Kapitel 2

Intervall-Petrinetze

In diesem Kapitel werden wir die Intervall-Petrinetze studieren: Nach der Einführung dieser zeitabhängigen Petrinetze werden wir Variationen der Regeln, die die Zustandsänderungen definieren, diskutieren. Anschließend beweisen wir die Gültigkeit eines Algorithmus zur Reduktion des Zustandsraumes eines beliebigen Intervall-Petrinetzes und studieren das dynamische Verhalten des zeitabhängigen Petrinetzes sowohl in qualitativer als auch in quantitativer Hinsicht.

2.1 Grundbegriffe

Intervall-Petrinetze entstehen aus klassischen Petrinetzen, indem jeder Transition t einen Intervall $[a_t, b_t]$ zugeordnet wird. Ist eine Transition konzessioniert, darf sie nicht sofort schalten. Sie darf frühestens nach a_t Zeiteinheiten schalten und muss nach spätestens b_t Zeiteinheiten geschaltet haben, es sei denn, sie hat ihre Konzession verloren. Dies geschieht, wenn eine andere Transition schaltet, die mit t einen gemeinsamen Vorplatz hat. Dabei sind die Zeitpunkte a_t und b_t relativ zu der letzten Konzessionierung von t. Die Zeit a_t ist also die frühest mögliche Schaltzeit für t und wird deshalb *earliest firing time* von t (kurz: $eft(t)$) genannt. b_t ist die spätest möglich Schaltzeit für t und heißt *latest firing time* von t (kurz: $lft(t)$). Die Zeit wird mit reellen Zahlen modelliert, wobei die Intervallgrenzen nichtnegative rationale Zahlen sind, bzw. kann b_t auch ∞ sein. Das Schalten einer Transition findet zeitlos statt.

Definition 2.1 (Intervall-Petrinetz) *Das 6-Tupel* $\mathcal{Z} = (P, T, F, V, m_0, I)$ *heißt Intervall-Petrinetz (kurz: IPN), falls*

- *das 5-Tupel* $S(\mathcal{Z}) = (P, T, F, V, m_0)$ *ein Petrinetz ist und*
- $I : T \longrightarrow \mathbb{Q}_0^+ \times (\mathbb{Q}_0^+ \cup \{\infty\})$ *die Intervallfunktion ist mit* $I_1(t) \leq I_2(t)$ *für jedes* $t \in T$, *wobei* $I(t) = (\, I_1(t)\, ,\, I_2(t)\,)$.

Beispiel 2.1

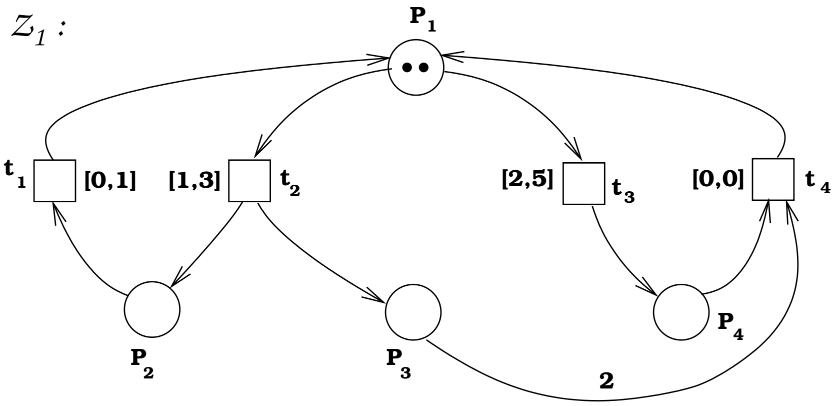


Abbildung 2.1: Das Intervall-Petrinetz $\mathcal{Z}_1$

Das klassische (zeitlose) Petrinetz $S(\mathcal{Z})$ nennen wir das *Skelett* von $\mathcal{Z}$. Durch eine (vielfache) Verkleinerung der Zeiteinheit kann erreicht werden, dass alle Intervallgrenzen natürliche Zahlen sind bzw. ∞. Der größte, passende „Verkleinerungsfaktor" ist das kgV aller Grenzen der Intervalle, ausgenommen ∞. Die neuen Intervallgrenzen erhalten wir, indem die alten mit dem „Verkleinerungsfaktor" multipliziert werden. Offensichtlich sind die neuen Intervallgrenzen natürliche Zahlen. Somit sei ab sofort o.B.d.A. der Wertebereich der Intervallfunktion die Menge $\mathbb{N} \times (\mathbb{N} \cup \{\infty\})$.

Mit der zusätzlichen Einführung des Faktors Zeit ist eine Markierung nicht ausreichend, um vollständig die (momentane) Situation in einem Intervall-Petrinetz zu beschreiben. Der Grund dafür ist, dass die Verteilung der Marken auf den Plätzen die Konzessionierung bzw. Nichtkonzessionierung der Transitionen bestimmt. Damit liefert eine Markierung die Information, welche Transitionen bei ihr konzessioniert sind. Über die Dauer der Konzessionierung erhält man jedoch keine Informationen. Deshalb wird eine weitere Markierung eingeführt. Sie ordnet jeder konzessionierten Transition die Zeit zu, die seit ihrer letzten Konzessionierung vergangen ist. Transitionen, die nicht konzessioniert sind, ordnet sie den Wert $\sharp$ zu. Da die erste Markierung sich auf die Situation der Plätze bezieht, nennen wir sie jetzt *Platzmarkierung* (kurz: *p–Markierung*). Die zweite, die die Situation der Transitionen beschreibt, heißt *Transitionsmarkierung* (kurz: *t–Markierung*). Das Paar (p-Markierung, t-Markierung), *Zustand* genannt, kann jetzt vollständig eine momentane Situation im zeitabhängigen Petrinetz beschreiben. Die exakten Definitionen sind:

Definition 2.2 (p-Markierung) *Sei P die Platzmenge eines Intervall-Petrinetzes $\mathcal{Z}$. Jede Funktion $m : P \longrightarrow \mathbb{N}$ heißt p-Markierung in $\mathcal{Z}$.*

Offensichtlich ist eine p-Markierung im Intervall-Petrinetz $\mathcal{Z}$ eine Markierung im klassischen Petrinetz $S(\mathcal{Z})$.

Definition 2.3 (t-Markierung) *Sei T die Transitionsmenge eines Intervall-Petrinetzes $\mathcal{Z}$. Jede Funktion $h : T \longrightarrow \mathbb{R}_0^+ \cup \{\sharp\}$ heißt t-Markierung in $\mathcal{Z}$.*

Definition 2.4 (Zustand) *Sei $\mathcal{Z} = (P, T, F, V, m_0, I)$ ein Intervall-Petrinetz, m eine p-Markierung und h eine t-Markierung in $\mathcal{Z}$. Dann heißt das Paar $z := (m, h)$ ein Zustand in $\mathcal{Z}$, falls*

- $\forall t \; (\; (t \in T \wedge t^- \not\leq m) \;\longrightarrow\; h(t) = \#).$
- $\forall t \; (\; (t \in T \wedge t^- \leq m) \;\longrightarrow\; (h(t) \in \mathbb{R}_0^+ \wedge \; h(t) \leq lft(t)) \;).$

Wie zu sehen ist, kann nicht jedes beliebige Paar aus einer p-Markierung und einer t–Markierung einen Zustand im Intervall-Petrinetz definieren. Wir nennen nur solche Paare (m, h) einen Zustand, die zueinander passen. Dies ist der Fall, wenn die Zeit $h(t)$ einer Transition eine bestimmte Zeit (und nicht $\sharp$) genau dann anzeigt, wenn sie bei m konzessioniert ist. Darüber hinaus betrachten wir für jede Transition die Zeit bis zu ihrer spätest möglichen Schaltzeit. Das stellt keine Einschränkung der Allgemeinheit dar.

Den Zustand $z_o := (m_o, h_o)$ mit $h_o(t) := \begin{cases} 0 & , \text{ falls} \quad t^- \leq m_0 \\ \# & , \text{ falls} \quad t^- \not\leq m_0 \end{cases}$ nennen wir *Anfangszustand* von $\mathcal{Z}$.

Als Anfangszustand kann man natürlich auch andere Zeiten für die t-Markierung wählen. Wie wir später sehen werden, brauchen wir andere Anfangszustände bei der Modellierung und Analyse metabolischer Systeme.

Bis jetzt haben wir die statische Seite eines Intervall-Petrinetzes eingeführt. Die Dynamik wird, wie bereits bei den klassischen Petrinetzen, durch die Schaltregel festgelegt. Eine momentane Situation kann sich in einem Intervall-Petrinetz ändern, indem sich die p-Markierung oder die t-Markierung ändert. Diese Änderung der p-Markierung wird, wie bei den klassischen Petrinetzen, durch Schalten von Transitionen erreicht. Im Allgemeinen ändert sich dabei auch die t-Markierung. Darüber hinaus ändert sich die t-Markierung eines Zustandes (und damit der Zustand) auch, wenn nur Zeit vergeht.

Bevor wir die Zustandsänderungsregeln definieren, führen wir noch die Bezeichnung *schaltbereite* Transition ein. Damit soll der Begriff *konzessionierte* Transition in zwei Stufen verfeinert werden: Transitionen, die konzessioniert sind, aber ihre eft noch nicht erreicht haben, und Transitionen, die konzessioniert sind, und ihre eft jedoch bereits schon erreicht oder überschritten haben:

Definition 2.5 (Schaltbereit) *Eine Transition t in einem Intervall-Petrinetz $\mathcal{Z}$ heißt schaltbereit in dem Zustand $z = (m, h)$, falls*

- *t konzessioniert in $S(\mathcal{Z})$ ist und*
- *$h(t) \geq eft(t)$.*

1. Zustandsänderungsregel:

Definition 2.6 (Schalten) *Sei $\hat{t}$ eine Transition und $z = (m, h)$ ein Zustand in dem Intervall-Petrinetz $\mathcal{Z}$. Dann kann $\hat{t}$ im Zustand z schalten, falls $\hat{t}$ schaltbereit in z ist. Nach dem Schalten befindet sich das Intervall-Petrinetz in dem Nachfolgezustand $z' = (m', h')$ mit*

- $m' := m + \Delta\hat{t}$,
- $\forall t \; (\; t \in T \longrightarrow h'(t) := \begin{cases} \# & \text{, falls} \quad t^- \not\leq m' \\ h(t) & \text{, falls} \quad t^- \leq m \;\wedge\; t^- \leq m' \;\wedge \\ & \qquad\quad {}^{\bullet}t \cap {}^{\bullet}\hat{t} = \emptyset \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases} \quad).$

Wir bezeichnen die Zustandsänderung vom Zustand z in den Zustand z' durch das Schalten der Transition $\hat{t}$ mit $z \xrightarrow{\hat{t}} z'$.

Durch die Schaltregel wird Folgendes festgelegt:

- Falls zwei Transitionen mit mindestens einem gemeinsamen Vorplatz konzessioniert sind und eine dieser Transitionen schaltet, wird in dem Fall, dass die andere Transition *immer noch* konzessioniert ist, ihre Zeit neu gezählt. Das ist die Definition der Intervall-Petrinetze, die von Merlin in [Mer74] eingeführt wurde. Natürlich kann man hier Merlins Schaltregel auch so definieren, dass die Zeit aller Transitionen, die in dem Nachfolgezustand *immer noch* konzessioniert sind, weiter geht. Eine weitere Möglichkeit wäre, dass auch eine mehrfache Konzessionierung einer Transition zugelassen wird.
- Das Schalten selbst findet zeitlos statt. Diese Festlegung, die auf dem ersten Blick wie eine Einschränkung erscheint, ist eigentlich keine. Wir können nämlich dem Schalten jeder Transition auch eine gewisse Zeitdauer zuordnen. Solche zeitabhängigen Petrinetze lassen sich letztendlich durch die Intervall-Petrinetze simulieren. Dies wird jedoch erst im nächsten Kapitel diskutiert.

2. Zustandsänderungsregel:

Definition 2.7 (Zeitfortlauf) *Sei τ eine nichtnegative reelle Zahl und $z = (m, h)$ ein Zustand in dem Intervall-Petrinetz $\mathcal{Z}$. Dann kann vom Zustand z aus in $\mathcal{Z}$ die Zeit τ vergehen, falls gilt:*

$$\forall t \; (\; (\, t \in T \wedge h(t) \neq \# \,) \; \longrightarrow h(t) + \tau \leq lft(t) \;).$$

Nach dem Verlauf der Zeit τ befindet sich das Intervall-Petrinetz in dem Zustand $z' = (m', h')$ mit

- $m' := m$,
- $\forall t \; (\; t \in T \longrightarrow h'(t) := \begin{cases} h(t) + \tau & \text{, falls} \quad t^- \leq m' \\ \# & \text{, falls} \quad t^- \not\leq m' \end{cases} \;).$

Die Zustandsänderung vom Zustand z in den Zustand z' durch den Fortlauf der Zeit um τ Zeiteinheiten bezeichnen wir mit $z \xrightarrow{\tau} z'$.

Diese zweite Zustandsänderungsregel besagt, dass bei allen konzessionierten Transitionen die Zeit gleich schnell vergeht. Das bedeutet allerdings nicht, dass sie immer gleichmäßig schnell vergehen muss.

Man kann sich die Intervall-Petrinetze auch als klassische Petrinetze vorstellen, an deren Transitionen je eine Uhr angebracht ist. Die Uhr ist ausgeschaltet, sofern die Transition nicht konzessioniert ist. Ansonsten zeigt sie die Zeit seit ihrer letzten Konzessionierung an. In jedem Zustand $z = (m, h)$ kann die t-Markierung als Modell dieser Uhren interpretiert werden: Die abgestellte Uhr der Transition t wird durch $h(t) = \sharp$ modelliert. Falls die Uhr der Transition t läuft, so zeigt sie im Zustand z die Zeit $h(t)$ an.

Zum Schluss dieses Abschnitts sei noch gesagt, dass jedes klassische Petrinetz auch als Intervall-Petrinetz darstellbar ist, indem jeder Transition das Intervall $[0, \infty]$ zugeordnet wird. Für die Transition t bedeutet $lft(t) = \infty$ das Nichtvorhandensein von Schaltzwang während ihrer gesamten Konzessionierung. Sie kann beliebig spät nach $eft(t)$ Zeiteinheiten nach ihrer Konzessionierung schalten, sofern sie noch konzessioniert ist.

2.2 Zustandsraum

Im Folgenden werden wir einige Bezeichnungen vereinbaren, die es uns ermöglichen, die Grundbegriffe *erreichbarer Zustand* und *Zustandsraum eines Intervall-Petrinetzes* analog und konsistent zu den entsprechenden Begriffen in der klassischen Petrinetztheorie zu definieren:

Sei $\mathcal{Z} = (P, T, F.V, m_o, I)$ ein beliebiges Intervall-Petrinetz. Sei $\sigma = t_1 \cdots t_n$ eine Sequenz von Transitionen aus T. Ob jetzt diese Transitionssequenz eine Schaltsequenz in $\mathcal{Z}$ ist, hängt nicht allein von der Konzessionierung der Transitionen ab. Bevor eine Transition t im Intervall-Petrinetz schaltet, muss sie „alt genug“ sein, was bedeutet, dass sie mindestens $eft(t)$ Zeiteinheiten konzessioniert gewesen sein muss. Das wiederum bedeutet, dass zwischen dem Schalten zweier Transitionen im Allgemeinen immer eine gewisse Zeit vergangen sein muss. Sei $\tau = \tau_1 \ldots \tau_n$ mit $\tau_i \in \mathbb{R}_0^+$ eine Sequenz von Zeiten. Die Sequenz $\sigma(\tau) = \tau_1 t_1 \tau_2 \cdots \tau_n t_n$ nennen wir dann einen *Ablauf (run)* von σ.

Definition 2.8 (realisierbarer Ablauf) *Sei $\mathcal{Z} = (P, T, F.V, m_o, I)$ ein beliebiges Intervall-Petrinetz, $z = (m, h)$ ein Zustand in $\mathcal{Z}$ und $\sigma(\tau) = \tau_1 t_1 \tau_2 t_2 \cdots \tau_n t_n$ ein Ablauf von σ. $\sigma(\tau)$ schaltet von z nach z', (kurz: $z \xrightarrow{\sigma(\tau)} z'$) wenn gilt:*

Anfang $\sigma = \varepsilon$

$z' := z$

Schritt $\sigma = \tau_1 t_1 \cdots \tau_n t_n \tau_{n+1} t_{n+1}$

Es existieren die Zustände z^* und z^{**} in $\mathcal{Z}$, so dass

$$z \xrightarrow{\tau_1 t_1 \cdots \tau_n t_n} z^* \quad \textit{und} \quad z^* \xrightarrow{\tau_{n+1}} z^{**} \quad \textit{und} \quad z^{**} \xrightarrow{t_{n+1}} z'.$$

$\sigma(\tau)$ heißt realisierbarer Ablauf von z in $\mathcal{Z}$, falls ein Zustand z' existiert und $\sigma(\tau)$ schaltet von z nach z'.

$\sigma(\tau)$ heißt realisierbarer Ablauf in $\mathcal{Z}$, falls $\sigma(\tau)$ realisierbarer Ablauf von z_0 in $\mathcal{Z}$ ist.

Aus der Definition folgt unmittelbar, dass wenn $\sigma(\tau)$ ein realisierbarer Ablauf in dem Intervall-Petrinetz $\mathcal{Z}$ ist, so ist σ eine Schaltsequenz in seinem Skelett $S(\mathcal{Z})$.

Definition 2.9 (Schaltsequenz) *Eine Transitionsequenz σ heißt Schaltsequenz in dem Intervall-Petrinetz $\mathcal{Z}$, falls ein realisierbarer Ablauf $\sigma(\tau)$ in $\mathcal{Z}$ existiert.*

Definition 2.10 (erreichbarer Zustand) *Ein Zustand z heißt erreichbar in dem Intervall-Petrinetz $\mathcal{Z}$, falls eine Schaltsequenz σ in $\mathcal{Z}$ existiert mit $z_0 \xrightarrow{\sigma} z$.*

Definition 2.11 (Zustandsraum) *Die Menge $RS_{\mathcal{Z}}$ aller in dem Intervall-Petrinetz erreichbaren Zustände heißt der Zustandsraum von $\mathcal{Z}$.*

Definition 2.12 (erreichbare Platzmarkierung) *Eine p-Markierung m in einem Intervall-Petrinetz $\mathcal{Z}$ heißt erreichbar, wenn ein erreichbarer Zustand z in $\mathcal{Z}$ existiert mit $z = (m, h)$.*

Mit $R_{\mathcal{Z}}$ bezeichnen wir *die Menge aller in $\mathcal{Z}$ erreichbaren p-Markierungen.*

Die Zeit schränkt im Allgemeinen das Verhalten des Petrinetzes $S(\mathcal{Z})$ ein. Die Menge der erreichbaren p-Markierungen des zeitabhängigen Petrinetzes ist demzufolge eine Teilmenge des Zustandsraumes seines Skelettes, d.h. $R_{\mathcal{Z}} \subseteq R_{S(\mathcal{Z})}$. Die Einschränkung ist eine Folge des *Schaltzwangs*, der durch die oberen Intervallgrenzen der Transitionen definiert ist.

Vorausgesetzt, allen Transitionen in einem Intervall-Petrinetzes wird jeweils das Intervall $[0, \infty]$ zugeordnet, dann sind die Mengen der erreichbaren Markierungen in $\mathcal{Z}$ und des Zustandsraumes seines Skelettes gleich, d.h. $R_{\mathcal{Z}} = R_{S(\mathcal{Z})}$. Diese Aussage ist eine hinreichende Bedingung für die Gleichheit dieser beiden Mengen. Wie wir später sehen werden, ist sie allerdings nicht notwendig.

2.3 IPN - Berechenbarkeit

Im 1. Kapitel haben wir gesehen, dass es Algorithmen gibt, die nicht mit klassischen Petrinetzen darstellbar sind, d.h. Petrinetze haben eine kleinere Beschreibungskraft als Turingmaschinen.

Durch die Zuordnung der Zeit zu klassischen Petrinetzen und die Modifizierung der Schaltregel haben wir eine neue Art von Petrinetzen eingeführt – die Intervall-Petrinetze. In diesem Abschnitt werden wir beweisen, dass sie äquivalent zu den Turingmaschinen sind. Das werden wir zeigen, indem wir nachweisen, dass jede zahlentheoretische Funktion, die sich mit einer Zählermaschine berechnen läßt, auch mit einem Intervall-Petrinetz berechenbar ist. Da die Zählermaschinen äquivalent zu den Turingmaschinen sind (vgl. [HMU02]), ist auch die Äquivalenz zwischen Intervall-Petrinetzen und Turingmaschinen gezeigt.

Wie in [HU93] führen wir zuerst die Zählermaschinen informal ein: Die Zählermaschinen sind off-line Turingmaschinen[1], deren Speicherbänder, auch Keller genannt, einseitig unendlich sind. In jedem Keller kann eine natürliche Zahl gespeichert werden, weshalb sie wiederum auch Zähler genannt werden. Eine gespeicherte Zahl kann inkrementiert bzw. dekrementiert werden. Wir können testen, ob eine Zahl gleich Null ist. Nur positive Zahlen können dekrementiert werden.

Wie u.a. in [HU93] bzw. in [HMU02] bewiesen ist, kann eine Zählermaschine mit 2 Zählern eine beliebige Turingmaschine simulieren. Weiterhin ist in [HMU02] die Äquivalenz zwischen Turingmaschinen und realen Computern gezeigt worden. Daraus entnehmen wir die Betrachtung der Zählermaschine als eine endliche Menge von Zählern und ein Programm, das die Arbeitsweise der Zählermaschine definiert. Formal läßt sich das folgendermaßen darstellen:

Eine Zählermaschine ist durch eine endliche Menge von Zählern $K = (K_1, \cdots, K_k)$, und durch ein Programm gegeben. In jedem Zähler K_i kann je eine natürliche Zahl gespeichert werden. Das Programm ist eine endliche Liste eindeutig markierter Befehle, in dem der Befehl *'start'* genau einmal und der Befehl *'halt'* mindestens einmal vorkommt. Es gibt 4 Typen von Befehlen:

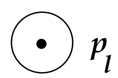
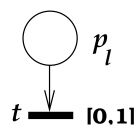
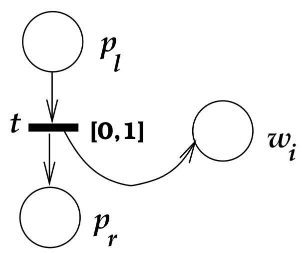
Notation des Befehls	Wirkungsweise des Befehls
0 : *start* : l	Starte das Programm; Gehe zum Befehl Nr. l;
l : *halt*	Stoppe das Programm;
l : *INC(i)* : r	$K_i := K_i + 1$; Gehe zum Befehl Nr. r;
l : *DEC(i)* : r : s	Wenn $K_i = 0$ ist, dann gehe zum Befehl Nr. r; sonst $K_i := K_i - 1$; Gehe zum Befehl Nr. s:

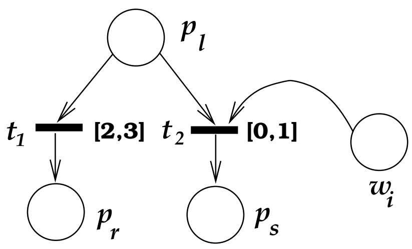
[1] Eine off-line Turingmaschine ist eine mehrbändige Turingmaschine, deren Eingabeband nur gelesen werden darf. Eine off-line Turingmaschine kann jede beliebige Turingmaschine simulieren.

Diese formale Definition der Zählermaschine findet man auch in [Sta80]. Die erste Zahl in einem Befehl ist die Nummer des Befehls, die ihn eindeutig markiert. Jeder der 4 Befehle lässt sich durch ein (kleines) Intervall-Petrinetz simulieren. In [Sta80] wurde gezeigt, dass die ersten drei Befehle mit je einem klassischen Petrinetz simulierbar sind, der vierte nicht jedoch. Wir folgen prinzipiell der dort beschriebenen Vorgehensweise, modifizieren allerdings die Modellierung für Intervall-Petrinetze und vervollständigen sie mit einem Modell für den 4. Befehl:

Dabei modellieren wir jede Nummer l eines Befehls mit einem Platz p_l. Der Platz wird genau dann markiert, wenn der entsprechende Befehl ausgeführt wird. Weiterhin ordnen wir jedem Zähler K_i einen Platz w_i zu. Beim Ablauf des Berechnungsprozesses soll dabei stets $m(w_i) = K_i$ für die aktuelle p-Markierung m des Netzes gelten.

Die einzelnen Befehle modellieren wir wie folgt:

Notation des Befehls	Modell des Befehls als Intervall-Petrinetz
0 : *start* : l	
l : *halt*	
l : *INC(i)* : r	

Notation des Befehls	Modell des Befehls als Intervall-Petrinetz
l : *DEC(i)* : r : s	

Die Intervalle für die Modelle des zweiten und des dritten Befehls sind zufällig ausgesucht. Sie können durch jedes zulässige Intervall ersetzt werden.

Im Modell des vierten Befehls ist indessen zu beachten, dass durch die Intervalle die Transition t_2 priorisiert wird. Dadurch wird ein Konflikt zwischen den Transitionen t_1 und t_2 immer zu Gunsten von t_2 entschieden. Das erreicht man, indem die Intervallgrenzen derartig gesetzt werden, dass $lft(t_2) < eft(t_1)$ gilt.

Definition 2.13 (ZM-berechenbar) *Sei f jetzt eine n-stellige zahlentheoretische Funktion. f wird von einer Zählermaschine mit k Zählern $\{K_1, \cdots, K_k\}$ berechnet, wenn $k \geq n$ ist und wenn für jedes n-Tupel $(x_1, \cdots, x_n)$ von natürlichen Zahlen gilt: Die Zählermaschine, gestartet mit Zählerstand,*

$$K_i = \begin{cases} x_i & falls \quad 1 \leq i \leq n \\ 0 & falls \quad n < i \leq k \end{cases},$$

Fall 1. *erreicht nach endlich vielen Schritten ein 'halt', falls $(x_1, \cdots, x_n)$ im Definitionsbereich von f liegt. Danach befindet sich im 1. Zähler K_1 der Wert $f(x_1, \cdots, x_n)$.*

Fall 2. *erreicht nie ein 'halt', falls $(x_1, \cdots, x_n)$ nicht im Definitionsbereich von f liegt.*

Die *IPN-Berechenbarkeit* wird analog zu der PN-Berechenbarkeit definiert:

Definition 2.14 (IPN-berechenbar) *Eine beliebige, n-stellige, zahlentheoretische Funktion. f heißt Intervall-Petrinetz-berechenbar (IPN-berechenbar), falls es ein initiales Intervall-Petrinetz $\mathcal{Z}_f = (P_f, T_f, F_f, V_f, I_f, m_0^f)$ gibt, so dass für jedes beliebige n–Tupel $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{N}^n$ und für das markierte Intervall-Petrinetz $\mathcal{Z}_f^x = (P_f, T_f, F_f, V_f, I_f, m_0^{f,x})$, wobei die Markierung $m_0^{f,x}$ das n-Tupel $x = (x_1, \cdots, x_n)$ modelliert, gilt:*

1. Fall *Wenn $(x_1, \cdots, x_n)$ im Definitionsbereich von f liegt, stoppt das Intervall-Petrinetz $\mathcal{Z}_f^x$ und liefert den Wert $f(x_1, \cdots, x_n)$, d.h. $\mathcal{Z}_f^x$ befindet sich in einem Zustand $z^{f(x_1,\cdots,x_n)}$, der eineindeutig der natürlichen Zahl $f(x_1, \cdots, x_n)$ zugeordnet ist, und $\mathcal{Z}_f^x$ kann nicht mehr schalten.*

2. Fall *Wenn $(x_1, \cdots, x_n)$ nicht im Definitionsbereich von f liegt, stoppt das Intervall-Petrinetz $\mathcal{Z}_f^x$ nie, d.h. für jeden Zustand z mit $z_0 \xrightarrow{*} z$ existiert immer eine nichtnegative reelle Zahl τ und mindestens eine Transition $t \in T$ und $z \xrightarrow{\tau} \xrightarrow{t}$.*

Aus den letzten Ausführungen ist leicht zu folgern, dass jede mit einer Zählermaschine berechenbare Funktion auch IPN-berechenbar ist und umgekehrt. Wir verzichten deshalb darauf, dies formal zu beweisen. Die Idee dabei ist, dass in dem Intervall-Petrinetz eine Transition genau dann schalten kann, wenn mindestens ein p_i -Platz markiert ist. Da aber bei jeder erreichbaren p-Markierung höchstens ein p_i -Platz eine Marke besitzt, kann höchstens eine Transition schalten und zwar genau diese, die den i -ten Befehl modelliert.

Damit läßt sich zusammenfassen:

Satz 2.1 *Sei f eine beliebige n-stellige zahlentheoretische Funktion. Dann gilt: f ist genau dann turingberechenbar, wenn f IPN-berechenbar ist.*

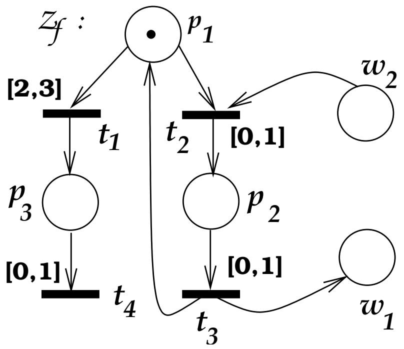
Der Beweis folgt aus der Äquivalenz zwischen Turingmaschinen und Zählermaschinen.

Im nächsten Beispiel geben wir zwei Funktionen an – eine totale und eine partielle – die die oben genannte Äquivalenz zwischen der Turingberechenbarkeit und der IPN-Berechenbarkeit veranschaulichen. Das Programm der jeweiligen Zählermaschine übersetzen wir mit Hilfe der oben angeführten Modellierung der vier möglichen Programmbefehle in ein Intervall-Petrinetz:

Beispiel 2.2 *Betrachten wir zunächst die Addition zweier natürlichen Zahlen. Sie ist eine 2-stellige totale zahlentheoretische Funktion. Das initiale Intervall-Petrinetz $\mathcal{Z}_f$ ist aus dem Zählermaschinenprogramm konstruiert worden. Dabei gilt für m_0^f:*

$$m_0^f(p_1) = 1, \quad m_0^f(p_2) = m_0^f(p_3) = 0 = m_0^f(w_1) = m_0^f(w_2)$$

.

$f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$	
Zählermaschinen-programm	*Intervall-Petrinetz-modell*
0 : start : 1 *1: DEC (2) : 3 : 2* *2 : INC (1) : 1* *3: halt*	

Betrachten wir das Paar $(x_1, x_2) = (2, 3)$. Dann „entsteht“ das Intervall-Petrinetz $\mathcal{Z}_f^x$, das die Funktion f an der Stelle $(2, 3)$ berechnet, aus dem Netz $\mathcal{Z}_f$, indem die initiale p-Markierung m_0^f „ergänzt“ wird zu $m_0^{f,x}$ mit

$$m_0^{f,x}(p_i) = m_0^f(p_i) \ \textit{für}\ i = 1, 2, 3, \quad m_0^{f,x}(w_1) = 2,\ m_0^{f,x}(w_2) = 3.$$

Die einzige Schaltsequenz in dem Netz $\mathcal{Z}_f$ ist $t_2t_3t_2t_3t_2t_3t_1t_4$. Danach gibt es keine konzessionierte Transition mehr, d.h. $\mathcal{Z}_f$ hält in einem Zustand $z = (m, h)$ mit $m(w_1) = m_0(w_1) + m_0(w_2)$ an, und damit ist in diesem Fall $m(w_1) = 5$.

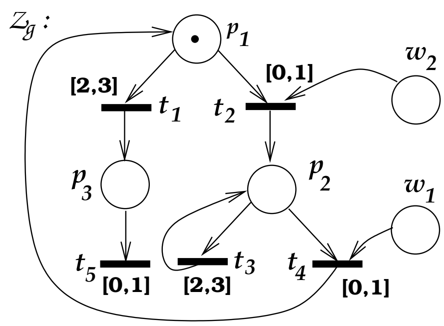
Jetzt betrachten wir die Subtraktion zweier natürlichen Zahlen als eine 2-stellige partielle Funktion. Diese wird wie folgt definiert:

$$g(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1 - x_2 & \text{, falls } x_1 \geq x_2 \\ \text{nicht def.} & \text{, sonst} \end{cases} .$$

Das initiale Intervall-Petrinetz $\mathcal{Z}_g$ ergibt sich aus dem ZM-Programm einer ZM mit zwei Zählern, die die Funktion g berechnet:

$$g(x_1, x_2) = x_1 - x_2$$

0 : start : 1
1: DEC (2) : 3 : 2
2: DEC (1) : 2 : 1
3: halt



Aus dem initialen Intervall-Petrinetz $\mathcal{Z}_g$ läßt sich das Intervall-Petrinetz $\mathcal{Z}_g^x$ für jedes Paar $x = (x_1, x_2)$ ableiten: Die initiale p-Markierung $m_0^{g,x}$ des Intervall-Petrinetzes $\mathcal{Z}_g^x$ mit $(x_1, x_2) = (2, 3)$ ist dann

$$m_0^{g,x}(p_i) = m_0^g(p_i) \ \text{ für } i = 1, 2, 3, \quad m_0^{g,x}(w_1) = 2, \ m_0^{g,x}(w_2) = 3.$$

Das Intervall-Petrinetz $\mathcal{Z}_g^x$ hält genau dann an, wenn $m_0(w_1) \geq m_0(w_2)$ ist. Bei der p-Markierung $m_0^{g,x}$ hält das Netz $\mathcal{Z}_g^x$ nie an – es schaltet zuerst die Schaltsequenz $t_2t_4t_2t_4t_2$ und anschließend unendlich oft t_3.

2.4 Reduktion des Zustandsraumes

Der Zustandsraum eines Petrinetzes, sowohl eines zeitlosen als auch eines zeitabhängigen, beinhaltet das Wissen über sein gesamtes Verhalten. Im Allgemeinen ist ein explizites Kennen des Zustandsraumes unabdingbar, um dynamische Eigenschaften eines Netzes zu studieren. Andererseits ist der Zustandsraum eines beliebigen Netzes üblicherweise unendlich. Eine Reduktion dieses Raumes, der bezüglich der Netzeigenschaften invariant ist, ist daher wünschenswert. In diesem Abschnitt werden wir zeigen, dass sie auch möglich ist.

Wir werden zunächst eine parametrische Beschreibung des Zustandsraumes eines beliebigen Intervall-Petrinetzes geben und anschließend reduzieren. Dabei werden wir Bedingungen angeben, die sowohl notwendig als auch hinreichend sind, um einen unendlichen Zustandsraum zu einem endlichen zu reduzieren. Der reduzierte Raum, falls er endlich ist, kann unter anderem auch für Model Checking benutzt werden. Darüber hinaus liefert er Möglichkeiten zur quantitativen Analyse des Intervall-Petrinetzes, die ansonsten nur mit parametrischem Model Checking durchführbar wäre.

Weiterhin ermöglicht der reduzierte Zustandsraum die Definition des Begriffes *Erreichbarkeitsgraph eines Intervall-Petrinetzes*, den wir im nächsten Abschnitt betrachten werden. Für den Fall, dass der Erreichbarkeitsgraph endlich ist, geben wir effiziente graphentheoretische Analysealgorithmen an.

Betrachten wir zunächst ein beliebiges Intervall-Petrinetz $\mathcal{Z} = (P, T, F, V, m_0, I)$. Sei $\sigma = t_1 \cdots t_n$ eine Schaltsequenz in $\mathcal{Z}$. Folglich gibt es mindestens einen realisierbaren Ablauf $\sigma(\tau) = \tau_0 t_1 \tau_1 \cdots \tau_{n-1} t_n \tau_n$ von σ in $\mathcal{Z}$, d.h. es gibt einen Zustand z^* in $\mathcal{Z}$ mit

$$z_0 \xrightarrow{\sigma(\tau)} z^* = (m^*, h^*) \qquad \text{und} \qquad m^* = m_0 + \sum_{i=1}^{n} \Delta t_i.$$

Natürlich hängt die p-Markierung m^* nicht von τ ab, d.h. bei jedem realisierbaren Ablauf von σ wird die danach erreichte p-Markierung die gleiche sein. Die t-Markierung hingegen hängt von τ ab.

Anstatt nun die verschiedenen, im Allgemeinen unendlich vielen, realisierbaren Abläufe von σ zu untersuchen, betrachten wir den parametrischen Ablauf $\sigma(x) = x_0 t_1 x_1 \cdots x_{n-1} t_n x_n$. Dabei verwenden wir für den Zeitübergang zwischen dem Schalten zweier, in der Sequenz benachbarter Transitionen t_{i-1} und t_i anstatt einer festen Zahl die Variable x_i und versuchen Bedingungen für die Werte dieser Variablen x_i $(i = 1, \cdots, n)$ zu finden, so dass die entsprechenden Werte für $x = (x_0, \cdots, x_n)$, die wir jeweils mit $\beta(x) = (\beta(x_0), \cdots, \beta(x_n))$ bezeichnen werden, realisierbare Abläufe $\sigma(\beta(x))$ von σ liefern. Damit gilt für den Zustand z_σ mit

$$z_0 \xrightarrow{\sigma} z_\sigma = (m_\sigma, h_\sigma),$$

dass $m_\sigma = m^*$. Die Bedingungen für die Werte der Variablen x_i ergeben sich aus den jeweils möglichen Zeitintervallen der Transitionen, die wir in einer Menge B_σ von Bedingungen (Ungleichungen) zusammenfassen werden. Dabei werden wir den Zustand z_σ im Zusammenhang mit B_σ einen *parametrischen Zustand* nennen. Er steht für eine ganze Menge (Klasse) von Zuständen, die nach dem Schalten der Transitionssequenz σ in $\mathcal{Z}$ erreichbar sind. Deshalb werden wir für die Menge der nach dem Schalten von σ erreichbaren Zustände in $\mathcal{Z}$ auch die Schreibweise $\{z_\sigma \mid B_\sigma\}$ benutzen.

Im Folgenden definieren wir rekursiv den parametrischen Ablauf einer Transitionssequenz formal:

Definition 2.15 (parametrischer Zustand) *Sei $\mathcal{Z} = (P, T, F, V, m_0, I)$ ein beliebiges Intervall-Petrinetz und $\sigma = t_1 \cdots t_n$ eine Schaltsequenz in $\mathcal{Z}$. Dann heißt $(\sigma(x), B_\sigma)$ mit $\sigma(x) = x_0 t_1 x_1 \cdots x_{n-1} t_n x_n$ der (realisierbare) parametrische Ablauf von σ in $\mathcal{Z}$ bzw. (z_σ, B_σ) heißt ein parametrischer Zustand in $\mathcal{Z}$, wenn gilt:*

Anfang $\sigma = \varepsilon$, *d.h.* $\sigma(x) = x_0$.

Dann sind $z_\sigma = (m_\sigma, h_\sigma)$ und B_σ wie folgt definiert:

- $m_\sigma := m_o$,
- $h_\sigma(t) := \begin{cases} x_0 & \text{, falls } t^- \leq m_\sigma \\ \sharp & \text{, sonst} \end{cases}$,
- $B_\sigma := \{\ 0 \leq h_\sigma(t) \leq lft(t) \ \mid \ t \in T \ \wedge \ t^- \leq m_\sigma \ \}$

Schritt *Für $\sigma = t_1 \cdots t_n$ seien z_σ und B_σ bereits definiert.*

Dann definieren wir für $\sigma = \underbrace{t_1 \cdots t_n}_{:=w} t_{n+1} = w t_{n+1}$

- $m_\sigma := m_w + \Delta t_{n+1}$,

- $h_\sigma(t) := \begin{cases} \sharp & \text{, falls } t^- \not\leq m_\sigma \\ h_w(t) + x_{n+1} & \text{, falls } t^- \leq m_\sigma \wedge t^- \leq m_w \wedge \\ & \quad {}^\bullet t_{n+1} \cap {}^\bullet t = \emptyset \\ x_{n+1} & \text{, sonst} \end{cases}$,
- $B_\sigma := B_w \cup \{ eft(t_{n+1}) \leq h_w(t_{n+1}) \} \cup \{ 0 \leq h_\sigma(t) \leq lft(t) \mid t \in T \wedge t^- \leq m_\sigma \}$.

Die t-Markierung h_σ ist damit im Allgemeinen ein Vektor, dessen Koordinaten Summen von Variablen sind. Die Anzahl der Variablen, die in h_σ vorkommen, übersteigt nicht $l(\sigma) + 1$.

Die initiale Bedingungsmenge B_ε besteht aus nur zwei Ungleichungen. Jedoch steigt die Anzahl der Ungleichungen in jeder nachfolgenden Bedingungsmenge um die doppelte Anzahl der konzessionierten Transitionen bei der jeweiligen p-Markierung plus 1. Das ist im ungünstigsten Fall (worst case) $2(|T|+1)$.

Diese Darstellung kann für lange Transitionssequenzen sehr aufwendig sein. Tatsächlich brauchen wir sie aber vor allem für den Beweis der Gültigkeit der Reduktion. Für die Anwendung der Intervall-Petrinetze bzw. ihrer Analyse werden keine parametrischen Zustände berechnet, wenn der reduzierte Zustandsraum endlich ist. Das ist fast immer der Fall, sowohl bei den metabolischen Netzwerken als auch bei realen technischen Systemen. Die Berechnung von erreichbaren parametrischen Zuständen wird nur benutzt, um quantitative Netzeigenschaften zu untersuchen, falls auch der reduzierte Zustandsraum unendlich ist.

Schließlich sei bemerkt, dass die Voraussetzung in der Definition 2.15 „σ *ist eine Schaltsequenz*“ auch durch „σ *ist eine Transitionssequenz*“ ersetzt werden kann. Falls dann σ keine Schaltsequenz in $\mathcal{Z}$ ist, gilt $\{z_\sigma \mid B_\sigma\} = \emptyset$.

Offensichtlich ist die Menge L_σ aller möglichen Werte der Vektoren von Variablen $x := (x_0, \cdots, x_{l(\sigma)})$, die alle Ungleichungen von B_σ erfüllen, ein konvexes Polyeder. Die t-Markierung ist ein Vektor von linearen Funktionen, etwa $h_\sigma(t) = f_t(x)$ mit $x \in L_\sigma$ und $f_t(x)$ ist linear.

In dem nachfolgenden Beispiel werden wir einige parametrische Zustände berechnen und dabei die Mengendarstellung benutzen. Hierbei steht K_σ für $\{z_\sigma \mid B_\sigma\}$.

Beispiel 2.3 (parametrische Zustände) *Betrachten wir das Intervall-Petrinetz $\mathcal{Z}_2$.*

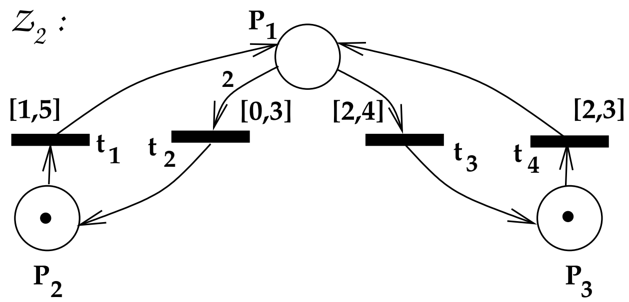


Abbildung 2.2: Das Intervall-Petrinetz $\mathcal{Z}_2$

Es ist leicht zu sehen, dass

$$K_\varepsilon = \{(\underbrace{(0,1,1)}_{m_\varepsilon}, \underbrace{(x_0, \sharp, \sharp, x_0)}_{h_\varepsilon}) \mid \underbrace{0 \leq x_0 \leq 3}_{B_\varepsilon}\}.$$

Nach dem Schalten der Sequenz $\sigma = t_4$ befindet sich das Intervall-Petrinetz im parametrischen Zustand $(z_\sigma, B_\sigma) = (z_{t_4}, B_{t_4})$, bzw. $K_\sigma = K_{t_4}$:

$$K_{t_4} = \{(\underbrace{(1,1,0)}_{m_\sigma}, \underbrace{(x_0+x_1, \sharp, x_1, \sharp)}_{h_\sigma}) \mid \underbrace{2 \leq x_0 \leq 3, x_0+x_1 \leq 5, 0 \leq x_1 \leq 4}_{B_\sigma}\}.$$

Die Bedingungsmenge B_σ ist dabei die Vereinigung der drei Mengen B_ε, $\{eft(t_4) \leq h_\varepsilon(t_4)\} = \{2 \leq x_0\}$ und $\{0 \leq h_\sigma(t) \leq lft(t) \mid t^- \leq m_\sigma\} = \{x_0 + x_1 \leq 5, 0 \leq x_1 \leq 4\}$.

Durch wiederholte Anwendung der Definition 2.15 erhalten wir nach dem Schalten der Transitionen t_3 und t_4 die parametrischen Zustände $z_{t_4t_3}$ und $z_{t_4t_3t_4}$ bzw. $K_{t_4t_3}$ und $K_{t_4t_3t_4}$:

$$K_{t_4t_3} = \{((0,1,1),(x_0+x_1+x_2,\sharp,\sharp,x_2)) \mid \begin{array}{ll} 2 \leq x_0 \leq 3, & x_0+x_1 \leq 5, \\ 2 \leq x_1 \leq 4, & x_0+x_1+x_2 \leq 5, \\ 0 \leq x_2 \leq 3 & \end{array}\}$$

und

$$K_{t_4t_3t_4} = \{((1,1,0),(x_0+x_1+x_2+x_3,\sharp,x_3,\sharp)) \mid \begin{array}{l} 2 \le x_0 \le 3, \\ 2 \le x_1 \le 4, \\ 2 \le x_2 \le 3, \\ 0 \le x_3 \le 4, \\ x_0+x_1 \le 5, \\ x_0+x_1+x_2 \le 5, \\ x_0+x_1+x_2+x_3 \le 5 \end{array} \}.$$

Die Mengen von Zuständen können als eine Aufteilung des Zustandsraumes eines Intervall-Petrinetzes betrachtet werden. Sie bündeln erreichbare Zustände, die nach dem Schalten einer Transition erreichbar sind:

Definition 2.16 (Zustandsklasse)

Sei $\mathcal{Z} = (P,T,F,V,m_o,I)$ ein Intervall-Petrinetz und sei σ eine Schaltsequenz. Die Menge C_σ heißt Zustandsklasse, wenn

Anfang $C_\varepsilon := \{z \mid \exists\tau(\tau \in \mathbb{R}_0^+ \wedge z_0 \xrightarrow{\tau} z)\}$

Schritt *Sei C_σ bereits definiert. Dann entsteht $C_{\sigma t}$ aus C_σ beim Schalten der Transition t*
(kurz: $C_\sigma \xrightarrow{t} C_{\sigma t}$), wenn

$$C_{\sigma t} := \{z \mid \exists z_1 \exists z_2 \exists\tau(z_1 \in C_\sigma \wedge \tau \in \mathbb{R}_0^+ \wedge z_1 \xrightarrow{t} z_2 \xrightarrow{\tau} z)\}.$$

Die anschließenden Folgerungen lassen sich schnell aus den Definitionen 1.8, 2.15 und 2.16 ableiten:

Folgerung 2.1 *Für ein beliebiges Intervall-Petrinetz $\mathcal{Z}$ und eine beliebige Schaltsequenz σ gilt:*

(i) $RS_{\mathcal{Z}} = \bigcup_\sigma C_\sigma$, *d.h. der Zustandsraum von $\mathcal{Z}$ ist die Vereinigung aller Zustandsklassen,*

(ii) $\{z_\sigma \mid B_\sigma\} = C_\sigma$.

Die Folgerungen gelten auch für jede Transitionssequenz in $\mathcal{Z}$. Falls eine Transitionssequenz keine Schaltsequenz in $\mathcal{Z}$ ist, so ist die Menge $(z_\sigma, B_\sigma) = C_\sigma$ leer.

Vorerst betrachten wir die Struktur der Ungleichungen aus den Bedingungsmengen und die Struktur der linearen Funktionen (Summen) aus den t-Markierungen genauer. Offensichtlich ist jede Bedingungsmenge ein lineares Ungleichungssystem und alle Koeffizienten der Variablen in den Ungleichungen und in den Summen sind 0 oder 1. Einfachheitshalber werden wir sagen, dass eine Variable in einer Ungleichung bzw. in einer Summe *vorkommt*, wenn ihr Koeffizient in der Ungleichung bzw. in der Summe 1 ist.

Bemerkung 2.1 *Sei $\mathcal{Z}$ ein Intervall-Petrinetz, σ eine Schaltsequenz in $\mathcal{Z}$ und (z_σ, B_σ) der parametrische Zustand nach dem Schalten von σ mit $z_\sigma = (m_\sigma, h_\sigma)$. Sei weiterhin $l(\sigma) = n$ und $x := (x_0, \cdots, x_n)$. Dann gilt:*

(i) Wenn t bei m_σ konzessioniert ist, dann kommt die Variable x_n in $h_\sigma(t)$ vor.

(ii) Wenn t eine bei m_σ konzessionierte Transition mit $h_\sigma(t) = x_i + \cdots + x_j$, $(i \leq j)$ ist, so kommt jede Variable x_k mit $i \leq k \leq j$ in der Summe $h_\sigma(t)$ vor.

(iii) Wenn t_1 und t_2 zwei bei m_σ konzessionierte Transitionen sind, dann kommen alle Variablen, die in $h_\sigma(t_1)$ vorkommen, auch in $h_\sigma(t_2)$ vor oder umgekehrt.

(iv) Wenn $g(x) \leq r$ eine beliebige Ungleichung aus B_σ ist und die Variablen x_i und x_j, $(i \leq j)$ in $g(x)$ vorkommen, dann kommen auch alle Variablen x_k mit $i \leq k \leq j$ in $g(x)$ vor.

Beweis:

(i) Die Behauptung folgt unmittelbar aus der Definition 2.15.

(ii) Diese Eigenschaft läßt sich leicht durch Induktion über n nachweisen.

Somit und unter Berücksichtigung von (i) hat $h_\sigma(t)$ die Form:

$$h_\sigma(t) = x_{n-k} + x_{n-(k-1)} + \cdots + x_{n-(k-k)}$$

für ein $k \in \{0, 1, \cdots, n\}$.

(iii) Aus (i) und (ii) folgt für $h_\sigma(t_1)$ und $h_\sigma(t_2)$:

$$\begin{aligned} h_\sigma(t_1) &= x_{n-k} + x_{n-(k-1)} + \cdots + x_{n-(k-k)} \text{ und} \\ h_\sigma(t_2) &= x_{n-l} + x_{n-(l-1)} + \cdots + x_{n-(l-l)}. \end{aligned}$$

Wenn $k \leq l$ ist, dann kommen alle Variablen aus $h_\sigma(t_1)$ auch in $h_\sigma(t_2)$ vor. Falls $l \leq k$ ist, dann kommen alle Variablen aus $h_\sigma(t_2)$ auch in $h_\sigma(t_1)$ vor.

(iv) Durch Induktion über n kann gezeigt werden, dass für jede Ungleichung $g(x) \leq r$ aus B_σ die Teilsequenzen σ_1 und σ_2 existieren mit $\sigma = \sigma_1\sigma_2$ und $g(x) = h_{\sigma_1}(t)$ für ein $t \in T$. Danach folgt unter Berücksichtigung von (i) die Behauptung. □

Im nachfolgenden Theorem 2.1 beweisen wir eine der fundamentalen Eigenschaften der Intervall-Petrinetze, nämlich dass jede p-Markierung, die mit einem beliebigen realisierbaren Ablauf erreichbar ist, stets auch mit einem weiteren Ablauf realisiert werden kann, in dem alle Zeitübergänge ganzzahlig (natürliche Zahlen) sind. Natürlich sind dann alle Zustände, die man während der Ausführung des „ganzzahligen“ Ablaufs erreicht „ganzzahlig“, d.h. alle Uhren der jeweils konzessionierten Transition zeigen ganzzahlige Zeiten. Diese Zustände spielen eine wichtige Rolle bei der Reduktion und der Analyse. Wir werden zeigen, dass sie Träger der meisten Netzeigenschaften sind.

Definition 2.17 (ganzzahliger Zustand) *Ein Zustand $z = (m, h)$ in einem Intervall-Petrinetz $\mathcal{Z}$ heißt ganzzahlig, falls für alle bei m konzessionierten Transitionen t gilt: $h(t) \in \mathbb{N}$.*

Mit $RIS_\mathcal{Z}$ bezeichnen wir die Menge aller in $\mathcal{Z}$ erreichbaren ganzzahligen Zustände.

Bevor wir weitergehen, vereinbaren wir noch folgende Bezeichnung: Sei X eine Menge von Variablen und β eine Belegung (Wertzuweisung) der Variablen mit nichtnegativen reellen Zahlen, d.h. $\beta : X \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$. Sei $x = (x_1, \cdots, x_n)$ ein Vektor von Variablen. Für den Vektor von nichtnegativen reellen Zahlen $(\beta(x_1), \cdots, \beta(x_n))$ schreiben wir kurz $\beta(x)$. Ferner bezeichnen wir den Wert einer linearen Funktion $g(x) = x_{i_1} + \cdots + x_{i_k}$ bei der Belegung β mit $[\![g(x)]\!]_\beta$. Schließlich steht $s(c)$ für den variablen Teil einer beliebigen Ungleichung c.

Damit ist die Ungleichung $c : g(x) \leq k$ bei der Belegung β erfüllt, falls $[\![s(c)]\!]_\beta \leq k$ gilt.

Theorem 2.1 *Sei $\mathcal{Z} = (P, T, F, V, m_0, I)$ ein beliebiges Intervall-Petrinetz, σ eine Schaltsequenz in $\mathcal{Z}$ mit $z_0 \xrightarrow{\sigma} (z_\sigma, B_\sigma)$, $z_\sigma = (m_\sigma, h_\sigma)$, $l(\sigma) = n$ und $X_\sigma := \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$. Sei weiterhin $\sigma(\hat{\beta}(x))$ mit $\hat{\beta} : X_\sigma \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ ein realisierbarer Ablauf von σ. Dann existiert eine Belegung β^* der Variablen mit $\beta^* : X_\sigma \longrightarrow \mathbb{N}$ und*

(1) $\sigma(\beta^*(x))$ ist auch ein realisierbarer Ablauf von σ in $\mathcal{Z}$,

(2) für jede bei m_σ konzessionierte Transition t gilt: $[\![h_\sigma(t)]\!]_{\beta^*} \leq [\![h_\sigma(t)]\!]_{\hat{\beta}}$

(3) die Gesamtdauer des Ablaufs $\sigma(\beta^*(x))$ ist nicht größer als die Gesamtdauer des Ablaufs $\sigma(\hat{\beta}(x))$, d.h. $[\![\sum_{k=0}^{n} x_k]\!]_{\beta^*} \leq [\![\sum_{k=0}^{n} x_k]\!]_{\hat{\beta}}$.

Offensichtlich soll der realisierbare Ablauf $\sigma(\beta^*)$ ein Ablauf mit ganzzahligen Zeitübergängen sein. (2) bedeutet, dass alle Uhren der bei m_σ konzessionierten Transitionen nach dem Ablauf $\sigma(\beta^*(x))$ frühere Zeiten anzeigen als die Zeiten nach dem Ablauf $\sigma(\hat{\beta}(x))$. Schließlich besagt (3), dass mit dem „ganzzahligen“ Ablauf $\sigma(\beta^*(x))$ die p-Markierung nicht später erreicht wird als mit dem Ablauf $\sigma(\hat{\beta}(x))$.

Tatsächlich werden wir mehr beweisen. In (2) werden wir zeigen, dass

$$0 \leq [\![h_\sigma(t)]\!]_{\hat{\beta}} - [\![h_\sigma(t)]\!]_{\beta^*} < 1.$$

Das bedeutet, dass wenn ein beliebiger Zustand in einem Intervall-Petrinetz erreichbar ist, dann ist auch der „abgerundete“ Zustand erreichbar.

Es ist leicht zu sehen, dass β^* im Allgemeinen nicht eindeutig bestimmt ist, auch wenn unsere Konstruktion eine β^* eindeutig definiert. Weiterhin ist es leicht zu sehen, dass man immer eine Belegung β^* finden kann, so dass

$$0 \leq [\![\sum_{k=0}^{n} x_k]\!]_{\hat{\beta}} - [\![\sum_{k=0}^{n} x_k]\!]_{\beta^*} < 1$$

in dem zu B_σ die redundante Ungleichung $0 \leq x_0 + x_1 + \ldots + x_n$ hinzunimmt. Damit ist die Gesamtdauer des Ablaufs $\sigma(\beta^*(x))$ gleich der Abrundung der

Gesamtdauer des Ablaufs $\sigma(\hat{\beta}(x))$. Es gilt jedoch nicht, dass die einzelnen Zeitübergänge $\hat{\beta}(x_i)$ zu $\beta^*(x_i)$ abgerundet sind – manchmal ist $\beta^*(x_i)$ gleich der Abrundung von $\hat{\beta}(x_i)$, manchmal ist $\beta^*(x_i)$ gleich der Aufrundung von $\hat{\beta}(x_i)$.

Beweisidee: Die ganzzahligen Werte $\beta^*(x_0), \beta^*(x_1), \ldots, \beta^*(x_n)$, definiert durch die Belegung β^*, werden aus den gegebenen Werten $\hat{\beta}(x_0), \hat{\beta}(x_1), \ldots, \hat{\beta}(x_n)$ sukzessiv in (höchstens) $n+1$ Schritten konstruiert. Dabei wird in jedem Schritt eine neue Belegung aus der vorhergehenden definiert, indem jeweils ein Wert $\hat{\beta}(x_i)$ ab- oder aufgerundet wird.

Zuerst wird ein ganzzahliger Wert der Variablen x_n zugewiesen, danach der Variablen x_{n-1}, etc.. Im letzten Schritt wird der Wert von x_0 gerundet, falls $\hat{\beta}(x_0)$ nicht ganzzahlig ist.

Gestartet wird der eigentliche Algorithmus (im 2. Schritt) mit dem Abrunden von x_n. Danach wird in Abhängigkeit von den Ungleichungen in B_σ ab- oder aufgerundet. Schließlich sei vor Beginn der Konstruktion noch vermerkt, dass die Ab- bzw. Aufrundung des Wertes einer Variable die Zuweisung eines neuen zulässigen Wertes bedeutet, der gleich der Ab- bzw. Aufrundung des alten Wertes der Variable ist.

Konstruktion von β^*

Wir definieren β^* rekursiv über $l(\sigma)$.

Anfang:

Sei $\beta_0 : X_\sigma \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ mit $\beta_0(x) := \hat{\beta}(x)$ für alle $x \in X_\sigma$.

Schritt: Sei β_{i-1} schon definiert. Um die Konstruktion von β_i übersichtlicher zu beschreiben, definieren wir:

$$\underline{\beta_i}(x) := \begin{cases} \beta_{i-1}(x) & \text{, falls } x \neq x_{n-(i-1)} \\ \lfloor \beta_{i-1}(x) \rfloor & \text{, sonst.} \end{cases}.$$

Sei jetzt $\beta_i : X_\sigma \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ wie folgt definiert:

$$\beta_i(x) := \begin{cases} \beta_{i-1}(x) & \text{, falls } x \neq x_{n-(i-1)} \\ \lfloor \beta_{i-1}(x) \rfloor & \text{, falls } x = x_{n-(i-1)} \wedge \\ & \qquad \forall c (c \in B_\sigma \rightarrow \lfloor [\![s(c)]\!]_{\beta_0} \rfloor - 1 < [\![s(c)]\!]_{\underline{\beta_i}}) \\ \lceil \beta_{i-1}(x) \rceil & \text{, sonst.} \end{cases}$$

Wie man leicht sieht, ordnet die Konstruktion der Ausgangsbelegung $\hat{\beta}$ die Nummer 0 zu, d.h. $\beta_0 := \hat{\beta}$. Die Belegung β_1 wird dann aus der Belegung β_0 konstruiert, indem ein ganzzahliger Wert der Variablen x_n zugewiesen wird – der Wert $\beta_0(x_n)$ wird gerundet. Danach entsteht β_2 aus β_1, indem der Wert $\beta_1(x_{n-1})$ gerundet wird. Die Belegung β_i entsteht aus β_{i-1}, indem der Wert $\beta_{i-1}(x_{n-(i-1)})$ gerundet wird, etc.. Dabei wird stets (für jedes i) abgerundet, sofern für *jede* Ungleichung c aus B_σ gilt: durch die Abrundung $\lfloor \beta_{i-1}(x_{n-(i-1)}) \rfloor$ wird der Wert $[\![s(c)]\!]_{\beta_i}$ nicht kleiner als $\lfloor [\![s(c)]\!]_{\beta_0} \rfloor - 1$. Anderenfalls wird aufgerundet. Dadurch bleibt für jede Ungleichung c aus B_σ der Wert $[\![s(c)]\!]_{\beta_i}$ innerhalb des offenen Intervalls $(\, \lfloor [\![s(c)]\!]_{\beta_0} \rfloor - 1\,,\ \lceil [\![s(c)]\!]_{\beta_0} \rceil + 1\,)$, was noch zu beweisen ist. Die Abbildung 2.3 veranschaulicht die Position der für jede Ungleichung c wichtigen fünf Zahlen.

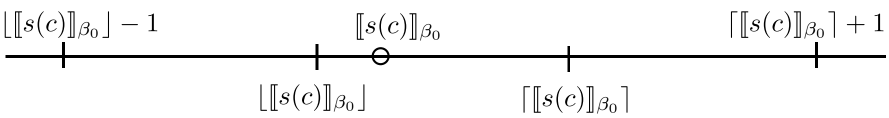


Abbildung 2.3: Position der reellen Zahl $[\![s(c)]\!]_{\beta_0}$ und der natürlichen Zahlen $\lfloor [\![s(c)]\!]_{\beta_0} \rfloor - 1$, $\lfloor [\![s(c)]\!]_{\beta_0} \rfloor$, $\lceil [\![s(c)]\!]_{\beta_0} \rceil$ und $\lceil [\![s(c)]\!]_{\beta_0} \rceil + 1$.

Zusammenfassend können wir feststellen, dass für alle i mit $0 \leq i \leq n+1$ und für jede Variable x_k mit $0 \leq k < n - (i-1)$ gilt:

$$\beta_i(x_k) = \beta_{i-1}(x_k) = \ldots = \beta_0(x_k) \tag{1}$$

und, dass für jede Variable x_k mit $n \geq k \geq n - (i-1)$ gilt:

$$\beta_i(x_k) = \beta_{i+1}(x_k) = \ldots = \beta_{n+1}(x_k) \tag{2}$$

Weiterhin gilt, dass falls $\beta_0(x_{n-(i-1)})$ bereits ganzzahlig ist, so wird β_i den (alten) Wert der Variable $x_{n-(i-1)}$ nicht ändern, weil für jede natürliche Zahl gilt: k, $k = \lfloor k \rfloor = \lceil k \rceil$.

Offensichtlich sind die Werte $\beta_{n+1}(x_0), \beta_{n+1}(x_1), \ldots, \beta_{n+1}(x_n)$ ganzzahlig (natürliche Zahlen). Damit kann β^* wie folgt definiert werden:

$$\beta^*(x_i) := \beta_{n+1}(x_i) \qquad \text{für jedes } i = 0, 1, \ldots, n.$$

Die nachfolgende Tabelle zeigt die sukzessive Konstruktion von β^* aus $\hat{\beta}$. Dabei bedeutet r, dass der entsprechende Wert eine nichtnegative reelle Zahl ist und k , dass er eine natürliche Zahl ist. Die fett angegebenen $\boldsymbol{k}$ zeigen die Position an, an der sich die entsprechende Belegung von der vorhergehenden unterscheidet. Selbstverständlich sind die verschiedenen Werte in einer Zeile im Allgemeinen verschieden. Dagegen gibt es in jeder Spalte höchstens zwei verschiedene Werte - der ursprüngliche Wert, der im Allgemeinen eine nichtnegative reelle Zahl ist und die Rundung dieses Wertes zu einer nichtnegativen ganzen Zahl. Falls der ursprüngliche Wert bereits eine ganze Zahl ist, haben alle Eintragungen in der entsprechenden Spalte den gleichen Wert.

β	$\beta(x_0)$	$\beta(x_1)$	$\cdots$	$\beta(x_{n-i})$	$\beta(x_{n-(i-1)})$	$\cdots$	$\beta(x_{n-1})$	$\beta(x_n)$
$\hat{\beta} := \beta_0$	r	r	$\cdots$	r	r	$\cdots$	r	r
β_1	r	r	$\cdots$	r	r	$\cdots$	r	$\boldsymbol{k}$
β_2	r	r	$\cdots$	r	r	$\cdots$	$\boldsymbol{k}$	k
$\vdots$			$\vdots$			$\vdots$		
β_i	r	r	$\cdots$	r	$\boldsymbol{k}$	$\cdots$	k	k
$\vdots$			$\vdots$			$\vdots$		
β_n	r	$\boldsymbol{k}$	$\cdots$	k	k	$\cdots$	k	k
$\beta^* := \beta_{n+1}$	$\boldsymbol{k}$	k	$\cdots$	k	k	$\cdots$	k	k

Abbildung 2.4: Konstruktion der Belegung β^* aus der Belegung $\hat{\beta}$.

Zunächst beweisen wir im nachfolgenden Lemma Aussagen über die Zwischenbelegungen $\beta_i,\ i = 1, \ldots, n+1$, die dann für den Beweis des Theorems 2.1 nützlich sind.

Lemma 2.1 *Für alle $i \in \{0, 1, \ldots, n+1\}$ gilt:*

(a) $\forall c\,(c \in B_\sigma \rightarrow [\![s(c)]\!]_{\beta_i} \in (\ \lfloor [\![s(c)]\!]_{\beta_0} \rfloor - 1\ ,\ \lceil [\![s(c)]\!]_{\beta_0} \rceil + 1\ )\ )$,

(b) $\forall t\,(t \in T \wedge t^- \leq m_\sigma \rightarrow [\![h_\sigma(t)]\!]_{\beta_i} \leq [\![h_\sigma(t)]\!]_{\beta_0})$,

(c) $[\![\sum_{k=0}^{n} x_k]\!]_{\beta_i} \leq [\![\sum_{k=0}^{n} x_k]\!]_{\beta_0}$.

Beweis:

Induktion über i.

Anfang: $i = 0$

Für $i = 0$ sind alle drei Aussagen des Lemmas trivialerweise erfüllt.

Schritt: Seien $(a), (b)$ und (c) für $1, \ldots, i$ wahr.
Wir zeigen, dass sie dann auch für $i + 1$ gelten.

Falls $\beta_i(x_{n-i}) \in \mathbb{N}$ ist, dann ist $\beta_{i+1} = \beta_i$. Damit sind die drei Aussagen $(a), (b)$ und (c) auch für $i + 1$ wegen der Induktionsannahme erfüllt.

Sei also $\beta_i(x_{n-i}) \notin \mathbb{N}$. Dann gibt es für die Konstruktion von β_{i+1} aus β_i zwei Möglichkeiten:

Fall 1. $\beta_{i+1}(x_{n-i}) = \lfloor \beta_i(x_{n-i}) \rfloor$

Dann gilt:

$$\beta_{i+1}(x) \leq \beta_i(x) \text{ für jedes } x \in X_\sigma. \tag{3}$$

zu *(a):* Sei b eine beliebige Ungleichung aus B_σ. Falls x_{n-i} in $s(b)$ nicht vorkommt, dann ist $[\![s(b)]\!]_{\beta_{i+1}} = [\![s(b)]\!]_{\beta_i}$, und (a) ist dann wahr wegen der Induktionsannahme. Sei also x_{n-i} in $s(b)$.

Da $\beta_{i+1}(x) \leq \beta_i(x)$ für jedes $x \in X_\sigma$ ist, gilt offensichtlich

$$[\![s(b)]\!]_{\beta_{i+1}} \leq [\![s(b)]\!]_{\beta_i} \tag{4}$$

Wegen der Induktionsannahme $[\![s(b)]\!]_{\beta_i} < \lceil [\![s(b)]\!]_{\beta_0} \rceil + 1$ folgt dann sofort aus (4)

$$[\![s(b)]\!]_{\beta_{i+1}} < \lceil [\![s(b)]\!]_{\beta_0} \rceil + 1. \tag{5}$$

Da in diesem Fall $\beta_{i+1}(x_{n-i}) = \lfloor \beta_i(x_{n-i}) \rfloor$ ist, muß nach Konstruktion von β_{i+1}

$$\forall c(c \in B_\sigma \rightarrow \lfloor [\![s(c)]\!]_{\beta_0} \rfloor - 1 < [\![s(c)]\!]_{\underline{\beta_{i+1}}})$$

gelten. Es gilt aber $\underline{\beta_{i+1}} = \beta_{i+1}$ in diesem Fall und damit folgt für die Ungleichung b:

$$\lfloor [\![s(b)]\!]_{\beta_0} \rfloor - 1 < [\![s(b)]\!]_{\beta_{i+1}}. \tag{6}$$

Da aber b beliebig ausgewählt war, folgt in diesem Fall aus (5) und (6) die Richtigkeit von (a) auch für $i + 1$.

zu *(b):*

Aus (3) folgt sofort

$$[\![h_\sigma(t)]\!]_{\beta_{i+1}} \leq [\![h_\sigma(t)]\!]_{\beta_i}$$

für jede Transition t, die bei m_σ konzessioniert ist. Wegen der Induktionsannahme

$$[\![h_\sigma(t)]\!]_{\beta_i} \leq [\![h_\sigma(t)]\!]_{\beta_0}$$

folgt sofort die Behauptung *(b)*.

zu *(c):*

Aus (3) und der Induktionsannahme $[\![\sum_{k=0}^{n} x_k]\!]_{\beta_i} \leq [\![\sum_{k=0}^{n} x_k]\!]_{\beta_0}$

folgt sofort $[\![\sum_{k=0}^{n} x_k]\!]_{\beta_{i+1}} \leq [\![\sum_{k=0}^{n} x_k]\!]_{\beta_0}$, d.h. *(c)* ist wahr in diesem Fall.

Fall 2. $\beta_{i+1}(x_{n-i}) = \lceil \beta_i(x_{n-i}) \rceil$

D.h. es gibt eine Ungleichung $\tilde{c}$ in B_σ, so dass

$$[\![s(\tilde{c})]\!]_{\underline{\beta_{i+1}}} \leq \lfloor [\![s(\tilde{c})]\!]_{\beta_0} \rfloor - 1 \tag{7}$$

gilt. Folglich muß x_{n-i} in $\tilde{c}$ vorkommen. Außerdem gilt es in diesem Fall:

$$\beta_i(x) \leq \beta_{i+1}(x) \text{ für jedes } x \in X_\sigma. \tag{8}$$

zu *(a):*

Sei b erneut eine beliebige Ungleichung aus B_σ. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \lfloor [\![s(b)]\!]_{\beta_0} \rfloor - 1 &< [\![s(b)]\!]_{\beta_i} && \text{nach Induktionsannahme} \\ &\leq [\![s(b)]\!]_{\beta_{i+1}} && \text{wg. (8)} \end{aligned} \tag{9}$$

Andererseits gilt für die Ungleichung $\tilde{c}$:

$$\begin{aligned} [\![s(\tilde{c})]\!]_{\beta_{i+1}} &= [\![s(\tilde{c})]\!]_{\beta_i} - \beta_i(x_{n-i}) + \beta_{i+1}(x_{n-i}) \\ &= [\![s(\tilde{c})]\!]_{\beta_i} - \beta_i(x_{n-i}) + \lceil \beta_i(x_{n-i}) \rceil \\ &= [\![s(\tilde{c})]\!]_{\beta_i} - \beta_i(x_{n-i}) + \lfloor \beta_i(x_{n-i}) \rfloor + 1 \\ &= [\![s(\tilde{c})]\!]_{\underline{\beta_{i+1}}} + 1 \\ &\leq \lfloor [\![s(\tilde{c})]\!]_{\beta_0} \rfloor && \text{wg. (7)} \end{aligned}$$

d.h.

$$[\![s(\tilde{c})]\!]_{\beta_{i+1}} \leq \lfloor [\![s(\tilde{c})]\!]_{\beta_0} \rfloor \tag{10}$$

und folglich gilt auch

$$[\![s(\tilde{c})]\!]_{\beta_{i+1}} \leq [\![s(\tilde{c})]\!]_{\beta_0}. \tag{11}$$

Aus (9) und (10) folgt dann die Behauptung (a) für die Ungleichung $\tilde{c}$.

Es bleibt noch zu zeigen, dass

$$[\![s(b)]\!]_{\beta_{i+1}} < \lceil [\![s(b)]\!]_{\beta_0} \rceil + 1 \tag{12}$$

für eine beliebige Ungleichung b aus B_σ gilt.

Wir nehmen an, dass es mindestens eine Ungleichung $\tilde{b}$ aus B_σ gibt, für die (12) nicht gilt, d.h.

$$[\![s(\tilde{b})]\!]_{\beta_{i+1}} \geq \lceil [\![s(\tilde{b})]\!]_{\beta_0} \rceil + 1. \tag{13}$$

Daraus folgt dann

$$[\![s(\tilde{b})]\!]_{\beta_{i+1}} \geq [\![s(\tilde{b})]\!]_{\beta_0} + 1. \tag{14}$$

Seien $j_{\tilde{c}}$ und $k_{\tilde{c}}$ der kleinste und der größte Index von Variablen, die in $s(\tilde{c})$ vorkommen. Wegen der Bemerkung 2.1, Punkt *(iv)* gilt dann:

$$s(\tilde{c}) = x_{j_{\tilde{c}}} + x_{j_{\tilde{c}}+1} + \ldots + x_{n-i} + x_{n-(i-1)} + \ldots + x_{k_{\tilde{c}}}. \tag{15}$$

Analog seien $j_{\tilde{b}}$ und $k_{\tilde{b}}$ der kleinste und der größte Index von Variablen, die in $s(\tilde{b})$ vorkommen. Dann hat $s(\tilde{b})$ die Form:

$$s(\tilde{b}) = x_{j_{\tilde{b}}} + x_{j_{\tilde{b}}+1} + \ldots + x_{n-i} + x_{n-(i-1)} + \ldots + x_{k_{\tilde{b}}}. \tag{16}$$

Offensichtlich muß für die Indizes $n-i, k_{\tilde{c}}$ und $k_{\tilde{b}}$ gelten:

$$\begin{array}{lcl} n-i \leq k_{\tilde{c}} & \text{und} & n-i \leq k_{\tilde{b}} \\ \text{d.h. } n-k_{\tilde{c}} < i+1 & \text{und} & n-k_{\tilde{b}} < i+1. \end{array} \tag{17}$$

Die Werte der Variablen bei den beiden Wertzuweisungen β_0 und β_{i+1} sind dann wie folgt bereits natürliche Zahlen (schon gerundet) oder noch reelle Zahlen (noch nicht gerundet):

$$\underbrace{\beta_{i+1}(x_{j_{\tilde{c}}}) \quad \cdots \quad \beta_{i+1}(x_{n-(i+1)})}_{\substack{\beta_{i+1} \; = \; \beta_0 \\ \uparrow \qquad \uparrow \\ \text{reell} \quad \text{reell}}} \underbrace{\beta_{i+1}(x_{n-i}) \quad \cdots \quad \beta_{i+1}(x_{k_{\tilde{c}}})}_{\substack{\beta_{i+1} \; \neq \; \beta_0 \\ \uparrow \qquad \uparrow \\ \text{nat.} \quad \text{reell}}} \tag{18}$$

Aus der Konstruktion der Belegung β^* folgt, dass die Belegung β_{i+1} den Wert der Variable x_{n-i} ändert (rundet) und die Belegung β_{n-r} (für jedes r mit $-1 \leq r \leq n$) den Wert der Variable x_{r+1} ändert (rundet).

Folglich und wegen (11) und (15) gilt

$$\begin{array}{l} (\beta_{i+1}(x_{j_{\tilde{c}}}) - \beta_0(x_{j_{\tilde{c}}}))+ \\ (\beta_{i+1}(x_{j_{\tilde{c}}+1}) - \beta_0(x_{j_{\tilde{c}}+1})) + \ldots + \\ (\beta_{i+1}(x_{n-i}) - \beta_0(x_{n-i})) + (\beta_{i+1}(x_{n-i+1}) - \beta_0(x_{n-i+1})) + \ldots + \\ (\beta_{i+1}(x_{k_{\tilde{c}}}) - \beta_0(x_{k_{\tilde{c}}})) \leq 0. \end{array} \tag{19}$$

Aus (18), (19) folgt dann

$$\begin{array}{l} (\beta_{i+1}(x_{n-i}) - \beta_0(x_{n-i}) + (\beta_{i+1}(x_{n-i+1}) - \beta_0(x_{n-i+1})) + \ldots + \\ (\beta_{i+1}(x_{k_{\tilde{c}}}) - \beta_0(x_{k_{\tilde{c}}})) \leq 0. \end{array} \tag{20}$$

Analog folgt aus (14) und (16)

$$\begin{aligned}&(\beta_{i+1}(x_{n-i}) - \beta_0(x_{n-i})) + (\beta_{i+1}(x_{n-i+1}) - \beta_0(x_{n-i+1})) + \ldots + \\ &(\beta_{i+1}(x_{k_{\tilde{b}}}) - \beta_0(x_{k_{\tilde{b}}})) \geq 1\end{aligned} \tag{21}$$

Jetzt betrachten wir die größten Indizes $k_{\tilde{c}}$ und $k_{\tilde{b}}$ – es gibt drei Möglichkeiten:

Fall 2.1: $k_{\tilde{c}} = k_{\tilde{b}}$
Dann gilt:

$$\begin{aligned}1 &\leq [\![s(\tilde{b})]\!]_{\beta_{i+1}} - [\![s(\tilde{b})]\!]_{\beta_0} && \text{wg. (14)} \\ &= [\![s(\tilde{c})]\!]_{\beta_{i+1}} - [\![s(\tilde{c})]\!]_{\beta_0} && \text{wg. (20) und (21)} \\ &\leq 0 && \text{wg. (11)}\end{aligned}$$

Das ist offensichtlich ein Widerspruch.

Fall 2.2: $k_{\tilde{c}} < k_{\tilde{b}}$
Dann gilt für $s(\tilde{c})$ und $s(\tilde{b})$:

$$\begin{aligned}s(\tilde{c}) &= x_{j_{\tilde{c}}} + \cdots \quad + x_{n-i} + \quad \cdots + x_{k_{\tilde{c}}} \\ s(\tilde{b}) &= x_{j_{\tilde{b}}} + \cdots \quad + x_{n-i} + \quad \cdots + x_{k_{\tilde{c}}} + \ \cdots + x_{k_{\tilde{b}}}.\end{aligned}$$

Jetzt betrachten wir die Werte der Variablen, die in $s(\tilde{b})$ vorkommen, bei den Belegungen $\beta_0, \beta_{n-k_{\tilde{c}}}$ und β_{i+1}. Wegen (1) und (2) gilt dann:

$$s(\tilde{b}) = \overbrace{\underbrace{x_{j_{\tilde{b}}} + \cdots +}_{\substack{\beta_{i+1} = \beta_{n-k_{\tilde{c}}} \\ \uparrow \quad\quad \uparrow \\ \text{reell} \quad \text{reell}}} \underbrace{x_{n-i} + \cdots + x_{k_{\tilde{c}}}}_{\substack{\beta_{i+1} \neq \beta_{n-k_{\tilde{c}}} \\ \uparrow \quad\quad \uparrow \\ \text{nat.} \quad \text{reell}}}}^{\beta_0 = \beta_{n-k_{\tilde{c}}}} \overbrace{\underbrace{+ \cdots + x_{k_{\tilde{b}}}}_{\substack{\beta_{i+1} = \beta_{n-k_{\tilde{c}}} \\ \uparrow \quad\quad \uparrow \\ \text{nat.} \quad \text{nat.}}}}^{\beta_0 \neq \beta_{n-k_{\tilde{c}}}} . \tag{22}$$

Wie man in (22) leicht sieht, stimmen die Werte der Variablen, deren Indizes nicht größer als $k_{\tilde{c}}$ sind, bei den Belegungen β_0 und $\beta_{n-k_{\tilde{c}}}$ überein. Deshalb folgt aus (20)

$$\begin{aligned}&(\beta_{i+1}(x_{n-i}) - \beta_{n-k_{\tilde c}}(x_{n-i})+\\&(\beta_{i+1}(x_{n-i+1}) - \beta_{n-k_{\tilde c}}(x_{n-i+1})) + \ldots +\\&(\beta_{i+1}(x_{k_{\tilde c}}) - \beta_{n-k_{\tilde c}}(x_{k_{\tilde c}})) \leq 0.\end{aligned} \tag{23}$$

Damit folgt aus (22) und (23)

$$[\![s(\tilde b)]\!]_{\beta_{i+1}} - [\![s(\tilde b)]\!]_{\beta_{n-k_{\tilde c}}} \leq 0. \tag{24}$$

Schließlich führen (13) und (24) zu

$$[\![s(\tilde b)]\!]_{\beta_{n-k_{\tilde c}}} \geq \lceil [\![s(\tilde b)]\!]_{\beta_0} \rceil + 1.$$

Das ein ein Widerspruch zu der Induktionsannahme für $n - k_{\tilde c}$, denn es gilt $n - k_{\tilde c} < i + 1$ (vgl. 17)).

Fall 2.3: $k_{\tilde c} > k_{\tilde b}$

In diesem Fall haben $s(\tilde c)$ und $s(\tilde b)$ die Form:

$$\begin{array}{llll} s(\tilde c) = x_{j_{\tilde c}} + \cdots & +x_{n-i}+ & \cdots + x_{k_{\tilde b}} + & \cdots\ x_{k_{\tilde c}} \\ s(\tilde b) = x_{j_{\tilde b}} + \cdots & +x_{n-i}+ & \cdots + x_{k_{\tilde b}} & \end{array}$$

Analog zu Fall 2.2 betrachten wir die Werte der Variablen, die in $s(\tilde c)$ vorkommen, bei den Belegungen $\beta_0, \beta_{n-k_{\tilde b}}$ und β_{i+1}. Sie sind reelle bzw. schon natürliche Zahlen:

$$s(\tilde c) \ = \ \overbrace{\underbrace{x_{j_{\tilde b}} + \ \cdots\ +}_{\substack{\beta_{i+1} \ = \ \beta_{n-k_{\tilde b}} \\ \uparrow \qquad\quad \uparrow \\ \text{reell} \qquad \text{reell}}} \ \ \underbrace{x_{n-i} + \ \cdots\ + x_{k_{\tilde b}}}_{\substack{\beta_{i+1} \ \neq \ \beta_{n-k_{\tilde b}} \\ \uparrow \qquad\quad \uparrow \\ \text{nat.} \qquad \text{reell}}}}^{\beta_0=\beta_{n-k_{\tilde b}}} \overbrace{\underbrace{+ \ \cdots\ + x_{k_{\tilde c}}}_{\substack{\beta_{i+1} \ = \ \beta_{n-k_{\tilde b}} \\ \uparrow \qquad\quad \uparrow \\ \text{nat.} \qquad \text{nat.}}}}^{\beta_0\neq\beta_{n-k_{\tilde b}}} . \tag{25}$$

Aus (25) folgt, dass die Werte der Variablen mit Indizes, die nicht größer sind als $k_{\tilde b}$, bei den Belegungen β_0 und $\beta_{n-k_{\tilde b}}$ übereinstimmen.

Deshalb folgt aus (21)

$$\begin{aligned}&(\beta_{i+1}(x_{n-i}) - \beta_{n-k_{\tilde{b}}}(x_{n-i})+\\&(\beta_{i+1}(x_{n-i+1}) - \beta_{n-k_{\tilde{b}}}(x_{n-i+1})) + \ldots +\\&(\beta_{i+1}(x_{k_{\tilde{b}}}) - \beta_{n-k_{\tilde{b}}}(x_{k_{\tilde{b}}})) \geq 1.\end{aligned} \tag{26}$$

Jetzt folgt aus (26) und (15)

$$[\![s(\tilde{c})]\!]_{\beta_{i+1}} - [\![s(\tilde{c})]\!]_{\beta_{n-k_{\tilde{b}}}} \geq 1. \tag{27}$$

Schließlich führen (10) und (27) zu

$$[\![s(\tilde{c})]\!]_{\beta_{n-k_{\tilde{b}}}} \leq \lfloor [\![s(\tilde{c})]\!]_{\beta_0} \rfloor - 1.$$

Das steht aber im Widerspruch zur Induktionsannahme für $n-k_{\tilde{b}}$, denn es gilt $n - k_{\tilde{b}} < i + 1$ (vgl. 17).

Somit ist die Annahme (13) falsch und folglich gilt:

$$[\![s(b)]\!]_{\beta_{i+1}} < \lceil [\![s(b)]\!]_{\beta_0} \rceil + 1 \tag{28}$$

für alle Ungleichungen b aus B_σ.

Die Ungleichungen (9) und (28) liefern den Beweis von *(a)*.

zu *(b):*

Sei t eine nach σ konzessionierte Transition. Falls x_{n-i} in $h_\sigma(t)$ nicht vorkommt, dann ist $[\![h_\sigma(t)]\!]_{\beta_{i+1}} = [\![h_\sigma(t)]\!]_{\beta_i}$, und folglich $[\![h_\sigma(t)]\!]_{\beta_{i+1}} \leq [\![h_\sigma(t)]\!]_{\beta_0}$ wegen der Induktionsannahme. Also betrachten wir den Fall, dass x_{n-i} in $h_\sigma(t)$ vorkommt.

Nach der Definition von h_σ (vgl. Definition 2.15) kommt die Variable x_n in jedem $h_\sigma \neq \sharp$ vor. Laut Bemerkung 2.1, Punkt *(ii)* existiert ein Index j_t, so dass gilt:

$$h_\sigma(t) = x_{j_t} + x_{j_t+1} + \ldots + x_{n-i} + x_{n-(i-1)} + \ldots + x_n. \tag{29}$$

In (22) sieht man, dass die Werte der Variablen, deren Indizes kleiner sind als $n-i$ und größer als $k_{\tilde{c}}$, bei den Belegungen β_{i+1} und $\beta_{n-k_{\tilde{c}}}$ übereinstimmen.

Dann folgt aus (23) und (29)

$$[\![h_\sigma(t)]\!]_{\beta_{i+1}} - [\![h_\sigma(t)]\!]_{\beta_{n-k_{\tilde{c}}}} \leq 0. \tag{30}$$

Schließlich folgt unter Benutzung der Induktionsannahme für $n - k_{\tilde{c}}$ in (30)

$$[\![h_\sigma(t)]\!]_{\beta_{i+1}} \leq [\![h_\sigma(t)]\!]_{\beta_0}.$$

Damit ist auch die Behauptung *(b)* bewiesen.

zu *(c):*

Betrachten wir erneut die Werte der Variablen bei den Belegungen β_{i+1} und $\beta_{n-k_{\tilde{c}}}$. Wie man in (22) leicht sieht, stimmen die Werte der Variablen, derer Indizes kleiner als $n-i$ und größer als $k_{\tilde{c}}$ sind, überein. Damit folgt jetzt aus (23)

$$[\![\sum_{k=0}^{n} x_k]\!]_{\beta_{i+1}} \leq [\![\sum_{k=0}^{n} x_k]\!]_{\beta_{n-k_{\tilde{c}}}}. \tag{31}$$

Wegen der Induktionsannahme für $n - k_{\tilde{c}}$

$$[\![\sum_{k=0}^{n} x_k]\!]_{\beta_{n-k_{\tilde{c}}}} \leq [\![\sum_{k=0}^{n} x_k]\!]_{\beta_0}$$

folgt jetzt aus (31) die Behauptung *(c)*:

$$[\![\sum_{k=0}^{n} x_k]\!]_{\beta_{i+1}} \leq [\![\sum_{k=0}^{n} x_k]\!]_{\beta_0}.$$

Damit ist das Lemma 2.1 bewiesen. □

Beweis von Theorem 2.1:

Die Behauptungen *(2)* und *(3)* des Theorems 2.1 folgen unmittelbar aus dem Lemma 2.1, unter der Berücksichtigung, dass β^* als β_{n+1} definiert wurde.

Um die Behauptung *(1)* noch zu beweisen, genügt es zu zeigen, dass die durch die Belegung β^* den Variablen $x_0, \ldots, x_n$ zugewiesenen Werte $\beta^*(x_0), \ldots, \beta^*(x_n)$ alle Ungleichungen aus B_σ lösen.

Sei also c eine beliebige Ungleichung aus B_σ. Da nach Konstruktion alle Werte $\beta^*(x_i),\ i = 0, \ldots, n$ natürliche Zahlen sind, ist auch $[\![s(c)]\!]_{\beta^*}$ eine natürliche Zahl. Laut der Behauptung *(a)* des Lemmas 2.1 gilt

$$[\![s(c)]\!]_{\beta^*} \in (\ \lfloor [\![s(c)]\!]_{\beta_0} \rfloor - 1\ ,\ \lceil [\![s(c)]\!]_{\beta_0} \rceil + 1\ ).$$

Wiederum sind die einzigen natürlichen Zahlen, die zu dem Intervall $(\ \lfloor [\![s(c)]\!]_{\beta_0} \rfloor - 1\ ,\ \lceil [\![s(c)]\!]_{\beta_0} \rceil + 1\ )$ gehören, die Zahlen $\lfloor [\![s(c)]\!]_{\beta_0} \rfloor$ und $\lceil [\![s(c)]\!]_{\beta_0} \rceil$. D. h.

$$[\![s(c)]\!]_{\beta^*} = \lfloor [\![s(c)]\!]_{\beta_0} \rfloor \text{ oder } [\![s(c)]\!]_{\beta^*} = \lceil [\![s(c)]\!]_{\beta_0} \rceil. \tag{32}$$

Falls c eine Ungleichung der Form $s(c) \leq k$ ist, so ist nach Definition von B_σ die Zahl k eine natürliche Zahl. Da die Ausgangsbelegung $\hat{\beta}$ nach der Voraussetzung eine Lösung für c liefert, so muss auch gelten, dass

$$[\![s(c)]\!]_{\beta_0} \leq k$$

ist, und folglich gilt dann

$$\begin{array}{rcl} \lceil [\![s(c)]\!]_{\beta_0} \rceil & \leq & \lceil k \rceil \\ & = & k. \end{array}$$

Wegen (32) gilt dann auch sofort

$$[\![s(c)]\!]_{\beta^*} \leq k,$$

d.h. die natürlichen Zahlen $\beta^*(x_0), \ldots, \beta^*(x_n)$ sind auch Lösung der Ungleichung c.

Analog zeigt man, dass die natürlichen Zahlen $\beta^*(x_0), \ldots, \beta^*(x_n)$ die Ungleichung c auch lösen, falls c die Form $k \leq s(c)$ hat.

Da c beliebig aus B_σ ausgewählt war, folgt, dass die Zahlen $\beta^*(x_0), \ldots, \beta^*(x_n)$ alle Ungleichungen aus B_σ lösen. Also ist die Behauptung *(1)* auch wahr.

Damit ist das Theorem 2.1 bewiesen. □

In dem nachfolgenden Beispiel demonstrieren wir die Konstruktion eines realisierbaren Ablaufs, dessen sämtliche Zeitübergänge natürliche Zahlen sind, aus einem beliebigen realisierbaren Ablauf: