und bei normaler Dispersion $\frac{dn}{d\omega} > 0$. Bei kleinerem Brechungsindex kann auch die Gruppengeschwindigkeit größer als c werden, allerdings sollten wir uns an der Stelle klarmachen, dass die Gruppengeschwindigkeit nur linear angenähert wurde. Um wirklich Informationen zu übertragen, muss so etwas wie ein Impuls ausgestrahlt werden, der einer Überlagerung von sehr vielen ebenen Wellen entspricht. In diesem Fall wird die Näherung zunehmend ungenau.
- Für die Signalausbreitung relevant ist die Signalgeschwindigkeit v_S . Es lässt sich zeigen, dass unter sehr allgemeinen Voraussetzungen $v_S \leq c$ ist.

Signalgeschwindigkeit Ausbreitungsgeschwindigkeit einer Trennfläche zwischen einem Gebiet mit $\vec{E} = \vec{0}$ und $\vec{E} \neq \vec{0}$.

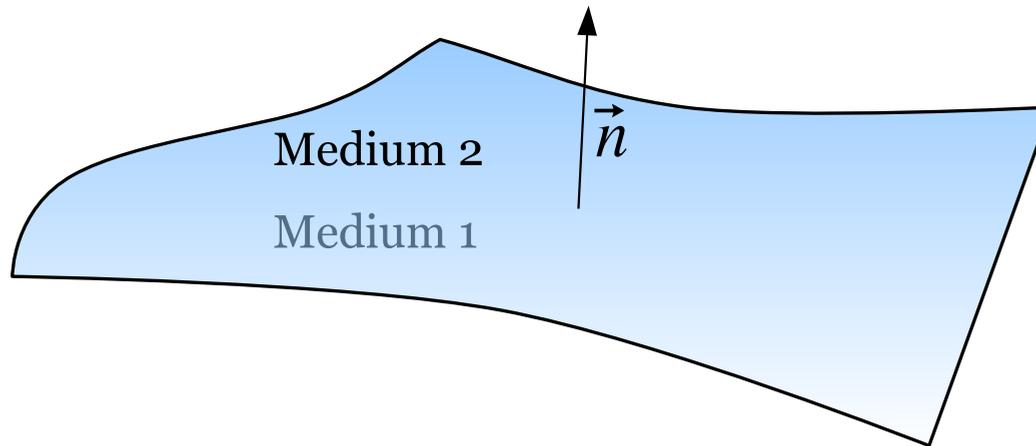
Verhalten elektromagnetischer Felder an Trennflächen verschiedener Medien

Im statischen, zeitunabhängigen Fall gilt (4.1.4)

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{D} &= \rho & \operatorname{rot} \vec{E} &= 0 \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0 & \operatorname{rot} \vec{H} &= \vec{j} \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \int_V \rho d^3r &\stackrel{(2.1.1)}{=} \int_{\partial V} \vec{D} d\vec{f} & 0 &\stackrel{(2.1.2)}{=} \int_{\partial F} \vec{E} d\vec{r} \\ 0 &\stackrel{(2.1.1)}{=} \int_{\partial V} \vec{B} d\vec{f} & \int_F \vec{j} d\vec{f} &\stackrel{(2.1.2)}{=} \int_{\partial F} \vec{H} d\vec{r} \end{aligned}$$



Wir betrachten nun die Trennfläche zwischen zwei Medien, die zur besseren Unterscheidung nummeriert sind. Der Vektor \vec{n} sei der Normalenvektor auf die Grenzfläche. Aus den Gleichungen folgt dann analog zu 3.3.1

$$\begin{aligned}(\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \cdot \vec{n} &= \sigma \\ (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \cdot \vec{t} &= 0, \forall \vec{t} \perp \vec{n}\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}(\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot \vec{n} &= 0 \\ (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) \cdot \vec{t} &= \vec{j}_F \cdot (\vec{t} \times \vec{n}), \forall \vec{t} \perp \vec{n}\end{aligned}$$

Dabei ist σ die Flächenladungsdichte und \vec{j}_F die flächenhafte Stromdichte in der Grenzfläche.

Falls gesichert ist, dass sich keine flächenhaften Ladungen und Ströme ausbilden ($\sigma = 0, \vec{j}_F = \vec{0}$), sind sowohl die Normalkomponenten von \vec{D} und \vec{B} , als auch die Tangentialkomponenten von \vec{E} und \vec{H} stetig.

Im zeitabhängigen Fall gilt diese Aussage ebenfalls, falls $\partial_t \vec{B}$ und $\partial_t \vec{D}$ auf der Grenzfläche keine Singularitäten aufweisen.

7. Relativistisch invariante Formulierung

Wie wir schon an mehreren Stellen gesehen haben, „kennt“ die Elektrodynamik die spezielle Relativitätstheorie. Deshalb erwarten wir, dass es keiner Modifikation (wie etwa bei der Mechanik) bedarf, um die Elektrodynamik relativistisch zu machen. Die Maxwellgleichungen sollten bezüglich der Lorentztransformation forminvariant sein. Das geht sicher nur, wenn dabei das elektrische und das magnetische Feld ineinander transformiert werden. Zum gleichen Schluss kommt man mit Blick auf das Kraftgesetz von Seite 79. Gleichungen zwischen Vierervektoren und Tensoren sind automatisch in ihrer Form lorentzinvariant. Deshalb versuchen wir die Informationen, die in den Maxwell-Gleichungen enthalten sind, durch Vierervektoren bzw. Tensoren zu beschreiben.

Wir verwenden im Folgenden die Konvention, dass über lateinische Indizes, wie z. B. a oder b von 1 bis 3 summiert wird (die drei Raumkomponenten), während über griechische Indizes, wie z. B. μ oder ν von 0 bis 3 summiert wird (drei Raumkomponenten plus eine Zeitkomponente).

Minkowski-Raum Ein vierdimensionaler Vektorraum, der die räumlichen Koordinaten mit der Zeit verknüpft. Vergleiche dazu Theoretische Physik 1.

\vec{E} - und \vec{B} -Feld benutzen 6 Koordinaten, sind also ungeeignet für die Konstruktion eines Vierervektors. Das Vektorpotential \vec{A} und das skalare Potential ϕ beinhalten ebenfalls alle Informationen, um \vec{E} - und \vec{B} -Feld zu rekonstruieren und benötigen nur $3 + 1 = 4$ Komponenten. Es bietet sich also an aus den Potentialen einen Vierervektor zu konstruieren.

$$A_\mu := \left(-\frac{\phi}{c}, A_1, A_2, A_3 \right)$$

bzw.

$$A^\mu := \left(\frac{\phi}{c}, A_1, A_2, A_3 \right)$$

Beachte: Metrik $\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $x^0 = c \cdot t$

$$F_{\mu\nu} := \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow F_{0n} &= \partial_0 A_n - \partial_n A_0 = \frac{1}{c} \partial_t A_n + \frac{1}{c} \partial_n \phi \stackrel{(5.2)}{=} -\frac{E_n}{c} \\ F_{mn} &= \partial_m A_n - \partial_n A_m = \epsilon_{mnl} B_l \end{aligned}$$

d. h.

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1/c & -E_2/c & -E_3/c \\ E_1/c & 0 & B_3 & -B_2 \\ E_2/c & -B_3 & 0 & B_1 \\ E_3/c & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$F_{\mu\nu}$ enthält also die Information über die elektrische und magnetische Feldstärke und heißt deshalb *Feldstärkensor*.

$$\begin{aligned} \partial^\mu F_{\mu\nu} &= -\partial_0 F_{0\nu} + \partial_m F_{m\nu} \\ \Rightarrow \partial^\mu F_{\mu 0} &= \partial_m F_{m0} = \partial_m \frac{E_m}{c} = \frac{\operatorname{div} \vec{E}}{c} = \frac{\rho}{\epsilon_0 c} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\partial^\mu F_{\mu n} &= -\partial_0 F_{0n} + \partial_m F_{mn} = -\frac{1}{c} \left(-\frac{E_n}{c} \right) + \epsilon_{mnl} \partial_m B_l \\ &= \frac{1}{c^2} \partial_t E_n - (\text{rot } \vec{B})_n = -\mu_0 j_n\end{aligned}$$

Mit

$$\begin{aligned}j_\mu &= (-c\rho, j_1, j_2, j_3) \\ j^\mu &= (c\rho, j_1, j_2, j_3)\end{aligned}$$

sind $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ und $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \cdot \vec{E}$ kodiert in

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = -\mu_0 j_\nu$$

Die anderen beiden Maxwellgleichungen $\text{div } \vec{B} = 0$ und $\text{rot } \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$ sind durch den Potentialansatz schon automatisch erfüllt. Sie lassen sich noch explizit kodieren in

$$\partial^\mu {}^*F_{\mu\nu} = 0$$

und

$${}^*F_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \cdot \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\alpha\beta}$$

Unter Lorentztransformation transformieren sich die Koordinaten: $x^{\mu'} = A^\mu_{\nu'} x^\nu$

$$\Rightarrow F'^{\mu\nu} = A^\mu_\alpha A^\nu_\beta F^{\alpha\beta}$$

Spezialfall:

$$A^\mu_{\nu'} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & \frac{-v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & 0 & 0 \\ \frac{-v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow F'^{01} &= A^0_a A^1_b F^{ab} = A^0_0 A^1_1 F^{01} + A^0_1 A^1_0 F^{10} \\ &= \frac{1}{1-v^2/c^2} F^{01} + \frac{v^2/c^2}{1-v^2/c^2} F^{10} = F^{01} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F'^{02} &= A^0_a A^2_b F^{ab} = A^0_0 A^2_2 F^{02} + A^0_1 A^2_1 F^{12} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \cdot F^{02} - \frac{v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \cdot F^{12} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow F'^{02} = \frac{F^{02} - v/c \cdot F^{12}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

analog

$$F'^{03} = \frac{F^{03} - v/c \cdot F^{13}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

d. h.

$$\begin{aligned} E'_1 &= E_1 \\ E'_2 &= \frac{E_2 - v \cdot B_3}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ E'_3 &= \frac{E_3 + v \cdot B_2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{aligned}$$

und analog

$$\begin{aligned}
 B'_1 &= B_1 \\
 B'_2 &= \frac{B_2 + v^2/c^2 \cdot E_3}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\
 B'_3 &= \frac{B_3 - v^2/c^2 \cdot E_2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}
 \end{aligned}$$

Um kompakte Transformationen zu erhalten, die nicht auf die einzelnen Komponenten Bezug nehmen, bemerken wir, dass mit $\vec{v} = (v \ 0 \ 0)^T$

$$\begin{aligned}
 (\vec{v} \times \vec{B})_1 &= 0 \\
 (\vec{v} \times \vec{B})_2 &= v_3 B_2 - v_1 B_3 = -v \cdot B_3 \\
 (\vec{v} \times \vec{B})_3 &= v_1 B_2 - v_2 B_1 = v \cdot B_2
 \end{aligned}$$

d. h.

$$\begin{aligned}
 E'_1 &= \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \cdot \left(E_1 \cdot \sqrt{1 - v^2/c^2} + (\vec{v} \times \vec{B})_1 \right) \\
 E'_2 &= \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \cdot \left(E_2 + (\vec{v} \times \vec{B})_2 \right) \\
 E'_3 &= \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \cdot \left(E_3 + (\vec{v} \times \vec{B})_3 \right)
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} E_1 \sqrt{1 - v^2/c^2} \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} &= \vec{E} + \begin{pmatrix} (\sqrt{1 - v^2/c^2} - 1) \cdot E_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \vec{E} + (\sqrt{1 - v^2/c^2} - 1) \cdot \frac{\vec{v} \cdot (\vec{E} \cdot \vec{v})}{v^2} \end{aligned}$$

unsere Formeln in die folgende Form gebracht werden können: (\vec{B} folgt dabei völlig analog)

$$\begin{aligned} \vec{E}' &= \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \cdot \left(\vec{E} + (\sqrt{1 - v^2/c^2} - 1) \cdot \frac{\vec{v} \cdot (\vec{E} \cdot \vec{v})}{v^2} + \vec{v} \times \vec{B} \right) \\ \vec{B}' &= \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \cdot \left(\vec{B} + (\sqrt{1 - v^2/c^2} - 1) \cdot \frac{\vec{v} \cdot (\vec{B} \cdot \vec{v})}{v^2} - \frac{\vec{v} \times \vec{E}}{c^2} \right) \end{aligned}$$

Glossar

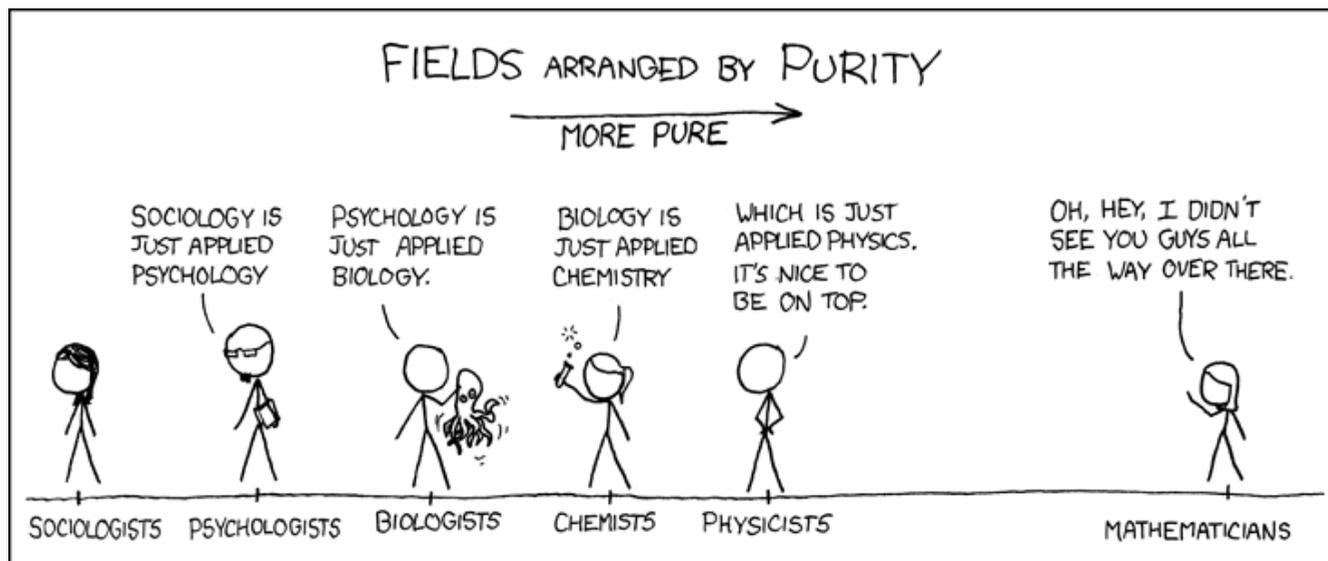
δ_{ij}	Kronecker-Delta: $= \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
ϵ	Relative Permittivität: stoffabhängiger Tensor, der die feldschwächenden Effekte innerhalb elektrisch isolierender Materialien kennzeichnet. Wird auch als Dielektrizitätskonstante bezeichnet.
ϵ_{ijk}	Levi-Civita-Symbol: $= \begin{cases} +1 & \text{falls } (i, j, k) : (1, 2, 3), (3, 1, 2) \text{ oder } (2, 3, 1) \\ -1 & \text{falls } (i, j, k) : (3, 2, 1), (1, 3, 2) \text{ oder } (2, 1, 3) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
ϵ_0	Elektrische Feldkonstante im Vakuum: $\frac{1}{\mu_0 c^2}$
λ	Wellenlänge
μ	Relative Permeabilität: stoffabhängiger Tensor, der die Durchlässigkeit eines Materials für ein Magnetfeld quantifiziert.
μ_0	Magnetische Feldkonstante im Vakuum: $4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{A}^2 \cdot \text{s}^2}$
ν	Frequenz einer Schwingung
ω	Winkelgeschwindigkeit: bei Schwingungen ist $\omega = 2\pi\nu$
ϕ	Elektrisches Potential; negativer Gradient von ϕ ergibt die elektrische Feldstärke
σ	Flächenladungsdichte: Ladung pro Fläche
ρ	Ladungsdichte: Ladung pro Volumen
\vec{A}	Vektorpotential; die Rotation von \vec{A} ergibt \vec{B}
\vec{B}	Magnetische Induktion
\vec{k}	Wellenzahlvektor: zeigt in Ausbreitungsrichtung der Welle und $ \vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda}$
\vec{j}	Stromdichte: Verhältnis von Stromstärke zu Fläche
\vec{E}	Elektrische Feldstärke
\vec{S}	Poynting Vektor: Vektor der Energieflussdichte

-
- n Brechungsindex: Verhältnis zwischen der Phasengeschwindigkeit des Lichtes im Vakuum und der im jeweiligen Medium.
- v_G Gruppengeschwindigkeit: unscharfe Näherung an die Geschwindigkeit eines Wellenpaketes als Ganzes.
- v_P Phasengeschwindigkeit: Ausbreitungsgeschwindigkeit der Nulldurchgänge bei Wellen zu einer bestimmten Frequenz.
- Dirichlet Randwertproblem Liegt vor, wenn die Lösung einer partiellen Differentialgleichung in einem Gebiet V durch die Vorgabe von Werten für die gesuchte Funktion auf dem Rand ∂V eindeutig bestimmt werden kann.
- Divergenz Skalarfeld, das zu einem Vektorfeld, falls dieses als Strömungsfeld interpretiert wird, die Tendenz angibt, ob ein Teilchen in der Nähe zu diesem Punkt hin- oder von diesem Punkt wegfließt.
- Eichtheorie Physikalische Theorie, deren Bewegungsgleichungen aus einer Wirkung folgen, die invariant unter Eichtransformation ist.
- Eichtransformation Transformation von Feldern, in der eine frei wählbare Funktion als Transformationsparameter auftritt.
- Energieflussdichte Vektor, der die Dichte und die Richtung des Energietransportes in einem elektromagnetischen Feld beschreibt.
- Feldlinie Kurve, die stets tangential zur Feldstärke läuft.
- Funktional Abbildung von Testfunktionen auf Zahlen.
- Gradient Vektorfeld, welches die Änderungsrate und die Richtung des größten Anstiegs eines Skalarfeldes angibt.
- Green'sche Funktion Lösung des Dirichlet'schen Randwertproblems für eine Punktquelle.
- Isotropie Unabhängigkeit einer Eigenschaft von der Richtung.
- Lineare Annäherung Entwicklung der Taylorreihe bis zum Term mit der ersten Ableitung.
- Neumann Randwertproblem Bestimmung von Lösungen partieller Differentialgleichungen, die Bedingungen erfüllen, die an die Normalableitung am jeweiligen Rand des Definitionsbereiches gestellt werden.
- Orthonormalbasis Satz von Vektoren, die alle die Norm 1 haben und zueinander orthogonal sind. Weiter lassen sich alle Vektoren eines euklidischen Vektorraumes als Linearkombination der Basisvektoren darstellen.
- Partielle Ableitung Ableitung einer Funktion mit mehreren Argumenten nach einem dieser Argumente.
-

- Polarisation Eigenschaft elektromagnetischer Wellen, welche die Richtung des elektrischen Feldvektors im zeitlichen Verlauf beschreibt.
- Rotation Vektorfeld, welches zu einem Vektorfeld, falls dieses als Strömungsfeld interpretiert wird, die Drehgeschwindigkeit und -achse eines mitschwimmenden Teilchens angibt.
- Suszeptibilität Materialeigenschaft, welche die Fähigkeit der elektrischen Polarisierung in einem externen elektrischen Feld angibt.
- Tensor Verallgemeinerung des Vektoren- bzw. Matrizenbegriffes auf abzählbare Indexmengen.
- Testfunktion Beliebig oft differenzierbare Funktion, die für $|x| \rightarrow \infty$ schneller als jede Potenz gegen Null geht.
- Äquipotentialfläche Menge aller Punkte gleichen Potentials.
- δ -Distribution Grenzfall einer beliebig hohen und schmalen Funktion, deren Fläche den Flächeninhalt 1 besitzt.
- Δ -Operator Summe der zweiten partiellen Ableitungen $\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$.

Elektrodynamik im Supermarkt

- Dr. Harald Dorn [„dazu bin ich ja da“] für die gute, wenn auch unglaublich, unvorstellbar schwere Vorlesung, und für die Kooperation bezüglich des Skriptes. Sie sind echt knorke.
- Andreas Kunert [„die Schriftart ist gut, wenn man sie nicht merkt“] für die kompetente Unterstützung und Beratung bei der Typographie dieses Dokumentes.
- Stefan Koch [„am besten fand ich die Stelle mit dem Drachen“] für die 10 Seiten Skript, die hier Eingang gefunden haben.
- Wikipedia [„freies Wissen für alle: unbezahlbar“] für den unerschöpflichen Fundus an Wissen.



(Quelle: xkcd.com)