HUMBOLDT UNIVERSITÄT ZU BERLIN

Lineare Optimierung

Louchka Popova-Zeugmann

25. März 2009

Inhaltsverzeichnis

1 **3**

1.1 Einführung 3

1.1.1 Grundbegriffe 5

1.1.2 Charakterisierung der extremalen Punkte eines Polyeders 8

2 **24**

2.1 Simplexmethode 24

2.2 Entartung, lexikographische Simplexmethode 32

2.3 Die Hilfsaufgabe 40

3 **47**

3.1 Dualität in der linearen Optimierung 47

3.2 Die duale Simplexmethode 53

4 **58**

4.1 Parametrische Optimierung 58

5 **67**

5.1 Die Transportaufgabe 67

5.2 Optimalitätskriterium 73

5.3 Algorithmus zur Definition eines neuen Transportplans 77

5.4 Variationen der klassischen TA 82

6 **86**

6.1 Grundbegriffe der Spieltheorie 86

6.2 Zwei-Personen-Null-Summen-Spiele 89

6.3 Matrixspiele 91

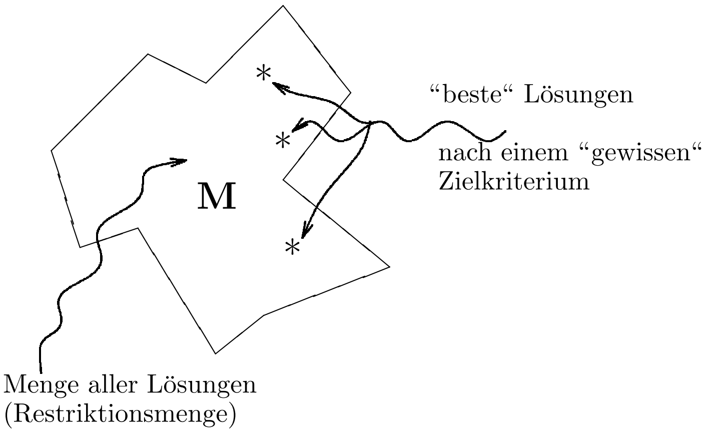
Kapitel 1

1.1 Einführung

Die Theorie der mathematische Optimierung entstand vor etwa 50 Jahren aus praktischen Erwägungen. Zu den ersten Forschern auf diesem Gebiet gehören G.B. Dantzig, L. Kantorowitsch, T.C. Koopmans etc.

Was ist der Gegenstand der mathematischen Optimierung bzw. womit werden wir uns hier beschäftigen?

Betrachten wir ein *reales Problem*, beschrieben durch gewisse Bedingungen(Restriktionen). Unser *Ziel* ist es, unter aller Lösungen des Problems die “beste“ (nach welchem Kriterium auch immer) zu finden:


M
*
*
*
“beste“ Lösungen
nach einem “gewissen“
Zielkriterium
Menge aller Lösungen
(Restriktionsmenge)

Für diesen Zweck **modellieren** wir (vereinfachen, präzisieren) das Problem und definieren ein adequates *mathematisches*:

$$\text{(P) } \min/\max\{\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Zielkriterium}}}{f(x)} \mid x \in \underset{\substack{\uparrow\\ \\ \text{Restriktionsmenge}}}{M}\} \text{ ist die allgemeine Aufgabe}$$

Wenn dabei f eine lineare Funktion ist und M durch lineare Funktionen beschrieben wird, nämlich:

$f(x) = c_1x_1 + \cdots c_nx_n - c_0$ und
$g_i(x) = a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n - b_i$ mit
$M = \{x \mid g_i(x) \leq 0, i = 1, \cdots, m\}$

dann heißt die Aufgabe (P) eine **lineare Optimierungsaufgabe (LOA)**.

Verschiedene Lösungsverfahren - Simplexmethode, duale Simplexmethode, Chatchijan-Algorithmus etc. - liefern optimale Lösung(en) von (P), falls diese existieren, bzw. erkennen die Nichtlösbarkeit des Problems.

Zum Schluß werden die optimale(n) Lösung(en) **interpretiert**, d.h. man kehrt zurück in die Sprache des Originalproblems.

Die mathematische Optimierung findet Einsatz in vielen Bereichen des sozialen, wirtschaftlichen Lebens etc. Wir beschränken uns auf Anwendungen in der Wirtschaft (Transportaufgaben) und in der Spieltheorie.

Konvexes Polyeder,
extremaler Punkt,
Simplex,
adjungierte Matrix...
ick versteh' ja nix!

1.1.1 Grundbegriffe

Mit R^n bezeichnen wir den n-dimensionalen Vektorraum, wobei R die Menge der reellen Zahlen ist, 0_n sei das Nullelement.

Definition 1: Seien $x_1, \ldots, x_k$ Punkte aus R^n. Der Punkt x heißt eine *konvexe Kombination* von $x_1, \ldots, x_k$, wenn k nichtnegative reelle Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ existieren mit $\sum\limits_{j=1}^{k} \lambda_j = 1$, so daß gilt: $x = \sum\limits_{j=1}^{k} \lambda_j x_j$.

$\square$

Definition 2: Sei $M = \{x_1, \ldots, x_k\} \subseteq R^n$ eine endliche Menge von Punkten aus R^n. Die Menge aller konvexen Kombinationen von $\{x_1, \ldots, x_k\}$ heißt die *konvexe Hülle* von M. (Bezeichnung: $conv M$)

$\square$

Seien x_1, x_2 zwei Punkte aus R^n. Die konvexe Hülle $conv\{x_1, x_2\}$ nennen wir auch **die Verbindungsstrecke** zwischen x_1 und x_2.

Es gilt:

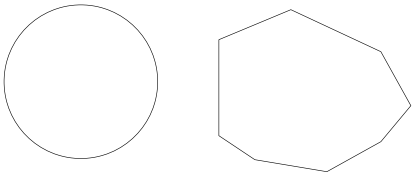
$$conv\{x_1, x_2\} = \{x \in R^n \mid \quad x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, \quad \lambda_i \geq 0, \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \quad \} =$$

$$= \{x \in R^n \mid \quad x = \lambda_1 x_1 + (1 - \lambda_1) x_2, \quad 0 \leq \lambda_1 \leq 1 \quad \}.$$

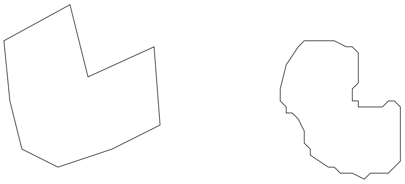
Definition 3: Sei $M \subseteq R^n$. Die Menge M heißt *konvex*, wenn für beliebige $x_1, x_2 \in M$ auch $conv\{x_1, x_2\} \subseteq M$.

$\square$

Beispiele:



konvex



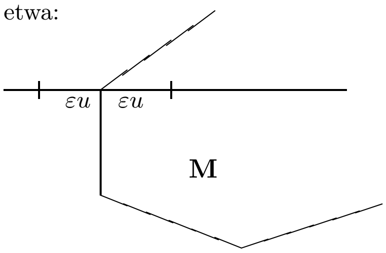
nicht konvex

Definition 4: Der Punkt x der konvexen Menge $M \subseteq R^n$ heißt *Extremalpunkt (Ecke)* von M, wenn gilt:

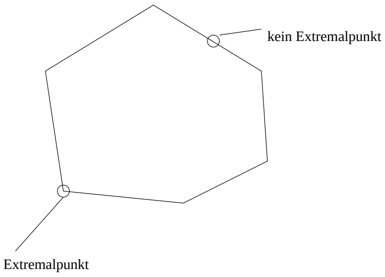
Es gibt kein $u \in R^n$, $u \neq 0_n$, so daß ein $\varepsilon > 0$ existiert mit $x + \varepsilon u \in M$ und $x - \varepsilon u \in M$.

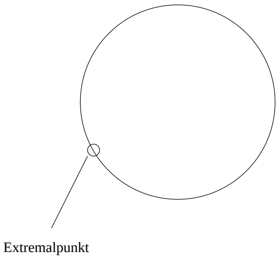
□

etwa:


εu
εu
M

Beispiele:


kein Extremalpunkt
Extremalpunkt


Extremalpunkt

Definition 5: Sei $c \in R^n$ mit $c \neq 0_n$ und $c_0 \in R$.

Die Mengen der Form

$M_1 = \{x \in R^n \mid \langle c, x \rangle \leq c_0\}$

$M_2 = \{x \in R^n \mid \langle c, x \rangle \geq c_0\}$

$M_3 = \{x \in R^n \mid \langle c, x \rangle < c_0\}$

$M_4 = \{x \in R^n \mid \langle c, x \rangle > c_0\}$

heißen *Halbräume*. Dabei heißen Halbräume der Formen M_1 und M_2 *abgeschlossene* und solche der Formen M_3 und M_4 *offene* Halbräume.

□

Definition 6: Eine Menge $P \subseteq R^n$ heißt *konvexes Polyeder*, wenn sie Schnittmenge endlich vieler abgeschlossener Halbräume des R^n ist,

d.h. $P = \bigcap\limits_{i=1}^{m} H_i$,

$H_i = \{x \in R^n \mid \left\langle c^i, x \right\rangle \leq c_0^i\}$ für alle $i = 1, \ldots, m$, $0_n \neq c^i \in R^n$.

□

Definition 7: Die Menge $S = \{x \in R^n \mid \langle c, x\rangle = c_0\}$, $c_0 \in R, c \in R^n, c \neq 0_n$ heißt *Hyperebene*.

$\square$

Lemma 1:

1. Jeder Halbraum ist konvex.
2. Der Durchschnitt M endlich vieler konvexer Mengen ist konvex.

Beweis:

1. Sei $H = \{x \mid \langle c, x\rangle \leq c_0\}, c \neq 0_n$.

   Seien $x, y \in H$ beliebig. Dann gilt: $\langle c, x\rangle \leq c_0$ und $\langle c, y\rangle \leq c_0$.

   Betrachten wir jetzt den Punkt $z \in R^n$ mit $z = \lambda x + (1-\lambda)y$.

   Offensichtlich gilt:

   $\langle c, z\rangle = \langle c, \lambda x + (1-\lambda)y)\rangle =$

   $= \lambda \langle c, x\rangle + (1-\lambda)\langle c, y\rangle \leq$

   $\leq \lambda\, c_0 + (1-\lambda)\, c_0 =$

   $= \boldsymbol{c_0}$, d.h. $z \in H$.

   Damit ist H nach Definition 3 konvex.

2. Sei $M = \bigcap\limits_{i=1}^{k} M_i$ und M_i seien alle konvex .

   Seien $x, y \in M$ beliebig. Folglich sind x und y auch Punkte aus M_i für jedes $i \in \{1, \ldots, k\}$. Und weil für jedes $i \in \{1..k\}$ M_i konvex ist, gehört auch der Punkt $z \in R^n$ mit $z = \lambda x + (1-\lambda)y$ nach Def 3. zu jedem M_i. Folglich ist $z \in \bigcap\limits_{i=1}^{k} M_i = M$. Damit ist M nach Def 3 konvex.

$\square$

Folgerung:
Jedes konvexe Polyeder ist konvex.

Beweis: folgt aus Lemma 1 Punkt 2.

$\square$

1.1.2 Charakterisierung der extremalen Punkte eines Polyeders

Betrachten wir die Menge $M \subseteq R^n$ mit $M := \{x \in R^n \mid \langle A_i, x\rangle \leq b_i, \quad i = 1,\dots,m\}$, wobei $A_i = \begin{pmatrix} a_{i1} \\ \vdots \\ a_{in} \end{pmatrix}$, d.h. A_i^T ist die i-te Zeile in der Matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$.

Offensichtlich ist M ein konvexes Polyeder.

Definition 8:
Sei $M = \{x \in R^n \mid \langle A_i, x\rangle \leq b_i\}$. Die Indexmenge $I(x) := \{i \mid \langle A_i, x\rangle = b_i\}$ heißt die *Menge der aktiven Restriktionen* von $x \in M$.

□

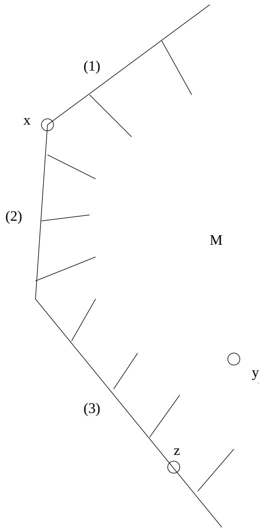
Es gilt natürlich: $I(x) \subseteq \{1,\dots,m\}$.

Beispiel:
M sei wie folgt gegeben:

(1): $\langle A_1, x\rangle \leq b_1$

(2): $\langle A_2, x\rangle \leq b_2$

(3): $\langle A_3, x\rangle \leq b_3$



$$I(x) = \{1,2\}$$
$$I(y) = \emptyset$$
$$I(z) = \{3\}$$

Lemma 2:
Ein Punkt $x \in M$ ist extremal gdw. es keinen weiteren Punkt $y \in M$ gibt, dessen Indexmenge $I(y)$ die Indexmenge $I(x)$ enthält.

(d.h. $x \in M$ extremal $\leftrightarrow I(x)$ „echt maximal“)

Beweis:
($\longrightarrow$) Sei x extremal in M.

z.z.: es existiert **kein** $y \neq x$ mit $I(y) \supseteq I(x)$.

Annahme: Es existiert y mit $y \neq x$ und $I(x) \subseteq I(y)$.

Wir werden zeigen: es existieren ein $0_n \neq u \in R^n und \varepsilon > 0$ mit $x \pm \varepsilon u \in M$. Das ist ein Widerspruch zur Voraussetzung, daß x Extremalpunkt ist.

Nun sei $u := y - x$. Da $y \neq x$, folgt $u \neq 0_n$.

Fall (A) Wir betrachten $x + \varepsilon u$:

$$x + \varepsilon u = x + \varepsilon(y - x) = x + \varepsilon y - \varepsilon x = \underline{(1-\varepsilon)x + \varepsilon y} \qquad (1)$$

Da M konvex ist, gilt für alle $\varepsilon \in [0,1]$ wegen (1), daß $x + \varepsilon u \in M$.

Fall (B) Wir betrachten wir $x - \varepsilon u$.

$$x - \varepsilon u = x - \varepsilon(y - x) = (1+\varepsilon)x - \varepsilon y \qquad (2)$$

Betrachten $\langle A_i, x - \varepsilon u \rangle$. Wir wollen zeigen, daß $\langle A_i, x - \varepsilon u \rangle \leq b_i$ für alle i gilt.

1. Fall: $i \in I(x)$, d.h.

$$\langle A_i, x \rangle = b_i \quad \wedge \quad \langle A_i, y \rangle = b_i.$$

Damit gilt:

$$\langle A_i, x - \varepsilon u \rangle = (1+\varepsilon)\langle A_i, x \rangle - \varepsilon \langle A_i, y \rangle = (1+\varepsilon)b_i - \varepsilon b_i = b_i.$$

2. Fall $i \in I(y) \setminus I(x)$.
Dann ist:

$$\langle A_i, x \rangle < b_i \quad \text{und} \quad \langle A_i, y \rangle = b_i.$$

Daraus folgt:

$$\langle A_i, x - \varepsilon u \rangle < (1+\varepsilon)b_i - \varepsilon \langle A_i, y \rangle = (1+\varepsilon)b_i - \varepsilon b_i = b_i$$

d.h. auch in diesem Fall ist $x - \varepsilon u \in M$.

3. Fall $i \notin I(y)$.
d.h.

$$\langle A_i, x \rangle < b_i \quad \text{und} \quad \langle A_i, y \rangle < b_i.$$

$$\downarrow \exists k_i > 0$$

$$\langle A_i, x \rangle + k_i < b_i.$$

Wir wollen nun zeigen: $\langle A_i, x - \varepsilon u\rangle \;\leq\; b_i$

d.h. es ist zu zeigen, daß:

$\langle A_i, x\rangle - \varepsilon \langle A_i, u\rangle \;\leq\; b_i$

3.1. Fall $\langle A_i, u\rangle \;\geq\; 0$

Für jedes $\varepsilon_i > 0$ gilt dann:

$$\langle A_i, x\rangle - \varepsilon_i \langle A_i, u\rangle \;\leq\; \langle A_i, x\rangle \;<\; b_i$$

3.2. Fall $\langle A_i, u\rangle \quad < \quad 0$

Dann sei $\varepsilon_i > 0$ so, daß

$$-\underbrace{\varepsilon_i}_{>0}\underbrace{\langle A_i, u\rangle}_{<0} = \underbrace{k_i}_{>0}$$

d.h. wir wählen ε_i so, daß

$$\varepsilon_i = \frac{-k_i}{\langle A_i, u\rangle} > 0$$

Sei ε das kleinste solche ε_i, d.h.

$$\varepsilon = min\{\varepsilon_i | i \notin I(y) \quad\wedge\quad \langle A_i, u\rangle \quad<\quad 0 \quad\wedge\quad \langle A_i, x\rangle + k_i < b_i \quad\wedge\quad \varepsilon_i = \frac{-k_i}{\langle A_i, u\rangle}\}.$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} \langle A_i, x - \varepsilon u\rangle \;&=\; \langle A_i, x\rangle - \varepsilon \langle A_i, u\rangle \;= \\ &=\; \langle A_i, x\rangle + \varepsilon(-\langle A_i, u\rangle) \;\leq \\ &\leq\; \langle A_i, x\rangle + \underbrace{\varepsilon_i(-\langle A_i, u\rangle)}_{k_i} \;= \\ &=\; \langle A_i, x\rangle + k_i \;<\; b_i, \end{aligned}$$

d.h.

$$\langle A_i, x\rangle - \varepsilon_i \langle A_i, u\rangle \quad<\quad b_i.$$

Damit gilt für den Fall (B): $x - \varepsilon u \in M$.

Aus (A) und (B) folgt der Widerspruch.

($\longleftarrow$)

Voraussetzung: Es gibt kein $y \neq x$ mit $I(x) \subseteq I(y)$.

Behauptung: x ist extremal.

Annahme: x ist nicht extremal.

Dann existiert ein $u \in R^n$, $u \neq 0_n$ und es existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $x \pm \varepsilon u \in M$.

Folglich gelten für $x \pm \varepsilon u$ die Ungleichungen von M.

Betrachten wir $i \in I(x)$. Dann gilt:

$$\langle A_i, x\rangle = b_i$$

Aus $\langle A_i, x - \varepsilon u\rangle \leq b_i$ folgt $-\varepsilon \langle A_i, u\rangle \leq 0$ d.h. $\langle A_i, u\rangle \geq 0$ (weil $\varepsilon > 0$).

Aus $\langle A_i, x + \varepsilon u\rangle \leq b_i$ folgt $\varepsilon \langle A_i, u\rangle \leq 0$ d.h. $\langle A_i, u\rangle \leq 0$ (weil $\varepsilon > 0$).

Dann gilt: $\langle A_i, u\rangle = 0$ für $i \in I(x)$, d.h.

$\langle A_i, x + \varepsilon u\rangle = b_i$.

Betrachten wir $y := x + \varepsilon u$. Da $\varepsilon > 0$,$u \neq 0_n, \Rightarrow x \neq y$ und $y \in M$ und $I(y) \supseteq I(x)$, folgt **Widerspruch!**

□

Lemma 3:
Sei $M \neq \emptyset$ ein Polyeder in R^n.
M besitzt einen Extremalpunkt gdw. M enthält keine Gerade.

Beweis:
$(\longrightarrow)$
Voraussetzung: M besitzt einen Extremalpunkt
Behauptung: M enthält keine Gerade
Annahme: M enthalte eine Gerade g

Sei $g = \{\overline{x} + tu \mid t \in R\}$, $u \neq 0_n$.

Daraus folgt: $\langle A_i, \overline{x} + tu \rangle \leq b_i$ für alle $i = 1 \dots m$.
Dann gilt: $\langle A_i, \overline{x} \rangle + t \langle A_i, u \rangle \leq b_i$.
Dabei sind $A_i, \overline{x}, u, b_i$ fest.
Damit die Ungleichung für jedes $t \in R$ erfüllt bleibt, muß also $\langle A_i, u \rangle = 0$ sein.
Sei $x \in M$ beliebig. Dann gilt:
$\langle A_i, x + tu \rangle = \langle A_i, x \rangle \leq b_i$ für alle $t \in R$ und $i = 1 \dots n$, d.h.
$x + tu \in M$.
Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $x \pm \varepsilon u \in M$. Folglich kann kein x aus M extremal sein $\Rightarrow$ Widerspruch.

$(\longleftarrow)$
Voraussetzung: M enthält keine Gerade.
Behauptung: Es existiert extremaler Punkt in M.

Beweisidee: Verdächtig für die Eigenschaft, extremaler Punkt zu sein, sind solche Punkte, deren Indexmenge der aktiven Restriktionen möglichst groß ist.

Wir werden von einem beliebigen Punkt $x \in M$ ausgehen und sukzessive zu einem Punkt mit maximaler Anzahl an aktiven Restriktionen kommen.

Die Idee dabei ist: Sofern wir zwei Punkte mit gleichen aktiven Restriktionen gefunden haben, können wir einen Punkt finden, der wenigstens eine aktive Restriktion mehr hat (Wir bilden die Gerade durch diese beiden Punkte. Da M keine Gerade enthält, muß diese Gerade irgendwann eine weitere Restriktion von M verletzen. Der Schnittpunkt hat einen aktiven Index mehr als die beiden Ausgangspunkte.). Da aber die Menge der aktiven Restriktionen für alle Punkte endlich ist, bleibt irgendwann (nach endlich vielen Schritten) nur ein Punkt mit maximaler Anzahl an aktiven Restriktionen.

$\Rightarrow$ Nach Lemma 2 ist dieser Punkt eine Ecke.

Beweis: Sei $x \in M$ beliebig. (x existiert, da $M \neq \emptyset$) und sei $I(x)$ die Menge der aktiven Restriktionen von x.

1. Fall: $\neg \exists y (y \in M \wedge y \neq x \wedge I(x) = I(y))$
d.h. $I(x)$ ist maximal $\hookrightarrow$ Behauptung.

2. Fall: $\exists y (y \in M \wedge y \neq x \wedge I(x) = I(y))$.
Wir betrachten die Gerade $x + tu$, $u = y - x$ ($\hookrightarrow u \neq 0_n$).

Dann gilt:

$$\hookrightarrow x + tu = (1-t)x + ty$$

Für $i \in I(x)$ folgt $\langle A_i, x + tu \rangle = b_i$.
Angenommen, $x + tu$ erfüllt auch alle restlichen Restriktionen, d.h. $\forall k : (k \notin I(x))$ gelte $\langle A_k, x + tu \rangle \leq b_k$, so würde M eine Gerade enthalten $\hookrightarrow$ Widerspruch zur Voraussetzung.

Sei o.B.d.A. $k - te$ Restriktion verletzt, d.h. es existiert ein $t_1 \in R$ mit

$$\langle A_k, x + t_1 u \rangle > b_k.$$

Andererseits, da M konvex ist und

$$x + tu = (1-t)x + ty$$

$$x, y \in M$$

folgt für $t \in [0, 1]$, daß $x + tu \in M$, d.h.

$$\langle A_k, x + tu \rangle \leq b_k.$$

Dann existiert eine reelle Zahl t_k^* mit

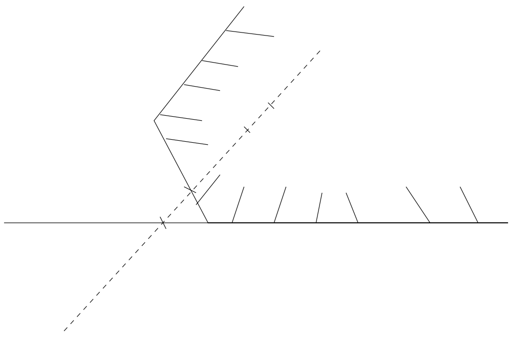
$$\langle A_k, x + t_k^* u \rangle = b_k$$

denn wir haben:

- $\langle A_k, x + tu \rangle$ - stetige Funktion
- $\exists t_1 : \langle A_k, x + t_1 u \rangle > b_k$
- $\exists t_2 : \langle A_k, x + t_2 u \rangle < b_k$.

Nach dem Zwischenwertsatz (folgt aus dem Satz von Bolzano) existiert t_k^* und

$$\langle A_k, x + t_k^* u \rangle = b_k.$$



Sei $L := \{t_k^* \mid \text{k-te Restriktion verletzt }\}$.

Sei weiterhin $t^{**} \in L$ mit $\mid t^{**} \mid = \min_k\{ \mid t \mid \quad \mid t \in L\}$, dh. t^{**} ist das betragsmäßig kleinste Element aus L. Damit ist der Punkt, der mittels t^{**} berechnet wird sicher in M.

Dann ist $x + t^{**}u \in M$ und $I(x + t^{**}u) = I(x) \cup \{k*\}$, für ein $k* \notin I(x)$.

(bzw. $I(x + t^{**}u) \supseteq I(x) \cup \{k\}$)

□

Übung

Berechnen Sie die Ecken des konvexen Polyeders:

(1) $x_1 + x_2 + x_3 \leq 8$
(2) $x_1 + x_2 - x_3 \leq 4$
(3) $x_1 \geq 0$
(4) $x_2 \geq 0$
(5) $x_3 \geq 0$
(6) $x_1 \leq 3$
(7) $x_2 \leq 3$
(8) $x_3 \leq 4$

nach der Konstruktionsmethode des vorigen Lemmas, zumindest eine Ecke (beginnend mit dem Punkt $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und dann $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$).

Lösung:

Betrachten wir die Punkte $Q_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $Q_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Offensichtlich ist $I(Q_1) = \{3\}$ und $I(Q_2) = \{3\}$.

Jetzt betrachten wir die Gerade $g_1 : \quad Q_1 + t(Q_2 - Q_1)$ und die Restriktionen (1) bis (8).

Wir haben: $g_1 : \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1+t \\ 1+t \end{pmatrix}$.

Zuerst betrachten wir g_1 und (1). Es ergibt sich:

$$1 + t_1 + 1 + t_1 = 8 \quad \Rightarrow \quad 2 + 2t_1 = 8 \quad \Rightarrow \quad 2t_1 = 6 \quad \Rightarrow \quad t_1 = 3.$$

Jetzt betrachten wir g_1 und (2). Offensichtlich verletzt kein Punkt aus g_1 die Restriktion (2).

Dann betrachten wir g_1 und (3). Auch jetzt verletzt kein Punkt aus g_1 die Restriktion (3).

Folglich betrachten wir g_1 und (4). Es ergibt sich:

$$1 + t_4 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_4 = -1.$$

Weiter betrachten wir g_1 und (5). Es ergibt sich:

$$1 + t_5 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_5 = -1.$$

Weiter betrachten wir g_1 und (6). Kein Punkt aus g_1 verletzt die Restriktion (6).

Weiter betrachten wir g_1 und (7). Es ergibt sich:

$$1 + t_7 = 3 \quad \Rightarrow \quad t_7 = 2.$$

Schließlich betrachten wir g_1 und (8). Es ergibt sich:

$$1 + t_8 = 4 \quad \Rightarrow \quad t_8 = 3 \quad \Rightarrow \quad t_8 = 3.$$

Dann gilt für t^{**}:

$$t^{**} = \min_k \{t_k \mid \quad \text{k-te Restriktion verletzt}\} = -1$$

und damit erhalten wir einen Punkt $P_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in M$ mit $I(P_0) = \{3, 4, 5\}$. Diese Indexmenge $\{3, 4, 5\}$ ist maximal (überprüfe!) und folglich ist P_0 eine Ecke für M.

Analog erhält man als weitere Ecken folgende Punkte:

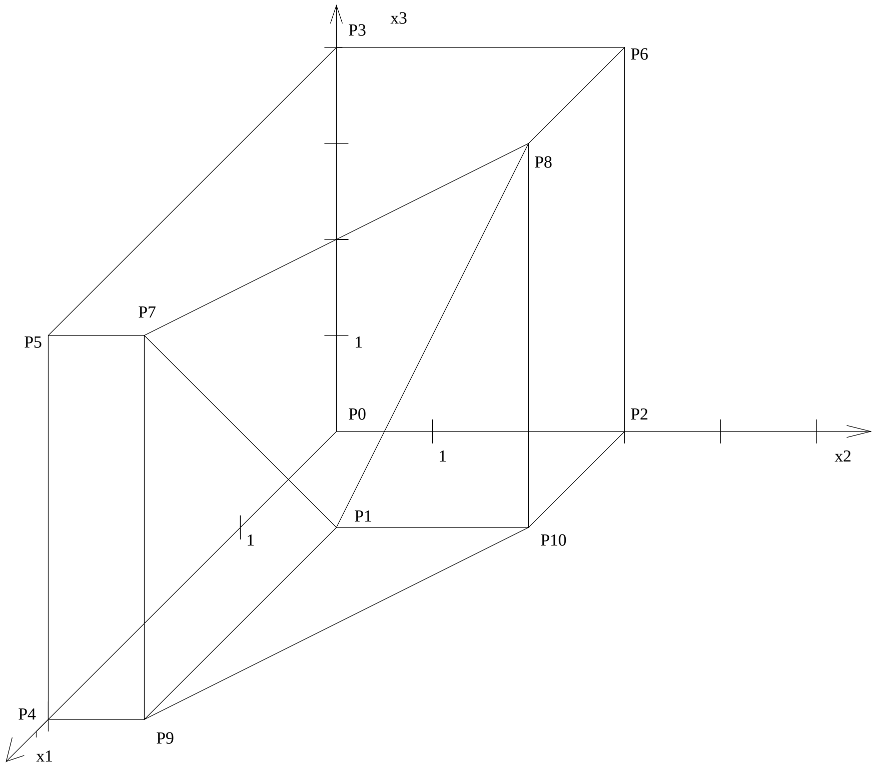
$$P_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } I(P_1) = \{1, 2, 6, 7\} \qquad P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } I(P_2) = \{3, 5, 7\}$$

$$P_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ und } I(P_3) = \{3, 4, 8\} \qquad P_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } I(P_4) = \{4, 5, 6\}$$

$$P_5 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ und } I(P_5) = \{4, 6, 8\} \qquad P_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ und } I(P_6) = \{3, 7, 8\}$$

$$P_7 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ und } I(P_7) = \{1, 6, 8\} \qquad P_8 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ und } I(P_8) = \{1, 8, 7\}$$

$$P_9 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } I(P_9) = \{1, 5, 2, 6\} \qquad P_{10} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } I(P_{10}) = \{1, 5, 2, 7\}$$



Bemerkung: Die Ecken eines konvexen Polyeders sind die Punkte, die eine maximale Anzahl von Ungleichungen (die das Polyeder definieren) als Gleichungen erfüllen.

Satz 1:
Es sei $M = \{x \in R^n \mid \langle A_i, x\rangle \leq b_i, i = 1, \dots, m\}$ und S die Lösungsmenge der linearen Optimierungsaufgabe

$$min\{\langle c, x\rangle \mid x \in M\}.$$

Ferner besitze M einen Extremalpunkt und es gelte $S \neq \emptyset$.

Dann gibt es einen Extremalpunkt $\overline{x}$ der Menge M, so daß $\overline{x} \in S$ gilt.

Bemerkung: Nicht jeder Punkt von S ist Extremalpunkt, aber es gibt mindestens einen Extremalpunkt in der Lösungsmenge S.

Beweis:

1. Schritt: S ist ein Polyeder und besitzt einen extremalen Punkt.

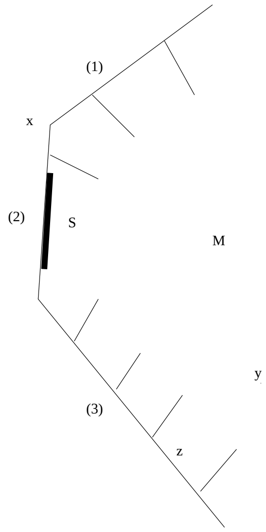
Beweis des 1. Schrittes: $S = \{x \in M \mid \langle c, x\rangle = v\}$ mit $v = \inf\limits_{x \in M} \langle c, x\rangle$.

Folglich ist S ein konvexes Polyeder.

Da M ein konvexes Polyeder ist und nach Voraussetzung einen extremalen Punkt besitzt, enthält M nach Lemma 3 keine Gerade.

Da $S \subseteq M$ ist, enthält S auch keine Gerade und folglich besitzt S einen Extremalpunkt. Sei dieser $\overline{x}$.

2. Schritt: Wir wollen jetzt beweisen, daß $\overline{x}$ auch Extremalpunkt von M ist, d.h. ein Fall



kann nicht auftreten.

Beweis des 2. Schrittes: Angenommen, $\overline{x}$ ist nicht extremal in M.

Dann existiert ein $u \in R^n$, $u \neq 0_n$, und es existiert ein $t \in R$ mit $t > 0$, so daß gilt:

$\overline{x} + tu \in M$, und $\overline{x} - tu \in M$.

$$\begin{aligned} \langle c, \overline{x} + tu \rangle &\geq \langle c, \overline{x} \rangle \qquad (1) \\ \langle c, \overline{x} - tu \rangle &\geq \langle c, \overline{x} \rangle \qquad (2). \end{aligned}$$

Aus (1) folgt $\langle c, u \rangle \geq 0$ und
aus (2) folgt $\langle c, u \rangle \leq 0$ und
damit gilt offenischtlich $\langle c, u \rangle = 0$

Daraus folgt: $\langle c, \overline{x} \pm tu \rangle = \langle c, \overline{x} \rangle$, d.h.

$\overline{x} \pm tu \in S$. Nach Definition 4 ist dann $\overline{x}$ nicht extremal in S. Das ist ein Widerspruch!

Also ist $\overline{x}$ extremal in M.

□

- Der Satz 1 motiviert uns zur Beschäftigung mit Extremalpunkten von Polyedern.
- Weiterhin stellt sich die Frage: Wieviele Extremalpunkte hat ein Polyeder? (Endlich viele!!! Warum?!)

Idee für die Lösung einer Linearen Optimierungsaufgabe (LOA)

Betrachten wir die LOA

$$(P) \quad \min / \max\{\langle c, x\rangle \mid \langle A_i, x\rangle \leq b_i, i = 1 \ldots n\},\ x \in R^n.$$

Wir ordnen (P) eine Aufgabe $(\tilde{P})$ zu mit einer Restriktionsmenge $\tilde{M}$:
$(\tilde{P})$ soll folgende Eigenschaften haben:

- $(\tilde{P})$ ist lösbar gdw. (P) ist lösbar
- Die Lösungen von $(\tilde{P})$ und (P) sollen auseinander leicht herleitbar sein.
- Wenn $\tilde{M} \neq \emptyset$ gilt, so soll $\tilde{M}$ eine Ecke besitzen.

Konkrete Realisierung

1. Bilden
$$M' := \{\begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} \mid x \in R^n, u \in R^m, \langle A_i, x\rangle + u_i = b_i, u \geq 0\}.$$
   Offensichtlich gilt:
$$M' \subseteq R^{n+m}.$$
$$(\Rightarrow x \in M \Leftrightarrow (x, u)^T \in M' \wedge u_i = b_i - \langle A_i, x\rangle)$$
   Der Nachteil von M' ist, daß diese Menge noch nicht zwingend einen Eckpunkt besitzt, falls $M' \neq \emptyset$ gilt.

2. Daher schreiben wir jede Komponente x_j des Vektors x als Differenz zweier nichtnegativer Komponenten:
$$x_j = x_j^+ - x_j^- \qquad x_j^+, x_j^- \geq 0.$$
   Dann ist:
$$\langle A_i, x\rangle = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^+ - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^- =$$
$$= \left\langle A_i, x^+ \right\rangle - \left\langle A_i, x^- \right\rangle.$$
   Wenn also $\langle A_i, x\rangle \leq b_i$ und $x = x^+ - x^-$, $(x^+, x^- \geq 0)$, so folgt
$$\left\langle A_i, x^+ \right\rangle - \left\langle A_i, x^- \right\rangle \leq b_i$$

3. Jetzt bilden wir $\tilde{M}$:

$$\tilde{M} := \{ \begin{pmatrix} x^+ \\ x^- \\ u \end{pmatrix} \in R^{2n+m} \mid \begin{array}{c} \langle A_i, x^+\rangle - \langle A_i, x^-\rangle + u_i = b_i, \\ x^+ \geq 0, x^- \geq 0, u \geq 0, i = 1 \dots m \end{array} \}.$$

   - $\tilde{M}$ ist Teilmenge des nichtnegativen Oktanten des Raumes R^{2n+m}.

     Dieser kann natürlich keine Gerade enthalten, $\tilde{M}$ demzufolge auch nicht!

   - Nach dem Lemma 3 besitzt $\tilde{M}$ Ecken, falls $\tilde{M} \neq \emptyset$. Dabei gilt:

     $$\tilde{M} = \emptyset \longleftrightarrow M = \emptyset.$$

4. Wir bilden jetzt eine entsprechende Zielfunktion für $(\tilde{P})$.

   $\langle c, x\rangle = \langle c, x^+\rangle - \langle c, x^-\rangle + \langle 0, u\rangle$ ist zu minimieren / maximieren, d.h. die Zielfunktion von $(\tilde{P})$ ist:

   $< (c, -c, 0), (x^+ . x^-, u) >$ und das ist offensichtlich auch eine lineare Zielfunktion.

   Damit erhalten wir:

   $$(\tilde{P}) \qquad \min / \max \{ < (c, -c, 0), (x^+ . x^-, u) > \mid \begin{array}{c} \langle A_i, x^+\rangle - \langle A_i, x^-\rangle + u_i = b_i, \\ x^+ \geq 0, x^- \geq 0, u \geq 0, i = 1 \dots m \end{array} \}.$$

   Der Zusammenhang zwischen beiden Aufgaben wird durch die **Transformation**
   $u_i = b_i - \langle A_i, x^+\rangle + \langle A_i, x^-\rangle$ und
   $x = x^+ - x^-$ vermittelt.

5. Wir suchen eine analytische Beschreibung für Extremalpunkte *(bis jetzt beschrieben durch die Indexmenge)* und beschäftigen uns genauer mit dem Gleichungssystem

   $$\big\langle A_i, x^+ \big\rangle - \big\langle A_i, x^- \big\rangle + u_i = b_i.$$

   Nehmen wir also für $(\tilde{P})$ folgende Standardform:

   $$\max\{ \langle \tilde{c}, \tilde{x}\rangle \mid \tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}, \quad \tilde{x} \geq 0\}$$

   mit $\tilde{x} \in R^{\tilde{n}}$, $\tilde{A}$ vom Typ $(\tilde{m}, \tilde{n})$, $\tilde{b} \in R^{\tilde{m}}$, $\tilde{c} \in R^{\tilde{n}}$.

   In diesem Fall gilt:

   $\tilde{n} = n + n + m$, $\tilde{m} = m$.

   $$\tilde{A} = \left(\underbrace{\begin{matrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{matrix}}_{A} \quad \underbrace{\begin{matrix} -a_{11} & \dots & -a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{m1} & \dots & -a_{mn} \end{matrix}}_{-A} \quad \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{matrix}}_{E_m} \right)$$

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} x_1^+ \\ x_2^+ \\ \vdots \\ x_n^+ \\ x_1^- \\ x_2^- \\ \vdots \\ x_n^- \\ u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} \qquad \tilde{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \\ -c_1 \\ -c_2 \\ \vdots \\ -c_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \tilde{b} = b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Wie sieht bei solchen Aufgaben die Menge der extremalen Punkte aus?

Beschäftigen wir uns jetzt mit **Aufgaben in Gleichungsform**.

$$\max\{\langle c, x\rangle \mid Ax = b, x \geq 0\}$$

mit $x \in R^n$, $b \in R^m$ und $A \in \mathcal{M}(m, n)$.

Sei nun $M = \{x \in R^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$, $A \in \mathcal{M}(m, n)$, $rgA = m(\leq n)$.

Interessant für die lineare Optimierungsaufgabe ist natürlich nur der Fall $m < n$. Dann bilden die Lösungen (die Punkte von M) einen Teilraum des Raumes R^n (sonst: M enthält nur einen Punkt und dann wäre nichts zu optimieren, bzw. (bei $m > n$) ist M eventuell leer).

Die Restriktionsmenge kann man in der Form

$\langle A_i, x\rangle \leq b_i \qquad i = 1 \ldots m$

$-\langle A_i, x\rangle \leq -b_i \qquad i = 1 \ldots m$

$-x_j \leq 0 \qquad j = 1 \ldots n$

angeben.

Für eine solche Menge wissen wir bereits, wie die extremalen Punkte beschrieben werden:

Wenn $x \in M$ ist, so enthält die Menge der aktiven Restriktionen von x alle Indizes der aktiven Restriktionen $\langle A_i, x\rangle \leq b_i$ und $-\langle A_i, x\rangle \leq -b_i$.

Interessant sind daher nur die Indizes j mit $x_j = 0$.

Betrachten wir darum die Indexmenge $J(x)$ mit

$$J(x) := \{j \mid x_j = 0\}.$$

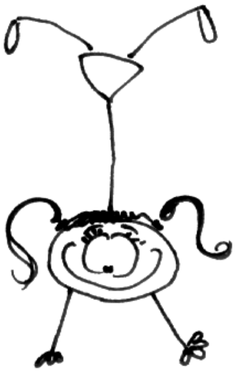
Es ist leicht zu sehen, daß Lemma 2 auch für J(x) gilt. (d.h. Ecke ist dieser Punkt x aus M, der maximale Indexmenge $J(x)$ besitzt.)

Definition 9:
Eine Teilmatrix A_B vom Typ (m, m) der Matrix A vom Typ (m, n) heißt *Basismatrix*, falls ihr Rang gleich m ist (d.h. A_B ist regulär).

- Aus der Algebra wissen wir:

  Wir können m Spalten aus A so auswählen, daß der Rang der aus diesen Spaltenvektoren entstandenen (m, m)-Matrix m ist, d.h. die m Spalten sollen linear unabhängig sein. Diese Matrix bezeichnen wir mit A_B.

- Mit B bezeichnen wir die Indexmenge der entsprechenden Spaltenindizes.



Sei A gegeben und A_B eine Basismatrix. Wir definieren B wie folgt:

$$B = \{j_1, \ldots, j_m\}$$

Dann hat A_B die Gestalt:

$$\hookrightarrow A_B = (A_{\cdot j_1}, \ldots, A_{\cdot j_m}) = \begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix} a_{1j_1} \\ a_{2j_1} \\ \vdots \\ a_{mj_1} \end{matrix}}^{A_{\cdot j_1}} & \overbrace{\begin{matrix} a_{1j_2} \\ a_{2j_2} \\ \vdots \\ a_{mj_2} \end{matrix}}^{A_{\cdot j_2}} & \begin{matrix} \cdots \\ \\ \ddots \\ \cdots \end{matrix} & \overbrace{\begin{matrix} a_{1j_m} \\ a_{2j_m} \\ \vdots \\ a_{mj_m} \end{matrix}}^{A_{\cdot j_m}} \end{pmatrix}$$

Bezeichnung: Wir nennen B *Indexmenge der Basisvariablen* und definieren:

Definition 10:
Die Menge $B = \{j_1, \ldots, j_m\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$ heißt eine *BV-Indexmenge*, falls die Spaltenvektoren $A_{\cdot j_1}, \ldots, A_{\cdot j_m}$ linear unabhängig sind, beziehungsweise falls die Matrix $(A_{\cdot j_1}, \ldots, A_{\cdot j_m})$ den Rang m hat.

Die Restmatrix bezeichnen wir mit A_N und nennen die in N enthaltenen Variablen (Spaltenindizes) die Indexmenge der Nichtbasisvariablen (NBV).

Definition 11:
Die Menge $N := \{1, \ldots, n\} \setminus B$ heißt die *Indexmenge der NBV*.

Definition 12:
Den Punkt $\overline{x} \in R^n$ mit

$$\boxed{\begin{array}{ll} & \overline{x}_j = 0 \text{ für jedes } j \in N \\ A\overline{x} = b & (A_{.k}\overline{x}_k = b \text{ für jedes } k \in B) \end{array}}$$

nennen wir *Basispunkt zur Basismatrix* A_B.

Die Komponenten $\overline{x}_j$, $j \in B$ müssen das System

$$(1) \qquad A_B \overline{x}_j = b$$

erfüllen.

Da aber $rg(A_B) = m$ und A_B regulär, hat (1) genau eine Lösung.

Bemerkung: Der Basispunkt $\overline{x}$ zur Basismatrix A_B ist eindeutig bestimmt.

Definition 13:
Der Basispunkt $\overline{x}$ heißt *zulässig*, falls $\overline{x}_j \geq 0$ für jedes $j = 1 \ldots n$.

Definition 13:
Ein Punkt $\overline{x}$ heißt *Basispunkt*, falls eine Basismatrix A_B existiert, so daß $\overline{x}$ Basispunkt zu A_B ist.

Bemerkung: Die Basismatrix ist nicht eindeutig bestimmt.

Satz 2:
Für Polyeder M in Gleichungsform ($rgA = m$) gilt:
Der Punkt $\overline{x}$ ist Extremalpunkt in M gdw.
$\overline{x}$ ist zulässiger Basispunkt in M.

Beweis:

$(\longleftarrow)$

Voraussetzung: $\overline{x}$ ist zulässiger Basispunkt von M
Behauptung: $\overline{x}$ ist Extremalpunkt von M
Beweis: Annahme: $\overline{x}$ ist kein Extremalpunkt von M

Dann existiert nach Lemma 2 ein $y \in M$, $y \neq \overline{x}$ und
$I(y) \supseteq I(\overline{x})$ und damit auch $J(y) \supseteq J(\overline{x})$, d.h. wenn $\overline{x}_j = 0$, so $y_j = 0$.

Darum erfüllt aber auch y die Bedingung für $\overline{x}$:

$$(1)_B \qquad \sum_{j \in B} A_{.j} y_j = b$$

oder

$$A_B y_j = b \qquad \text{für jedes } j \in B$$

oder

$$Ay = b$$

d.h. $(1)_B$ hätte zwei verschiedene Lösungen, und das ist ein Widerspruch zur Regularität der Matrix A_B.

$(\longrightarrow)$

Voraussetzung: $\overline{x}$ ist Extremalpunkt von M
Behauptung: $\overline{x}$ ist zulässiger Basispunkt von M
Beweis:

Wir bilden die Menge der aktiven Restriktionen für $\overline{x}$:

$$\overline{J} := J(x) = \{i \quad | \quad \overline{x}_i = 0\}.$$

Weiter sei $\overline{N} := \{j \quad | \quad \overline{x}_j > 0\}$.

Es gilt:

$$\sum_{j\in\overline{N}} A_{.j}\overline{x}_j = b$$

Die Spaltenvektoren $A_{.j}$ mit Indizes aus $\overline{N}$ müssen linear unabhängig sein.

Angenommen, sie sind **nicht** linear unabhängig:

Dann existieren k reelle Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ mit $\sum_{j=1}^{k} |\lambda_j| > 0$ $(k = card(\overline{N}))$ und

(sei o.B.d.A. $\overline{N} = \{1, \ldots, k\}$ - sonst Bijektion, um dies zu erreichen)

$$\sum_{j\in\overline{N}} A_{.j}\lambda_j = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \sum_{j\in\overline{N}} A_{.j}(\overline{x}_j + t\lambda_j) = b \qquad \forall t \quad (t \in R)$$

Wir wissen, daß für $j \in \overline{N}$, $\overline{x}_j > 0$ gilt.

Sei $t^* > 0$ so klein, daß $\overline{x_j} - t^*\lambda_j > 0\ \forall j\ (j \in \overline{N})$.
Dann gilt:

$$\sum_{j\in\overline{N}} A_{.j}(\overline{x}_j \pm t^*\lambda_j) = b.$$

Betrachten wir jetzt n neue reelle Zahlen $\overline{\lambda_i}$, die sich aus λ_i wie folgt ergeben:

$\overline{\lambda} := (\overline{\lambda}_1, \ldots, \overline{\lambda}_k)^T$: $\overline{\lambda}_i := \begin{cases} \lambda_i & , i \in \overline{N} \\ 0 & , i \in \overline{J} \end{cases}$

$\Rightarrow \overline{\lambda} \neq 0_n$

$\Rightarrow (A(\overline{x} \pm t^*\overline{\lambda}) = b) \hookrightarrow A_{.i}(\overline{x} \pm t^*\overline{\lambda}) = b_i$

$\Rightarrow \overline{x} \pm t^*\overline{\lambda} \in M.$

Folglich ist $\overline{x}$ kein Extremalpunkt in M, da das im Widerspruch zur Annahme steht.

Also sind die Spaltenvektoren $A_{.j}$, $j \in \overline{N}$ linear unabhängig.

Dann: $\overline{N}$ enthält $k \leq m$ Elemente (mehr können es nicht sein).

A_B kann so gewählt werden, daß $A_{.j}$ $(j \in \overline{N})$ dazugehören, d.h. $\overline{N} \subseteq B$.

Sei $(A_{.j}, A_{.k})_{j\in\overline{N}}$ (Basisergänzungssatz) eine solche Matrix
(offenbar gilt: $k \notin \overline{N}$).

Offensichtlich ist $(A_{.j}, A_{.k})_{j\in\overline{N}}$ eine Basismatrix und offensichtlich ist $\overline{x}$ Basispunkt zur Basismatrix $(A_{.j}, A_{.k})_{j\in\overline{N}}$, denn $\overline{x}_k = 0$ für $r \notin B = \overline{N} \cup \{k \mid \ldots\}$ und $A\overline{x} = b$, da $\overline{x}$ Extremalpunkt in M, d.h. $\overline{x} \in M$.

$\square$

Kapitel 2

2.1 Simplexmethode

entwickelt von George Bernhard Dantzig ungefähr 1948
1946-52 mathematischer Berater der US Air Force
seit 1966 Professor für OR und CS an der Stanford-University

Idee:

- Übergang von einem zulässigen Basispunkt zu einem neuen mit besserem Zielfunktionswert.
- Da nur endlich viele Basispunkte existieren, scheint diese Idee vernünftig zu sein.

Welche Schwierigkeiten können eintreten?

- Wie findet man den ersten zulässigen Basispunkt?
- Gibt es im Falle der Nichtoptimalität immer einen besseren Basispunkt?
- Wie läßt sich die Unlösbarkeit feststellen?

Wir gehen aus von einem zulässigen Basispunkt für die Aufgabe

$$\max\{\langle c, x\rangle \mid Ax = b, x \geq 0\}$$

mit $rgA = m$, $A \in M(m.n)$.

Dieser sei $\overline{x}$ mit der Basismatrix A_B.

Das Gleichungssystem $Ax = b$ läßt sich schreiben als

$$Ax = A_B x_B + A_N x_N = b, \qquad x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}$$

(Sortieren die Variablen, d.h. o.B.d.A. sei
$B = \{1, \dots, m\}$ und $N = \{m+1, \dots, n\}$.)

$$\left(\begin{array}{cc} \overbrace{A_{.1} \quad \dots \quad A_{.m}}^{A_B} & \overbrace{A_{.m+1} \quad \dots \quad A_{.n}}^{A_N} \\ \vdots \qquad\quad\;\; \vdots & \vdots \qquad\qquad \vdots \\ & \end{array}\right) \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = b$$

$Ax = A_B x_B + A_N x_N = b \mid$ von links mit A_B^{-1} multiplizieren
$\leftrightarrow (A_B^{-1})(A_B x_B + A_N x_N) = A_B^{-1} b,$

$\leftrightarrow x_B + A_B^{-1} A_N x_N = A_B^{-1} b$ (das Gleichungssystem ist nach x_B aufgelöst).
$\leftrightarrow x_B = A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_N x_N$.
Das bedeutet für beliebige $k \in B$:

$$x_k = d_{k0} - \sum_{j \notin B} d_{kj} x_j$$

wobei

$$d_{k0} = \left(A_B^{-1}\right)_k b$$

($\left(A_B^{-1}\right)_k$ bedeutet: $k-te$ Zeile der Matrix$\left(A_B^{-1}\right)$)
und:

$$d_{kj} = \left(A_B^{-1}\right)_k \left(A_N\right)_{.j}$$

($\left(A_N\right)_{.j}$ bedeutet: $j-te$ Spalte der Matrix (A_N))
Offensichtlich ist die ursprüngliche Beschreibung der Restriktionsmenge äquivalent zu:

$$x_B = A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_N x_N, \qquad x_B \geq 0, x_N \geq 0.$$

Einsetzen von x in die Zielfunktion ergibt:

$$\begin{aligned} \langle c, x\rangle &= \langle c_B, x_B\rangle + \langle c_N, x_N\rangle = \\ &= \sum_{k\in B} c_k x_k + \sum_{j \in N} c_j x_j = \\ &= \sum_{k\in B} c_k \left(d_{k0} - \sum_{j\in N} d_{kj} x_j\right) + \sum_{j\in N} c_j x_j = \\ &= \sum_{k\in B} c_k d_{k0} - \sum_{k\in B}\sum_{j\in N} c_k d_{kj} x_j + \sum_{j\in N} c_j x_j = \\ &= \underbrace{\sum_{k\in B} c_k d_{k0}}_{:=d_{00}} - \sum_{j\in N} \underbrace{\left(\sum_{k\in B} c_k d_{kj} - c_j\right)}_{d_{0j}} x_j = \\ &= d_{00} - \sum_{j\in N} d_{0j} x_j \end{aligned}$$

Das ist die Zielfunktion unter den weiteren Nebenbedingungen:

$$d_{k0} - \sum_{j\in N} d_{kj} x_j \geq 0 \qquad \forall k \in B$$
$$x_j \geq 0 \qquad \forall j \in N$$

oder auch geschrieben als:

$$\max\{d_{00} - \sum_{j\in N} d_{0j} x_j \mid d_{k0} - \sum_{j\in N} d_{kj} x_j \geq 0, k \in B, x_j \geq 0, j \in N\}.$$

Aktueller zulässiger Basispunkt (zur Basis B) ist

$$\overline{x} = \begin{pmatrix} \overline{x}_B \\ \overline{x}_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{k0} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Der Wert der Zielfunktion ist hierbei d_{00}.

Wir schreiben alle Daten in Form eines Schemas (Simplextableau) auf:

			NBV (N)				
			x_{m+1}	$\dots$	x_q	$\dots$	x_n
		$d_{0,0}$	$d_{0,m+1}$	$\dots$	$d_{0,q}$	$\dots$	$d_{0,n}$
	x_1	$d_{1,0}$	$d_{1,m+1}$	$\dots$	$d_{1,q}$	$\dots$	$d_{1,n}$
	x_2	$d_{2,0}$	$d_{2,m+1}$	$\dots$	$d_{2,q}$	$\dots$	$d_{2,n}$
BV	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
(B)	x_p	$d_{p,0}$	$d_{p,m+1}$	$\dots$	$d_{p,q}$	$\dots$	$d_{p,n}$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
	x_m	$d_{m,0}$	$d_{m,m+1}$	$\dots$	$d_{m,q}$	$\dots$	$d_{m,n}$

Beispiel:

Gegeben sei folgende LOA:

Zielfunktion: $x_1 - 3x_2 \longrightarrow \max$

$$\begin{cases} 3x_1 - 7x_2 - 3x_3 \geq -3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 1 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Geben Sie für diese Aufgabe ein erstes Simplextableau an!

Lösung:

Zuerst formen wir die Restriktionen zu Gleichungen um:

Zielfunktion: $x_1 - 3x_2 \longrightarrow \max$

$$\begin{cases} -3x_1 + 7x_2 + 3x_3 + u_1 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + u_2 = 1 \end{cases}$$

Für die Zielfunktion gilt: $\underbrace{0}_{d_{0,0}} - \underbrace{(-1)}_{d_{0,1}} x_1 - \underbrace{+3}_{d_{0,2}} x_2 - \underbrace{+0}_{d_{0,3}} x_3$.

Offensichtlich ist: BV $\{u_1, u_2\}$ und NBV $\{x_1, x_2, x_3\}$ und damit

$$\overline{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \; d_{1,0} = 3, \; d_{2,0} = 1.$$

Wie sieht die Matrix $(d_{k,j})$ aus?

Nach Definition gilt:

$$d_{kj} = \left(A_B^{-1}\right)_k (A_N)_{.j}$$

Wenn $A_B = E_m$, so ist $A_B^{-1} = E_m$ und damit $(d_{kj}) = A_N$.

Jetzt kann folgendes Tableau aufgestellt werden:

		x_1	x_2	x_3
	0	-1	3	0
u_1	3	-3	7	3
u_2	1	2	1	1

Bemerkung: Wenn $d_{o,j} \geq 0$ für alle $j \in N$, so ist $\overline{x}$ optimal.

Beweis: Sei $x \in M$ beliebig. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\langle c, x\rangle &= \langle c_B, x_B\rangle + \langle c_N, x_N\rangle = \\ &= \left\langle c_B, A_B^{-1}b - A_B^{-1}A_N x_N\right\rangle + \langle c_N, x_N\rangle = \\ &= \left\langle c_B, A_B^{-1}b\right\rangle - \left\langle c_B, A_B^{-1}A_N x_N\right\rangle + \langle c_N, x_N\rangle = \\ &= \underbrace{\left\langle c_B, A_B^{-1}b\right\rangle}_{d_{0,0}} - \left\langle (A_B^{-1}A_N)^T c_B, x_N\right\rangle + \langle c_N, x_N\rangle = \\ &= d_{0,0} - < \underbrace{(A_B^{-1}A_N)^T c_B - c_N}_{d_{0,j}, j \in N}, x_N > .\end{aligned}$$

Wir **wissen**: $ZF(\overline{x}) = \overline{z} = d_{00}$.

Da $d_{0j} \geq 0$ ist, gilt:

$$\begin{aligned}(A_B^{-1}A_N)^T c_B - c_N &\geq 0 \\ \Rightarrow c_B^T A_B^{-1}A_N - c_N^T &\geq 0^T \\ \Rightarrow c_B^T A_B^{-1}A_N &\geq c_N^T.\end{aligned}$$

Sei $y \in M$ beliebig und sei $ZF(y) = z$.

Zu zeigen: $\overline{z} \geq z \; \forall z$ (d.h. $\overline{x}$ ist optimal).

$$y = \begin{pmatrix} y_B \\ y_N \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}z = ZF(y) &= \langle c_B, y_B\rangle + \langle c_N, y_N\rangle = \\ &= c_B^T y_B + c_N^T y_N \leq \\ &\leq c_B^T y_B + c_B^T A_B^{-1} A_N y_N = \\ &= c_B^T A_B^{-1}(\underbrace{A_B y_B + A_N y_N}_{=b \quad \text{da } y \in M}) = \\ &= c_B^T A_B^{-1} b = d_{00} = \overline{z}\end{aligned}$$

Satz 1:
Wenn ein $l \in N$ existiert mit $d_{0l} < 0$, so kann durch eine Basisänderung der Wert der Zielfunktion erhöht werden.

Beweis:

Sei $l \in N$ mit $d_{0l} < 0$.

Wir erhöhen x_l soweit, wie es möglich ist. Die restlichen Variablen x_j, $j \in N$ bleiben dabei 0.

Bedingungen für die Erhöhung von x_l sind:

$$x_i = d_{i0} - d_{il}x_l \geq 0 \qquad \forall i \in B$$

(damit x_i zulässig bleibt).

Wenn $d_{il} \leq 0$, so wird die $i-te$ Bedingung nicht verletzt bei $x_l \to \infty$.

Kriterium für Maximum gegen Unendlich :

Wenn **alle** $d_{il} \leq 0$, $(i \in B)$, so kann x_l unbeschränkt wachsen!

Damit wächst auch der Wert der Zielfunktion unbeschränkt, denn wir haben:

$$ZF = d_{00} - \sum_{j \in N} d_{0j}x_j = d_{00} - \underbrace{d_{ol}}_{<0} x_l \longrightarrow \infty \qquad (x_l \longrightarrow \infty).$$

D.H. wenn x_l unbeschränkt wächst, so wächst die Zielfunktion auch unbeschränkt. Die Aufgabe nennen wir dann nicht lösbar (Maximum = Unendlich).

Betrachten wir nun den Fall, daß es mindestens ein $i \in B$, $d_{il} > 0$ gibt.

Sei B_+ die Menge aller solcher i, d.h.

$B_+ = \{i \mid i \in B \land d_{il} > 0\}$.

Für $i \in B_+$ folgt $x_l \leq \frac{d_{i0}}{d_{il}}$, damit $x_i \geq 0$ bleibt.

x_l kann damit bis zu $\min\limits_{i \in B} \left(\frac{d_{i0}}{d_{il}}\right)$ erhöht werden.

Sei $\min\limits_{i \in B} \left(\frac{d_{i0}}{d_{il}}\right) = \frac{d_{k0}}{d_{kl}}$ $(k \in B_+)$.

Wenn $x_l = \frac{d_{k0}}{d_{kl}}$ gesetzt wird, folgt $x_k = 0$.

Jetzt bilden wir eine neue Basis $\tilde{B}$ (wobei noch zu zeigen ist, daß $\tilde{B}$ Basis ist):

$$\tilde{B} := (B \setminus \{k\}) \cup \{l\}$$

(d.h. die Basisvariable x_k wird gegen die Nichtbasisvariable x_l als Basisvariable ausgetauscht):

$$\tilde{N} := (N \setminus \{l\}) \cup \{k\}$$

Der neue zulässige Punkt ist dann:

$$\tilde{x}_k = 0, \qquad \tilde{x}_i = d_{i0} - d_{il} \underbrace{\frac{d_{k0}}{d_{kl}}}_{=\tilde{x}_l}, \qquad i \neq k, \qquad i \in B$$

$$\tilde{x}_l = \frac{d_{k0}}{d_{kl}} \geq 0, \qquad \tilde{x}_j = 0, \qquad j \in N, \qquad j \neq l$$

Neuer Wert der Zielfunktion ist folglich:

$$d_{00} - d_{0l}\tilde{x}_l = d_{00} - \underbrace{d_{0l}}_{<0} \underbrace{\frac{d_{k0}}{d_{kl}}}_{>0} > d_{00}$$

falls $d_{k0} > 0$, d.h. der Wert der Zielfunktion steigt.

Wieso ist $\tilde{B}$ eine **Basis**?

d.h. Es ist **zu zeigen:** $A_{\tilde{B}}$ ist regulär, wobei die Matrix $A_{\tilde{B}}$ nur aus den Elementen $A_{.i}$ und $A_{.l}$ besteht, nicht aber aus $A_{.k}$.

Annahme : $A_{\tilde{B}}$ ist singulär.

Dann existieren Zahlen $\lambda_i \in R$ mit

$$A_{.l} = \sum_{\substack{i \in B \\ i \neq k}} \lambda_i A_{.i}.$$

Es gilt weiterhin: $d_{kl} > 0$, da $k \in B_+$ und damit ist

$$d_{kl} = \left(A_B^{-1}\right)_{k.} A_{.l} = \sum_{\substack{i \in B \\ i \neq k}} \lambda_i \underbrace{\left(A_B^{-1}\right)_{k.} A_{.i}}_{=\delta_{ki}, \text{wobei } k \neq i} = 0$$

was ein Widerspruch ist.

δ_{ki} ist dabei das Kroneckersymbol: $\delta_{ki} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$

Folglich ist $A_{\tilde{B}}$ regulär. □

Es bleibt noch anzugeben, wie die zur neuen Basis $\tilde{B}$ gehörenden d_{lj} aussehen, d.h. das neue Simplextableau ist aus dem alten zu berechnen.

Das zentrale Element, auch **Pivot** -Element genannt, ist dabei d_{kl}, die k-te Zeile ist die **Pivotzeile**, und die l-te Spalte ist die **Pivotspalte**.

Wir wissen:

$$x_i = d_{i0} - \sum_{j \in N} d_{ij} x_j, \qquad \forall i \in B.$$

Für $i = k$ ist dann:

$$x_k = d_{k0} - \sum_{j \in N} d_{kj} x_j =$$

$$= d_{k0} - \sum_{\substack{j \neq l \\ j \in N}} d_{kj} x_j - d_{kl} x_l$$

Damit ergibt sich für x_l:

$$x_l = \frac{1}{d_{kl}}(d_{k0} - \sum_{\substack{j \neq l \\ j \in N}} d_{kj} x_j) - \frac{1}{d_{kl}} x_k =$$

$$= \underbrace{\frac{d_{k0}}{d_{kl}}}_{\tilde{d}_{l0}} - (\underbrace{\frac{1}{d_{kl}}}_{\tilde{d}_{lk}} x_k + \sum_{\substack{j \neq l \\ j \in N}} \underbrace{\frac{d_{kj}}{d_{kl}}}_{\tilde{d}_{lj}} x_j)$$

$\tilde{d}_{l0}$, $\tilde{d}_{lk}$, $\tilde{d}_{lj}$ sind die Elemente der l-ten Zeile in dem neuen Simplextableau.

d.h. die Pivotzeile sieht wie folgt aus:

$$\tilde{d}_{lk} = \frac{1}{d_{kl}}, \qquad \tilde{d}_{lj} = \frac{d_{kj}}{d_{kl}}.$$

Für beliebige Basisvariablen x_i $(i \neq l)$ gilt nach dem Simplexschritt:

$$x_i = d_{i0} - \sum_{\substack{j \in N \\ j \neq l}} d_{ij}x_j - d_{il}x_l =$$

$$= d_{i0} - \sum_{\substack{j \in N \\ j \neq l}} d_{ij}x_j - d_{il}\left(\frac{d_{k0}}{d_{kl}} - \frac{1}{d_{kl}}x_k - \sum_{\substack{j \in N \\ j \neq l}} \frac{d_{kj}}{d_{kl}}x_j\right) =$$

$$= d_{i0} - \frac{d_{il}d_{k0}}{d_{kl}} - \sum_{\substack{j \in N \\ j \neq l}} d_{ij}x_j + d_{il} \sum_{\substack{j \in N \\ j \neq l}} \frac{d_{kj}}{d_{kl}}x_j + \frac{d_{il}}{d_{kl}}x_k =$$

$$= \underbrace{d_{i0} - \frac{d_{il}d_{k0}}{d_{kl}}}_{=\tilde{d}_{i0}} - \sum_{\substack{j \in N \\ j \neq l}} \underbrace{\left(d_{ij} - \frac{d_{il}d_{kj}}{d_{kl}}\right)}_{=\tilde{d}_{ij}\,\text{(Kreuzregel)}} x_j + \underbrace{\frac{d_{il}}{d_{kl}}}_{=-\tilde{d}_{ik}} x_k$$

d.h. wenn für den zulässigen Basispunkt $\overline{x}$ die Werte der Basisvariablen $\overline{x}_i$ positiv sind, so stellt die Methode entweder die Unlösbarkeit der Aufgabe fest (Maximum=Unendlich), oder es wird ein fester Punkt x^* ausgerechnet. x^* ist dann die Lösung.

Beispiel:

Berechnen Sie:

$\max x_1 + x_2$ unter den Nebenbedingungen

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 1 \\ 2x_1 + 2x_2 \leq 1 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Lösung:

		x_1	x_2
	0	-1	-1
u_1	1	1	2
u_2	1	**2**	2

$\Longrightarrow$

		u_2	x_2
	0.5	0.5	0
u_1	0.5	-0.5	1
x_1	0.5	0.5	1

Die rechte Tabelle ist optimal, d.h. der Basispunkt $\overline{x} = \begin{pmatrix} \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist optimal und der Wert der Zielfunktion in $\overline{x}$ ist: $ZF(\overline{x}) = 0.5$.

Anwendung auf das Simplextableau:

$$
\begin{array}{cc|c|ccccccc l}
 & & & \multicolumn{7}{c}{\text{NBV}} & \\
\cline{4-10}
 & & & x_{m+1} & \dots & x_l & \dots & x_j & \dots & x_n & \\
\cline{3-10}
 & & d_{0,0} & d_{0,m+1} & \dots & d_{0,l} & \dots & d_{0,j} & \dots & d_{0,m} & \\
\hline
 & x_1 & d_{1,0} & d_{1,m+1} & \dots & d_{1,l} & \dots & d_{1,j} & \dots & d_{1,m} & \\
 & x_2 & d_{2,0} & d_{2,m+1} & \dots & d_{2,l} & \dots & d_{2,j} & \dots & d_{2,m} & \\
\text{BV} & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
 & x_k & d_{k,0} & d_{k,m+1} & \dots & d_{k,l} & \dots & d_{k,j} & \dots & d_{k,m} & \leftarrow \textbf{Pivotzeile} \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
 & x_i & d_{i,0} & d_{i,m+1} & \dots & d_{i,l} & \dots & d_{i,j} & \dots & d_{i,m} & \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
 & x_m & d_{m,0} & d_{m,m+1} & \dots & d_{m,l} & \dots & d_{m,j} & \dots & d_{m,m} & \\
\hline
 & & & & & \uparrow & & & & & \\
 & & & & & \textbf{Pivotspalte} & & & & &
\end{array}
$$

Voraussetzung:

$$d_{0l} < 0, \qquad \frac{d_{k0}}{d_{kl}} = \min\{\frac{d_{i0}}{d_{il}} \mid i \in B_+ (\text{also } d_{il} > 0)\}$$

Berechnung des neuen Tableaus:

- An der Stelle des Pivotelements...

  $$\tilde{d}_{lk} = \frac{1}{d_{kl}}$$

  Die ehemalige Pivotzeile nennen wir jetzt l-te Zeile, da in dieser Zeile die Variable x_l als Basisvariable liegt!

- Die l-te Zeile (ehemalige Pivotzeile) berechnet sich nach...

  $$\tilde{d}_{lj} = \frac{d_{kj}}{d_{kl}}$$

  d.h. jedes Element der Zeile wird durch das Pivotelement dividiert.

- Die k-te Spalte (ehemalige Pivotspalte) berechnet sich nach...

  $$\tilde{d}_{il} = -\frac{d_{il}}{d_{kl}}$$

  d.h. jedes Element der Spalte wird durch Pivotelement dividiert und das Vorzeichen umgekehrt, denn es gilt:

- Die restlichen Elemente des Folgetableaus werden nach der Kreuzregel berechnet...

  $$\tilde{d}_{ij} = d_{ij} - \frac{d_{il} d_{kj}}{d_{kl}}.$$

2.2 Entartung, lexikographische Simplexmethode

Definition 1:
Ein Basispunkt heißt *entartet*, wenn der Wert mindestens einer Basisvariablen Null ist.

			NBV
			x_l
			$\vdots$
BV	x_k	$0 = d_{k0}$	d_{kl}

Neuer Wert der Zielfunktion beim Wechsel $B \to \tilde{B} = (B \setminus \{k\}) \cup l$ ist

$$d_{00} - d_{0l}\frac{\overbrace{d_{k0}}^{=0}}{d_{kl}} = d_{00}$$

(bis jetzt: Wenn $d_{k0} > 0$, so wächst die Zielfunktion)

Wenn das Element d_{kl} das Pivotelement werden sollte, wird sich der Zielfunktionswert nicht ändern!

Daher müssen wir uns in diesem Fall mit der Frage der Endlichkeit des Algorithmus beschäftigen, denn es kann ja sein, daß wir in einen Zyklus geraten, wie das nächste Beispiel auch zeigt.

Beispiel:

$$2x_3 + 2x_4 - 8x_5 - 2x_6 \longrightarrow \max$$
$$\begin{cases} 2x_3 + x_4 - 3x_5 - x_6 \leq 0 \\ -7x_3 - 3x_4 + 7x_5 + 2x_6 \leq 0 \\ x_i \geq 0, i = 1 \ldots 6 \end{cases}$$

wird umgeformt zu:

$$\begin{cases} 2x_3 + x_4 - 3x_5 - x_6 + x_1 = 0 \\ -7x_3 - 3x_4 + 7x_5 + 2x_6 + x_2 = 0 \end{cases}$$

		x_3	x_4	x_5	x_6
	0	-2	-2	8	2
x_1	0	**2**	1	-3	-1
x_2	0	-7	-3	7	2

		x_1	x_4	x_5	x_6
	0	1	-1	5	1
x_3	0	1/2	1/2	-3/2	-1/2
x_2	0	7/2	**1/2**	-7/2	-3/2

		x_1	x_2	x_5	x_6
	0	8	-2	-2	2
x_3	0	-3	-1	**2**	1
x_4	0	7	2	-7	-3

		x_1	x_2	x_3	x_6
	0	5	1	1	-1
x_5	0	-3/2	-1/2	1/2	1/2
x_4	0	-7/2	-3/2	7/2	**1/2**

		x_1	x_2	x_3	x_4
	0	-2	-2	8	2
x_5	0	**2**	1	-3	1
x_6	0	-7	-3	7	2

		x_5	x_2	x_3	x_4
	0	1	-1	5	1
x_1	0	1/2	1/2	-3/2	1/2
x_6	0	1/2	**1/2**	-7/2	-3/2

		x_3	x_4	x_5	x_6
	0	-2	-2	8	2
x_1	0	2	1	-3	-1
x_2	0	-7	-3	7	2

= erstes Tableau!

Was wissen wir über Basispunkte?

- Ein Basispunkt erfüllt die m Gleichungen von $Ax = b$ mit $x_j \geq 0$ und $j = 1 \ldots m$ und die (n-m) Nicht-Basisvariablen sind Null, d.h. $x_j = 0$ für alle $j \in N$.
- In entarteten Basispunkten werden noch zusätzliche Basisvariablen $x_j = 0, j \in B$.

Es ist günstig für die Behandlung dieses Falls die *lange Form des Simplextableaus* zu benutzen.

Lange Form des Simplextableaus:

			BV					NBV				
			x_1	$\dots$	x_p	$\dots$	x_m	x_{m+1}	$\dots$	x_q	$\dots$	x_n
		$d_{0,0}$						$d_{0,m+1}$	$\dots$	$d_{0,q}$	$\dots$	$d_{0,m}$
BV	x_1	$d_{1,0}$	1	$\dots$	0	$\dots$	0	$d_{1,m+1}$	$\dots$	$d_{1,q}$	$\dots$	$d_{1,m}$
	x_2	$d_{2,0}$	0	$\dots$	0	$\dots$	0	$d_{2,m+1}$	$\dots$	$d_{2,q}$	$\dots$	$d_{2,m}$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
	x_p	$d_{p,0}$	0	$\dots$	1	$\dots$	0	$d_{p,m+1}$	$\dots$	$d_{p,q}$	$\dots$	$d_{p,m}$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
	x_m	$d_{m,0}$	0	$\dots$	0	$\dots$	1	$d_{m,m+1}$	$\dots$	$d_{m,q}$	$\dots$	$d_{m,m}$

Die Transformation des Simplextableaus für einen Simplexschritt läßt sich wieder ausrechnen:

Sei wieder d_{kl} das Pivotelement.

- Dann wird die k-te Zeile durch d_{kl} dividiert...

  $$\tilde{z}_l = \frac{1}{d_{kl}} z_k$$

  (z_l ist die l-te Zeile, z_k ist die k-te Zeile).

- Alle übrigen Zeilen z_i werden ersetzt durch

  $$\tilde{z}_i = z_i - \frac{d_{il}}{d_{kl}} z_k$$

  (Kreuzregel, $i \neq k$, $i = 0$ zugelassen für die charakteristische Zeile).

Nun einige Überlegungen bezüglich der Auswahl der Pivotzeile:

Sei $x \in R^n$, $x \neq 0_n$

Definition 2:
x heißt *lexikographisch positiv* ($x \succ 0$) , falls die erste von Null verschiedene Komponente von x positiv ist.

Formell:

$$x \succ 0 := \exists i (1 \leq i \leq n \wedge x_i > 0 \wedge \forall j (j < i \rightarrow x_j = 0))$$

Definition 3:
x heißt *lexikographisch negativ* ($x \prec 0$) , falls $-x \succ 0$.

Definition 4:
Sei die Relation $\succ$ (gesprochen: lexikographisch größer):

$$\succ : R^n \times R^n \text{mit } x \succ y \Leftrightarrow x - y \succ 0.$$

Bemerkung :

$\succ$ ist:

1. irreflexiv ($x \not\succ x$)
2. transitiv ($x \succ y \wedge y \succ z \rightarrow x \succ z$)
3. asymmetrisch ($x \succ y \rightarrow y \not\succ x$)
4. total ($\forall x \forall y (x \in R^n \wedge y \in R^n \rightarrow ((x \succ y) \vee (y \succ x)))$
5. $x \succ y \rightarrow \lambda x \succ \lambda y$ ($\lambda > 0$)

1. bis 3. bedeuten: irreflexive Halbordnung,
1. bis 4. bedeuten: irreflexive Ordnung.

Lexikographische Simplexmethode :

Wir definieren eine neue Regel für die Auswahl der Pivotzeile:

- Spalte l legt fest (durch $d_{0l} < 0$).

  Wir betrachten $i \in B$ mit $d_{il} > 0$ (Menge B_+) und bilden $\frac{z_i}{d_{il}} = z_i'$.

  Offensichtlich unterscheiden sich die Zeilen z_i' und z_v' ($z_i' \neq z_v'$ für $i \neq v$, $i, v \in B$, weil die Zeilen z_i und z_v unterschiedlich sind, denn es gilt: $d_{ii} = z_{ii} = 1$ und $d_{vi} = z_{vi} = 0$.

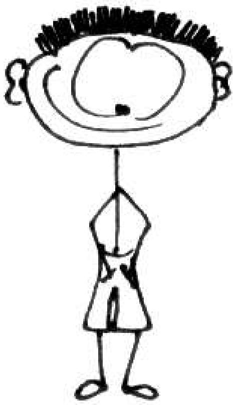
  Unter den Zeilen z_i' gibt es folglich eine kleinste nach der lexikographischen Ordnung, diese sei z_k.

  Damit wird die k-te Zeile Pivotzeile, d.h.

  z_k' ist das lexikographische Minimum von den z_i', $i \in B_+$:

  $z_k' = \text{lexmin}\{z_i' \mid i \in B_+\}$

- Bemerkung: Diese Vorschrift beinhaltet die gewöhnliche Auswahlregel konsistent, denn wenn $\frac{d_{i0}}{d_{il}} \geq \frac{d_{k0}}{d_{kl}}$ für alle $i \in B_+$ und k eindeutig bestimmt, so wird k hierdurch eindeutig festgelegt und das lexikographische Minimum z_i' wird in $i = k$ angenommen.



Beispiel:

Betrachten wir folgendes Simplextableau.

		x_1	x_4
	2	-1	-2
x_3	0	1	2
x_2	0	3	4

Zu bestimmen ist nach der lexikographischen Simplexmethode die entsprechende Pivotzeile, wenn die „x_i“ als Pivotspalte betrachtet wird.

Lösung:

Zuerst schreiben wir die lange Form des Simplextableaus:

			x_1	x_2	x_3	x_4
		2	-1	0	0	-2
z_{x_3}	x_3	0	1	0	1	2
z_{x_2}	x_2	0	3	1	0	4

Dann ist:

$z'_{x_3} = (0, 1, 0, 1, 2)$

$z'_{x_2} = (0, 1, \frac{1}{3}, 0, \frac{4}{3})$

und damit $z'_{x_2} \succ z'_{x_3}$, d.h. die Zeile z_{x_3} ist die Pivotzeile und $d_{11} = 1$ das Pivotelement.

Wir können annehmen, daß alle Zeilen z_i $(i \in B)$ lexikographisch positiv sind. Das läßt sich stets erreichen, indem die Variablen umnummeriert werden, so daß die Basisvariablen die Indizes $1 \dots m$ bekommen.

		$x_1 \quad \dots \quad x_m$	$x_{m+1} \quad \dots \quad x_n$
	d_{00}		
x_1 $\vdots$ x_m	$d_{D0} \geq 0$	E_m	D

Behauptung 1 :

Seien alle Zeilen z_i $(i \in B)$ lexikographisch positiv.
Dann sind nach der Simplextransformation alle Zeilen $\tilde{z}_i$, $i \in \tilde{B}$ ebenfalls lexikographisch positiv:

Beweis: Sei $\tilde{B} = (B \setminus \{k\}) \cup \{l\}$.

- Für $l \in \tilde{B}$ ist klar, denn

$$\tilde{z}_l = \underbrace{\frac{1}{d_{kl}}}_{>0} \underbrace{z_k}_{\succ 0} \succ 0.$$

- Für $i \in \tilde{B}$, $i \neq l$ gilt:

$$\tilde{z}_i = z_i - \left(\frac{d_{il}}{d_{kl}}\right) z_k,$$

  wobei $d_{kl} > 0$ ist.

1. Fall $d_{il} \leq 0$, dann ist $-\frac{d_{il}}{d_{kl}} > 0$.

Die erste Komponente von z_k, die von Null verschieden ist, ist positiv, da $z_k \succ 0$. Folglich gilt:

$$\tilde{z}_i \succ z_i$$

und, da $z_i \succ 0$, auch:

$$\tilde{z}_i \succ 0$$

2. Fall $d_{il} > 0$, d.h. $i \in B_+$.

Dann ist $z'_i \succ z'_k$ nach der lexikographischen Auswahlregel. Dann gilt:

$$\underbrace{\frac{z_i}{d_{il}}}_{=z'_i} \succ \underbrace{\frac{z_k}{d_{kl}}}_{=z'_k} \;|.d_{il} > 0$$

$$\underbrace{z_i - \frac{d_{il}}{d_{kl}} z_k}_{=\tilde{z}_i} \succ 0$$

□

Behauptung 2 :

Die charakteristische Zeile im langen Tableau wächst lexikographisch.

Beweis:

$$\tilde{z}_0 = z_0 - \frac{\overbrace{d_{0l}}^{<0}}{\underbrace{d_{kl}}_{>0}} \underbrace{z_k}_{\succ 0} \succ z_0$$

□

Beispiel:

Betrachten wir wieder das letzte Beispiel. Jetzt verwenden wir die lexikographische Simplexmethode:

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
	0	0	0	-2	-2	8	2
x_1	0	1	0	**2**	1	-3	-1
x_2	0	0	1	-7	-3	7	2

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
	0	1	0	0	-1	5	1
x_3	0	1/2	0	1	**1/2**	-3/2	-1/2
x_2	0	7/2	1	0	1/2	-7/2	-3/2

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
	0	2	0	2	0	2	0
x_4	0	1	0	2	1	-3	-1
x_2	0	3	1	-1	0	-2	-1

Somit finden wir nach drei Schritten (mit der lexikographischen Simplexmethode) einen optimalen Punkt: $\overline{x} = (0, 0, 0, 0, 0, 0)^T$ und der Wert der Zielfunktion ist 0.

□

Mittels lexikographischer Simplexmethode haben wir gezeigt, daß gilt:

Satz 2:
Ist der Restriktionsbereich einer linearen Optimierungsaufgabe nicht leer, so kann nur einer der beiden folgenden Fälle eintreten:

1. Entweder existiert eine Lösung der Aufgabe,
2. oder der Extremalwert ist $+\infty$ (bei Maximierung) bzw. $-\infty$ (bei Minimierung)

□

Beide Fälle werden durch die lexikographische Simplexmethode erkannt (sofern man einen zulässigen Basispunkt kennt).

Bleibt die Frage zu klären:

Wie findet man einen zulässigen Basispunkt? bzw: **Wie erkennt man, daß $M = \emptyset$ ist?**

Bevor wir uns dieser Frage widmen wollen wir noch den folgenden Spezialfall betrachten:

- Wir haben gesehen, daß ein Tableau eine optimale Lösung liefert, falls $d_{0j} \geq 0 \forall j \in N$.
- Wir haben den Spezialfall betrachtet: In der 0-ten Spalte existiert mindestens ein $d_{k0} = 0$. In diesem Fall wird die Pivotzeile nach der lexikographischen Simplexmethode bestimmt.
- Betrachten wir jetzt den zweiten Spezialfall: In der charakteristische Zeile (0-te Zeile) existiert ein $\hat{j} \in N$ mit $d_{0\hat{j}} = 0$. In diesem Fall ändert sich der Wert der Zielfunktion nicht beim Übergang zum nächsten Simplextableau:

denn:

es sei $\tilde{B} = (B \setminus \{k\}) \cup \{\hat{j}\}$, so gilt:

$$\tilde{d}_{00} = d_{00} - \frac{\overbrace{d_{0\hat{j}}}^{=0}\, d_{k0}}{d_{k\hat{j}}} = d_{00}$$

- Offensichtlich ändern sich auch die weiteren Werte nicht in der charakteristischen Zeile:

$$\tilde{d}_{0j} = d_{0j} - \frac{\overbrace{d_{0\hat{j}}}^{=0}\, d_{kj}}{d_{k\hat{j}}} = d_{0j} \qquad j \neq \hat{j}$$

und

$$\tilde{d}_{0\hat{j}} = -\frac{1}{d_{k\hat{j}}} \overbrace{d_{0\hat{j}}}^{=0} = 0 = d_{0\hat{j}}$$

Im allgemeinen gilt : Falls in dem optimalen Tableau ($d_{0j} \geq 0 \; \forall j \in N$) die Koeffizienten $d_{0j_1} = \cdots = d_{0j_r} = 0$ sind für $j_1, \ldots, j_r \in N$, so kann man i.a. noch $s = 2^r - 1$ Nachfolgetableaus berechnen, die jeweils optimal sind:

Seien dabei die Basispunkte $\overline{x}_0, \overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_s$ berechnet.
Da S (=Menge der Lösungen) auch ein konvexes Polyeder ist, so ist jedes Element der konvexen Hülle x von $\overline{x}_0, \overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_s$ auch eine Lösung der linearen Optimierungsaufgabe:

$$\overline{x} = \lambda_0 \overline{x}_0 + \cdots + \lambda_s \overline{x}_s, \qquad \lambda_i \geq 0, \qquad \sum_{i=0}^{s} \lambda_i = 1.$$

Beispiel:

$x_1 + x_2 \longrightarrow \max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 10 \\ 2x_1 + x_2 \leq 18 \\ 2x_1 + 5x_2 \leq 35 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

Lösung:

$x_1 + x_2 + u_1 = 10$

$2x_1 + x_2 + u_2 = 18$

$2x_1 + 5x_2 + u_3 = 35$

		x_1	x_2	Q
	0	-1	-1	
u_1	10	1	1	10
u_2	18	**2**	1	9
u_3	35	2	5	17,5

		u_2	x_2	Q
	9	1/2	-1/2	
u_1	1	-1/2	**1/2**	2
x_1	9	1/2	1/2	18
u_3	17	-1	4	4,25

		u_2	u_1	Q
	10	0	1	
x_2	2	-1	2	
x_1	8	1	-1	8
u_3	9	**3**	-8	3

$$\Longrightarrow \qquad \overline{x}_0 = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

		u_3	u_1
	10	0	1
x_2	5	1/3	
x_1	5	-1/3	
u_2	3	1/3	-8/3

$$\Longrightarrow \qquad \overline{x}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow$ Lösung: $\overline{x} = \lambda_0 \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$ mit $\lambda_0 \geq 0$, $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_0 + \lambda_1 = 1$.

Zum Beispiel für $\lambda_0 = \frac{5}{7}$, $\lambda_1 = \frac{2}{7}$ ergibt sich der Lösungspunkt $\overline{x}$ mit $\overline{x} = \begin{pmatrix} 50/7 \\ 20/7 \end{pmatrix}$

Bleibt die Frage zu klären:

Wie erkennt man, daß $M = \emptyset$? bzw. **Wie findet man einen zulässigen Basispunkt?**

2.3 Die Hilfsaufgabe

Als wir den Begriff Basispunkt eingeführt haben, haben wir gesehen, daß wir, um leicht einen Basispunkt für eine gegebene lineare Optimierungsaufgabe zu finden, die Dimension erhöhen sollten. Was geschieht dabei mit unserer linearen Optimierungsaufgabe bzw. wie ist der Zusammenhang zwischen der alten und der neuen linearen Optimierungsaufgabe?

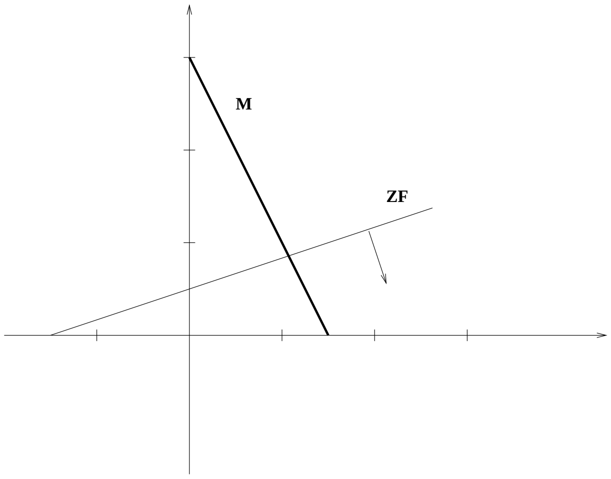
Wir definieren nun einen neuen (größeren) Restriktionsbereich, in dem unser alter Restriktionsbereich nur ein Teil ist!

Beispiel:

P_1:

$x_1 - 3x_2 \longrightarrow \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

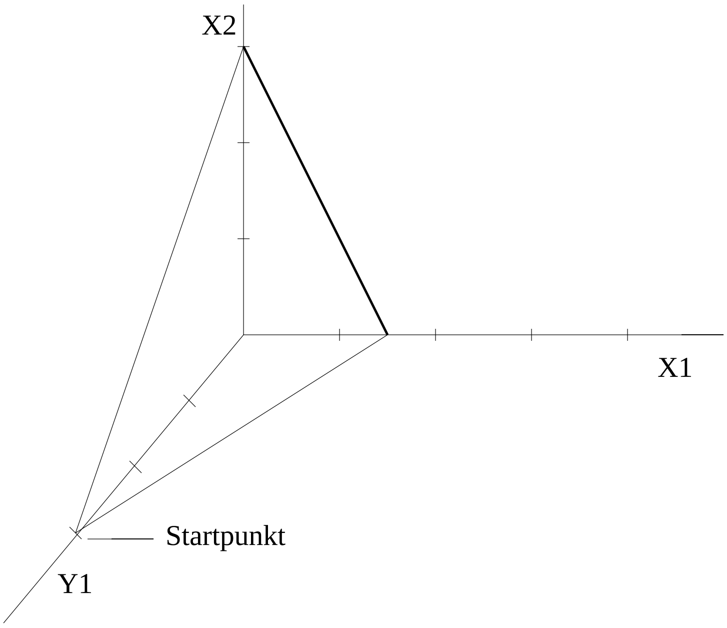


wird durch Hinzufügen einer dritten Dimension zu:

P_2:

$$x_1 - 3x_2 \longrightarrow \max \begin{cases} 2x_1 + x_2 + y_1 = 3 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ y_1 \geq 0 \end{cases}$$

Man sieht sofort, daß (0,0,3) ein zulässiger Basispunkt für P_2 ist.



Idee, um den ersten zulässigen Basispunkt für M zu finden:

Ausgehend vom (offensichtlich leicht zu findenden) Start-Basispunkt in P_2 wird die Simplexmethode benutzt, um zu einem Basispunkt von M zu kommen.

Das wird in unserem Beispiel der Fall sein, falls wir die Ecken des neuen Restriktionsbereiches durchlaufen mit dem Ziel: $\min y_1 = 0$. Im Allgemeinen wird das Ziel sein: $\min \sum y_i = 0$, wobei y_i die zusätzlichen künstlichen Variablen sind.

d.h. wir suchen $\min \sum y_i$.

Falls $\min \sum y_i = 0$ ist, so haben wir einen Basispunkt von M gefunden. Falls das Minimum größer Null ist, so folgt $M = \emptyset$.

Allgemein läßt sich der erste Basispunkt wie folgt bestimmen:

Wir gehen von der Standard-Aufgabe aus mit der Restriktionsmenge

$M = \{x \in R^n | Ax = b, x \geq 0_n\}, \qquad b \in R^n, x \in R^n, rgA$ bel. , $A \in \mathcal{M}(m,n), b \geq 0_m$

Betrachten wir die Hilfsaufgabe H:

$$(H) \quad \min\{ \sum_{i=1}^{m} y_i \mid Ax + Ey = b, x \geq 0_n, y \geq 0_m\}$$

Die y_i sind hierbei künstliche Variablen.

Sei v der Extremalwert der Hilfsaufgabe (H) im Basispunkt $(\overline{x}, \overline{y})$.

1. Fall: $v = 0$.

Dann gilt $\overline{y}_1 = \cdots = \overline{y}_m = 0$ (da $y_i \geq 0$) und folglich ist $\overline{x}$ in M.

2. Fall: $v > 0$. Dann ist für jedes $x \in R^n$ $Ax < b$ und damit $M = \emptyset$!

Wie kann man die Hilfsaufgabe (H) lösen?

Einfach, denn ein Start-Basispunkt für H ist immer **leicht** zu finden.

$x = 0_n$

$y = b (\geq 0)$

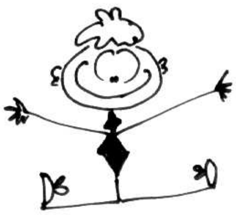
Nach der Simplexmethode erhalten wir eine Lösung oder stellen die Unlösbarkeit fest. (Unlösbarkeit würde heißen $v = -\infty$, und das kann wegen $v \geq 0$ nicht sein).

Bemerkung : Wir lösen die Hilfsaufgabe H':

$$(H') \quad \max\{- \sum_{i=1}^{m} y_i \mid Ax + Ey = b, x \geq 0_n, y \geq 0_m\}$$

denn wie man leicht sieht, gilt:

$$\min\{+f(x) \mid x \in M\} = -\max\{-f(x) \mid x \in M\}.$$



Beispiel:

Lösen Sie folgende Lineare Optimierungsaufgabe:

(P)

$3x_1 + 2x_2 \longrightarrow \max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 2 \\ 2x_1 - x_2 \leq 2 \\ x_1 + x_2 \geq 1 \\ 2x_1 - x_2 \geq 1 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Lösung:

Aus den Nebenbedingungen in (P) erhalten wir:

$$M_1 : \begin{cases} x_1 + x_2 + u_1 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + u_2 = 2 \\ x_1 + x_2 - u_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - u_4 = 1 \\ x_i \geq 0, u_j \geq 0. \end{cases}$$

Ein zulässiger Basispunkt ist nicht ohne weiteres angebbar bzw. es ist nicht ohne weiteres klar, ob $M = \emptyset$ ist. Deshalb führen wir die künstlichen Variablen y_1 und y_2 ein:

$$M_2 : \begin{cases} x_1 + x_2 + u_1 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + u_2 = 2 \\ x_1 + x_2 - u_3 + y_1 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - u_4 + y_2 = 1 \\ x_i \geq 0, u_j \geq 0, y_r \geq 0. \end{cases}$$

Damit haben wir die Hilfsaufgabe H zu lösen, um festzustellen, ob $M = \emptyset$ oder $M \neq \emptyset$. Für den Fall, daß $M \neq \emptyset$ ist, werden wir auch einen zulässigen Basispunkt finden:

(H):

$\min\{y_1 + y_2 \mid M_2\}$

$=$

$-\max\{-y_1 - y_2 \mid M_2\}$

Wir haben:

Basisvariablen: u_1, u_2, y_1, y_2

Nichtbasisvariablen: x_1, x_2, u_3, u_4

Weitere Vorbereitungen: Die Zielfunktion muß als Funktion der Nichtbasisvariablen dargestellt werden!

Dazu:

$y_1 = 1 - (x_1 + x_2 - u_3)$

$y_2 = 1 - (2x_1 - x_2 - u_4)$

Damit ist:

$ZF = -(y_1 + y_2) =$

$= -\left(1 - (x_1 + x_2 - u_3) + 1 - (2x_1 - x_2 - u_4)\right) =$

$= -\left(1 - x_1 - x_2 + u_3 + 1 - 2x_1 + x_2 + u_4)\right) =$

$= -2 - (-3x_1 + u_3 + u_4)$, d.h.

$d_{00} = -2$, $d_{0,x_1} = -3$, $d_{0,x_2} = 0$, $d_{0,u_3} = 1$, $d_{0,u_4} = 1$.

Jetzt können wir das erste Simplextableau für (H) aufstellen:

		x_1	x_2	u_3	u_4	Q
	-2	-3	0	1	1	
u_1	2	1	1	0	0	2
u_2	2	2	-1	0	-0	1
y_1	1	1	1	-1	0	1
y_2	1	**2**	-1	0	-1	1/2

		y_2	x_2	u_3	u_4	Q
	-1/2	3/2	-3/2	1	-1/2	
u_1	3/2	-1/2	3/2	0	1/2	1
u_2	1	-1	0	0	1	
y_1	1/2	-1/2	**3/2**	-1	1/2	1/3
x_1	1/2	1/2	-1/2	0	-1/2	

		y_2	y_1	u_3	u_4
	0	1	1	0	0
u_1	1	0	-1	1	0
u_2	1	-1	0	0	1
x_2	1/3	-1/3	2/3	-2/3	1/3
x_1	2/3	1/3	1/3	-1/3	-1/3

Dieses Tableau ist optimal und der Wert der Zielfunktion ist 0. Folglich ist $M \neq \emptyset$ und als zulässiger Basispunkt für die Originalaufgabe ergibt sich:

$$\overline{x} = \begin{pmatrix} \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \\ \overline{u}_1 \\ \overline{u}_2 \\ \overline{u}_3 \\ \overline{u}_4 \\ \overline{y}_1 \\ \overline{y}_2 \end{pmatrix} \in M_2, \text{ und damit } \begin{pmatrix} \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \\ \overline{u}_1 \\ \overline{u}_2 \\ \overline{u}_3 \\ \overline{u}_4 \end{pmatrix} \in M_1, \text{ d.h. } \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Damit ergibt sich:

Basisvariablen für die ursprüngliche Aufgabe: x_1, x_2, u_1, u_2,
Nichtbasisvariablen für die ursprüngliche Aufgabe: u_3, u_4.

Wir haben ZF: $3x_1 + 2x_2$.

Damit das erste Tableau aufgestellt werden kann, müssen wir die Zielfunktion als Funktion der Nichtbasisvariablen darstellen:

$-\frac{2}{3}u_3 + \frac{1}{3}u_4 + x_2 = \frac{1}{3} \Longrightarrow x_2 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}u_3 - \frac{1}{3}u_4$

$$-\frac{1}{3}u_3 - \frac{1}{3}u_4 + x_1 = \frac{2}{3} \Longrightarrow x_1 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}u_3 + \frac{1}{3}u_4$$

Jetzt setzen wir x_1 und x_2 in die Zielfunktion ein:

$$ZF = 3x_1 + 2x_2 =$$

$$= 3(\tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{3}u_3 + \tfrac{1}{3}u_4) + 2(\tfrac{1}{3} + \tfrac{2}{3}u_3 - \tfrac{1}{3}u_4) =$$

$$= 2 + u_3 + u_4 + \tfrac{2}{3} + \tfrac{4}{3}u_3 - \tfrac{2}{3}u_4 =$$

$= \frac{8}{3} + \frac{7}{3}u_3 + \frac{1}{3}u_4$, d.h.

$d_{00} = \frac{8}{3}$, $d_{0,u_3} = -\frac{7}{3}$, $d_{0,u_4} = -\frac{1}{3}$:

		u_3	u_4
	8/3	-7/3	-1/3
x_1	2/3	-1/3	-1/3
x_2	1/3	-2/3	1/3
u_1	1	**1**	0
u_2	1	0	1

		u_1	u_4
	5	7/3	-1/3
x_1	1	1/3	-1/3
x_2	1	2/3	1/3
u_3	1	1	0
u_2	1	0	**1**

		u_1	u_2
	16/3	7/3	1/3
x_1	4/3	1/3	1/3
x_2	2/3	2/3	-1/3
u_3	1	1	0
u_4	1	0	1

Offensichtlich ist dieses Tableau optimal, und es gilt:

$\overline{x} = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$, ZF=16/3.

Konvexes Polyeder, extremaler Punkt, Simplex, adjungierte Matrix, bla, bla, bla... – jetzt is' allet klar!

Kapitel 3

3.1 Dualität in der linearen Optimierung

Definition 1:

Betrachten wir

$(P)\qquad \max\{\underbrace{c^Tx}_{=\langle c,x\rangle}\ |Ax \leq b, \quad x \geq 0\}.$

Die Aufgabe

$(D)\qquad \min\{\underbrace{b^Ty}_{=\langle b,y\rangle}\ |A^Ty \geq c, \quad y \geq 0\}$

heißt die zu (P) *duale Aufgabe*.

Definition 2:

Betrachten wir

$(P)\qquad \max\{\langle c,x\rangle \mid Ax = b, \quad x \geq 0\}$ mit $rgA = m$, $A \in \mathcal{M}(m,n)$ und $c, x \in R^n$, $b \in R^m$.

Die Aufgabe

$(D)\qquad \min\{\langle b,u\rangle \mid A^Tu \geq c\} \quad u \in R^m, \quad A^T \in \mathcal{M}(n.m).$

heißt die zu (P) duale Aufgabe.

Bemerkung: Definition 1 ist äquivalent zu Definition 2.

Beweis: $(\rightarrow)$ (Definition 1 $\rightarrow$ Definition 2)

Sei (P) $\max\{\langle c,x\rangle \mid Ax \leq b, \quad x \geq 0\}$. Nach Definition 1 hat die duale Aufgabe die Form:

$(D)\qquad \min\{\langle b,y\rangle \mid A^Ty \geq c, \quad y \geq 0\}.$

Betrachten wir

(P') $\max\{\langle c,x\rangle \mid Ax=b, \quad x\geq 0\}$.

Offensichtlich ist (P') äquivalent zu der Aufgabe

$\max\{\langle c,x\rangle \mid Ax\leq b, \quad -Ax\leq -b, \quad x\geq 0\}$,

was wiederum äquivalent ist zu:

$\max\{\langle c,x\rangle \mid \begin{pmatrix} A \\ -A \end{pmatrix} x \leq \begin{pmatrix} b \\ -b \end{pmatrix}, \quad x\geq 0\}$.

Nach Definition 1 hat die zu dieser Aufgabe duale Aufgabe die Form:

(D') $\qquad \min\{\left\langle \begin{pmatrix} b \\ -b \end{pmatrix}, y\right\rangle \mid (A^T|-A^T)y\geq c, \quad y\geq 0\}$.

Betrachten wir die Zielfunktion der letzten Aufgabe:

$$\left\langle \begin{pmatrix} b \\ -b \end{pmatrix}, y\right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \\ -b_1 \\ \vdots \\ -b_m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{2m} \end{pmatrix}\right\rangle =$$

$$= b_1y_1+\cdots+b_my_m-b_1y_{m+1}-\cdots-b_my_{2m} =$$

$$= b_1\underbrace{(y_1-y_{m+1})}_{:=u_1}+\cdots+b_m\underbrace{(y_m-y_{2m})}_{:=u_m} =$$

$$= b_1u_1+\cdots+b_mu_m = \langle b,u\rangle,\ b\in R^m, \quad u\in R^m.$$

Betrachten wir nun auch die Restriktionen:

$$\begin{pmatrix} A \\ -A \end{pmatrix}^T y\geq c$$

Da $\begin{pmatrix} A \\ -A \end{pmatrix}^T = (A^T|-A^T)$ ist, gilt weiter:

$c_i \leq <$ (i-te Zeile von $(A^T|-A^T), y >$.

i-te Zeile von $(A^T|-A^T)$ ist:

$$(a_{1i},a_{2i},\ldots,a_{mi},-a_{1i},-a_{2i},\ldots,-a_{mi}).$$

Folglich ist i-te Komponente des Produktes $(A^T|-A^T)y$:

$a_{1i}y_1+a_{2i}y_2+\cdots+a_{mi}y_m-a_{1i}y_{m+1}-\cdots-a_{mi}y_{2m} =$

$a_{1i}(\underbrace{y_1-y_{m+1}}_{=u_1})+a_{2i}(\underbrace{y_2-y_{m+2}}_{=u_2})+\cdots+a_{mi}(\underbrace{y_m-y_{2m}}_{=u_m}) =$

$= \sum\limits_{j=1}^{m} a_{ji}u_j = A_{.i}u,$

d.h. $(A^T|-A^T)y = A^Tu$.

Die Variable u ist dabei beliebig, d.h.

(D') $\quad \min\{\langle b,u\rangle \,|A^Tu\geq c\}$.

□

Beweis: (←) (Definition 2 → Definition 1)

Seien
(P) $\quad \max\{\langle c,x\rangle \mid Ax=b, \quad x\geq 0\}$ und

(D) $\quad \min\{\langle b,u\rangle \mid A^Tu\geq c\}$ gegeben.

Betrachten wir jetzt die lineare Optimierungsaufgabe (P') mit:

(P') $\max\{\langle c,x\rangle \mid Ax\leq b, \quad x\geq 0\}$.

Dann gilt folgende Kette von Äquivalenzen:

$$(P') \quad \max\{\langle c,x\rangle \mid Ax+u=b, \quad x\geq 0, \quad u\geq 0\}$$

$$= \max\{\langle c,x\rangle \mid \underbrace{Ax+Eu}_{(A|E)\begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}} = b, \quad x\geq 0, \quad u\geq 0\}$$

$$= \max\{\langle c,x\rangle \mid \quad (A|E)\begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} = b, \quad \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} \geq 0\}$$

$$= \max\{\left\langle \begin{pmatrix} c \\ 0_m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} \right\rangle \mid \quad (A|E)\begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} = b, \quad \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} \geq 0\}.$$

Nach Definition 2 ist die zu (P') duale Aufgabe (D'):

$$(D') \qquad \min\langle b,z\rangle \mid (A|E)^Tz \geq \begin{pmatrix} c \\ 0_m \end{pmatrix}\}.$$

Es gilt:

$$(A|E)^Tz = \begin{pmatrix} A^T \\ E^T \end{pmatrix} z$$

und daraus ergibt sich:

$$(A|E)^Tz \geq \begin{pmatrix} c \\ 0_m \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{array}{c} A^Tz \geq c \\ E^Tz \geq 0_m \end{array} .$$

Das letzte Ungleichungssystem ist:

$$\begin{array}{c} A^Tz \geq c \\ z_1 \geq 0 \\ \vdots \\ z_m \geq 0 \end{array} , \quad \text{d.h.} \quad \begin{array}{c} A^Tz \geq c \\ z \geq 0 \end{array}$$

und folglich hat (D) die Form

$$(D') \qquad \min\{\langle b,z\rangle \mid A^Tz\geq c, \quad z\geq 0\}.$$

□

Wir werden (vorerst) Definition 2 benutzen.

Lemma 1:
Wenn (P) lösbar ist, so ist auch (D) lösbar und die Extremalwerte sind gleich.

Bemerkung:
Wenn x und u zulässig sind und v der gemeinsame Extremalwert ist, so gilt:

$$\langle c,x\rangle \le v \le \langle b,u\rangle$$

$$v-\langle c,x\rangle \le \underbrace{\langle b,u\rangle-\langle c,x\rangle}_{\textbf{Güte}\text{ der Annäherung an Extremalwert}}$$

Beweis des Lemmas:

Sei (P) lösbar. Dann existiert für (P) ein Simplextableau, das die hinreichende Optimalitätsbedingung erfüllt:

		x_N
	d_{00}	d_{0N}
x_B	d_{B0}	d_{ij}

$$x=\begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}, \qquad A=(A_B|A_N), \qquad A_B\in\mathcal{M}(m,n),$$

$$Ax=(A_B|A_N)\begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}=A_Bx_B+A_Nx_N=b\in R^n.$$

A_B^{-1} existiert, da A_B regulär ist. Folglich gilt:

$A_B^{-1}A_Bx_B+A_B^{-1}A_Nx_N=A_B^{-1}b \Leftrightarrow$

$E_mx_B=\underbrace{A_B^{-1}b}_{d_{B0}}-\underbrace{(A_B^{-1}A_N)}_{d_{BN}}x_N$

und $\langle c,x\rangle=c^Tx=d_{00}-d_{0N}x_N$, wobei

$$c^T x = c_B^T x_B + c_N^T x_N =$$

$$= c_B^T A_B^{-1} b - (c_B^T A_B^{-1} A_N) x_N + c_N^T x_N =$$

$$= \underbrace{c_B^T A_B^{-1} b}_{=d_{00}} - (\underbrace{c_B^T A_B^{-1} A_N - c_N^T}_{d_{0N}}) x_N$$

Weiterhin wissen wir, daß die hinreichende Optimalitätsbedingung erfüllt ist, d.h. $d_{0N} \geq 0$ und $d_{B0} \geq 0$.

Betrachten wir jetzt die Aufgabe:

$$\min(d_{00} + d_{B0}^T y_B), \quad y_B \in R^m \text{ unter den Nebenbedingungen}$$

$$(D') \begin{cases} y_B \geq 0_m \\ d_{BN}^T y_B^+ d_{0N}^T \geq 0 \end{cases}$$

Wir kennen eine Lösung dieser Aufgabe, nämlich $y_B = 0$, denn da $d_{B0} \geq 0$ ist, wird jeder andere Wert einen größeren Zielfunktionswert erzeugen.

Es ist **noch zu zeigen:**

(D') ist äquivalent zu (D).

Wir haben:

(P) $\max\{\langle c, x\rangle \mid Ax = b, \quad x \geq 0\}$.

Nach Definition 2 muß (D) folgende Form haben: $\min\{\langle b, y\rangle \mid A^T y \geq c\}$.

Betrachten wir die Zielfunktion von (D'):

$$d_{00} + d_{B0}^T y_B =$$
$$= c_B^T A_B^{-1} b + (\underbrace{A_B^{-1} b}_{\geq 0})^T y_B =$$
$$= \big\langle c_B, A_B^{-1} b \big\rangle + b^T (A_B^{-1})^T y_B =$$
$$= \big\langle A_B^{-1} b, c_B \big\rangle + b^T (A_B^{-1})^T y_B =$$
$$= b^T (A_B^{-1})^T c_B + b^T (A_B^{-1})^T y_B =$$
$$= b^T \big((A_B^{-1})^T c_B + (A_B^{-1})^T y_B\big).$$

Betrachten wir die Nebenbedingungen:

1. $y_B \geq 0$
2. $(A_B^{-1} A_N)^T y_B + (c_B^T A_B^{-1} A_N - c_N^T)^T \geq 0$

   $||$

   $A_N^T (A_B^{-1})^T y_B + A_N^T (A_B^{-1})^T c_B - c_N$

   $||$

   $A_N^T \big((A_B^{-1})^T y_B + (A_B^{-1})^T c_B\big) - c_N.$

Wir substituieren: $u := (A_B^{-1})^T y_B + (A_B^{-1})^T c_B$
$\Rightarrow \quad u^T = c_B^T A_B^{-1} + y_B^T A_B^{-1}$
$\Rightarrow \quad u^T A_B = c_B^T + y_B^T. \qquad (*)$

Aus der Nebenbedingung 1. folgt:
$y_B \geq 0 \quad \longleftrightarrow \quad y_B^T \geq 0^T \quad \longleftrightarrow 0 \quad \leq y_B^T = u^T A_B - c_B^T \quad \longleftrightarrow$

$\longleftrightarrow u^T A_B \geq c_B^T \quad \longleftrightarrow \quad A_B^T u \geq c_B. \qquad (**)$

Weiterhin gilt nach Nebenbedingung 2:
$A_N^T u - c_N \geq 0.$
Das ist gdw. $A_N^T u \geq c_N. \qquad (***)$

Aus (**) und (***) erhalten wir:
$\begin{pmatrix} A_B^T \\ A_N^T \end{pmatrix} u \geq \begin{pmatrix} c_B \\ c_N \end{pmatrix}$, d.h. $A^T u \geq c$.
Für die Zielfunktion gilt offensichtlich: $b^T u = \langle b, u \rangle$.

□

Satz (Dualitätssatz der linearen Optimierung):
Es seien
(P): $\max\{\langle c, x\rangle \mid Ax \leq b, \quad x \geq 0\}$ und
(D): $\min\{\langle b, y\rangle \mid A^T y \geq c, \quad y \geq 0\}$,
$A \in \mathcal{M}(m,n), c \in R^n, b \in R^m, x \in R^n, y \in R^m$.

Dann gilt:

(P) ist lösbar genau dann, wenn (D) lösbar ist. Im Falle der Lösbarkeit sind die Extremalwerte gleich.

Beweis:
($\rightarrow$) Sei (P) lösbar. Nach der Äquivalenz von Definition 1 und Definition 2 für Dualität (Bemerkung 1) und Lemma 1 folgt die Behauptung.

($\leftarrow$) Sei (D) lösbar.
Idee: Wir formen (D) äquivalent zu einer Form $(P)''$ um und wenden den schon bewiesenen Teil des Satzes an.

Betrachten:
(D_1) $\max\{\underbrace{-\langle b, y\rangle}_{=\langle -b, y\rangle} \mid -A^T y \leq -c, y \geq 0\}$

Es gilt offensichtlich: $v_{D_1} = -v_D$.

Betrachten nun die duale Aufgabe zu (D_1). Diese sei (D_2). Nach Definition 1 hat (D_2) die Form:

(D_2) $\min\{\langle -c, z\rangle \mid (-A^T)^T z \geq -b, z \geq 0\}$
$= \min\{\langle -c, z\rangle \mid (-Az \geq -b, z \geq 0\}$
$= \min\{\langle -c, z\rangle \mid (Az \leq b, z \geq 0\} = v_{D_1}$

$$\begin{array}{l} -v_{D_1} = \max\{\langle c, z\rangle \mid Az \leq b, z \geq 0\} = (P) \\ \quad \| \\ \ v_D \end{array}$$

Das ist die Behauptung.

□

Bemerkung:
Der Beweis zeigt zusätzlich, daß die duale Aufgabe einer dualen Aufgabe die primale Aufgabe ist.

3.2 Die duale Simplexmethode

Idee:

Simplexmethode:

Wir gehen von einem ersten Tableau mit $d_{B0} \geq 0$ aus.

Ziel ist: Tableau mit $d_{0N} \geq 0$ zu konstruieren:

		x_N
	d_{00}	d_{0N}
x_B	d_{B0}	d_{BN}

Duale Simplexmethode:

Start mit Tableau, in dem $d_{0N} \geq 0$, aber d_{B0} im allgemeinen nicht nichtnegativ:

			NBV	
			x_k	x_q
		d_{00}	d_{0k}	d_{0q}
BV	x_i	d_{i0}	d_{ik}	d_{iq}
	x_p	d_{p0}	d_{pk}	d_{pq}

$d_{0k}, d_{0q} \geq 0$, d.h. ein dual zulässiges Tableau liegt vor. Sei $d_{p0} < 0$. Dann ist die $p-te$ Zeile die Pivotzeile. Das zentrale Element in Zeile p wird derart gewählt, daß $d_{pq} < 0$ ist.

- Dadurch wird sichergestellt, daß das neue Element an der Stelle von d_{p0} (d.h. $\tilde{d}_{q0}$) positiv wird.
- Außerdem wird dadurch gesichert, daß

  $$\tilde{d}_{00} = d_{00} - \frac{\overbrace{d_{0q}}^{>0}\,\overbrace{d_{p0}}^{<0}}{\underbrace{d_{pq}}_{<0}} < d_{00},$$

  d.h. **monoton fallendes** Verhalten der Zielfunktion von einem Tableau zum nächsten (und damit kein Zyklus).
- Wenn $d_{pk} \geq 0$ für alle $k \in N$, dann ist die Aufgabe unlösbar. D.h. die Zielfunktion der dualen Aufgabe ist über dem zulässigen Bereich unbeschränkt (nach unten) und folglich hat die Originalaufgabe keinen zulässigen Punkt.
- Anderenfalls betrachten wir alle k mit $d_{pq} < 0$. Wie ist q unter diesen k zu wählen?
  - Das neue Element $\tilde{d}_{0p}$ in der charakteristischen Zeile anstelle von d_{0q} muß nichtnegativ sein:

    $$\tilde{d}_{0p} = -\frac{\overbrace{d_0q}^{>0}}{\underbrace{d_{pq}}_{<0}} > 0$$

  - Restliche Elemente:

    $$\tilde{d}_{0k} = \underbrace{d_{0k}}_{>0} - \frac{\overbrace{d_{0q}}^{>0}\,d_{pk}}{\underbrace{d_{pq}}_{<0}} \geq 0 \qquad (*)$$

    Interessant ist der Fall, bei dem gilt:

    $$\frac{\overbrace{d_{0q}}^{>0}\,d_{pk}}{\underbrace{d_{pq}}_{<0}} > 0,$$

    sonst ist $(*)$ trivial erfüllt.
    Damit muß gelten: $d_{pk} < 0$. In diesem Fall erhält die Bedingung $(*)$ die Form:

    $$d_{0k} - \frac{d_{0q}\,|d_{pk}|}{|d_{pq}|} \geq 0$$

    $$\frac{d_{0k}}{|d_{pk}|} \geq \frac{d_{0q}}{|d_{pq}|} \qquad \forall k \in N, \quad d_{pk} < 0$$

    q ist so zu wählen unter den k mit $d_{pk} < 0$, daß

    $$\frac{d_{0q}}{|d_{pq}|} = \min_k \frac{d_{0k}}{|d_{pk}|}.$$

□

Einsatz: Vergessene Nebenbedingungen

Beispiel:
Sei folgendes Simplextableau gegeben:

			NB	
			x_2	x_4
		4	1	1
B	x_1	1	-1	1
	x_3	2	2	-2

Offensichtlich ist das Tableau optimal und der Optimale Punkt ist $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 0, 2, 0)$.

Sei $x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \geq 0$ eine vergessene Nebenbedingung (die vergessene Nebenbedingung darf keine neuen Variablen enthalten).
Was tun?

- Basisvariablen durch Nicht-Basisvariablen ausdrücken:
  $x_1 = 1 - (-x_2 + x_4)$
  $x_3 = 2 - (2x_2 - 2x_4)$.
- Einsetzen in die vergessene Nebenbedingung:
  $1 + x_2 - x_4 + x_2 - 2 + 2x_2 - 2x_4 + x_4 \geq 0$
  $\updownarrow$
  $-1 + 4x_2 - 2x_4 \geq 0$
  $\updownarrow$
  $-1 + 4x_2 - 2x_4 - u = 0 \Leftrightarrow u = -1 - (-4x_2 + 2x_4)$

			NB	
			x_2	x_4
		4	1	1
B	x_1	1	-1	1
	x_3	2	2	-2
	u	-1	-4	2

Dieses Tableau ist nicht zulässig, aber dual zulässig, also verwenden wir jetzt die duale Simplexmethode:

			NB	
			u	x_4
		15/4	1/4	3/2
B	x_1	5/4	-1/4	
	x_3	3/2	1/2	
	x_2	1/4	-1/4	-1/2

Dieses Tableau ist optimal!

Wozu Dualität?

- Es lassen sich Optimalitäts**kriterien** ableiten, d.h. Aussagen des Typs

  $x \in M_P$ ist optimal für (P) **gdw.** …

  Für unseren Fall würde dieses Optimalitätskriterium lauten:

  $x \in M_P$ ist optimal für (P) **gdw.** es ein $y \in M_D$ gibt mit $\langle c, x\rangle = \langle b, y\rangle$.

- Abschätzungen für Extremalwerte sind möglich:

  Wenn $x \in M_P$ und wir irgendein $y \in M_D$ kennen, so ist:

  $V_P - \langle c, x\rangle \le \langle b, y\rangle - \langle c, x\rangle$.

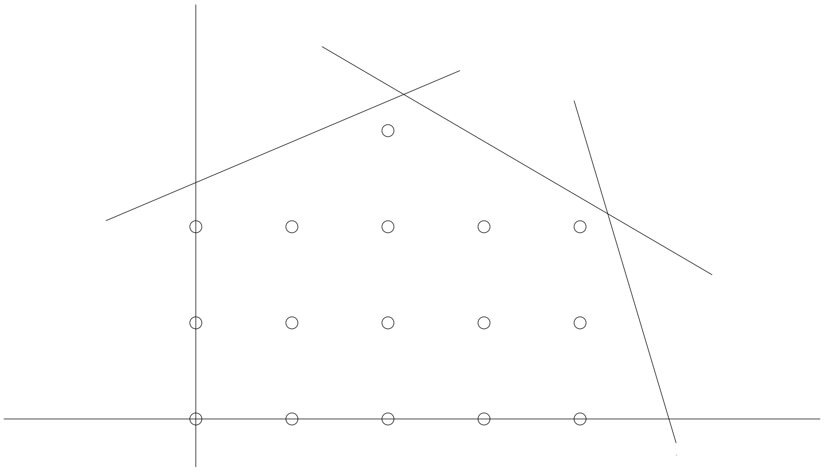
Einsatz der Dualen Simplexmethode

1. Nachoptimieren wegen vergessener Nebenbedingungen
2. Beginn der Arbeit mit weniger Nebenbedingungen
3. ganzzahlige Optimierungen: bewußtes Einführen zusätzlicher Nebenbedingen:

Idee:

Betrachten: Modell der ganzzahligen linearen Optimierung:

$\max\{\langle c, x\rangle \mid Ax \le b, x \ge 0, x_1, \ldots, x_n \in N\}$.



- Zuerst die Aufgabe ohne Ganzzahl-Bedingung lösen. Sei $\overline{x}$ die Lösung.

  Ist $\overline{x} \in N$, so ist die ganzzahlige lineare Optimierungsaufgabe gelöst.

  Ist $\overline{x} \notin N$, so gehe weiter.

- Fügen eine neue Restriktion hinzu, die von allen zulässigen ganzzahligen Punkten erfüllt wird, aber nicht von $\overline{x}$ (die neue Restriktion heißt **Schnitt**).

  Wir lösen nun die Aufgabe ohne Ganzzahligkeit, aber **mit** Schnittbedingung. Neue Lösung sei $\overline{x}'$, usw.

  (alle Schnittbedingungen werden jeweils beibehalten)

  Die Lösung der Aufgabe erfolgt zweckmäßig mittels Dualer Simplexmethode.

Es ergeben sich viele Fragen, eine davon ist, wie man den Schnitt konstruiert (**Hauptproblem!**)

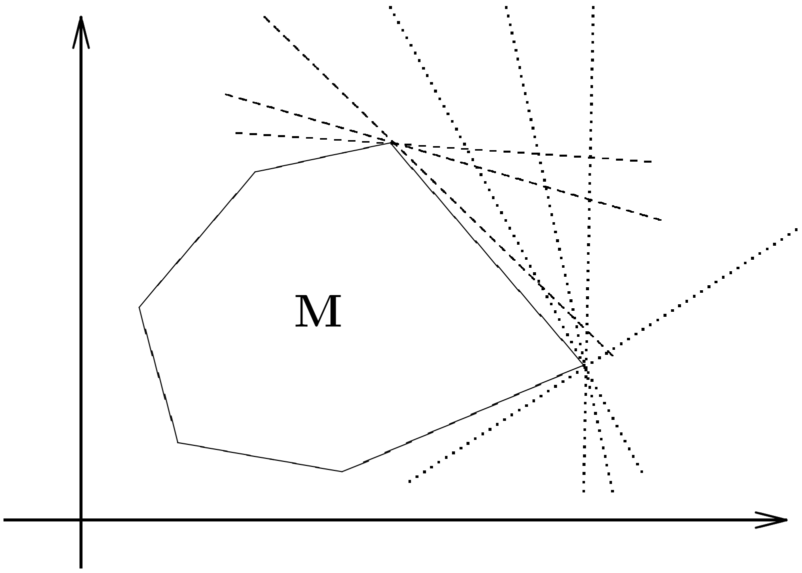
→ Es gibt *vernünftige* Schnitte (Gomory-Schnitte).

Kapitel 4

4.1 Parametrische Optimierung

Bisher haben wir mit festen Daten gearbeitet, d.h. Matrix A und die Vektoren b und c enthielten feste Daten.

Frage: Wieviel kann ich (z.B.) an den Zielfunktions-Koeffizienten ändern, ohne daß sich die Struktur meiner LOA ändert (d.h. der Wert der ZF wird sich natürlich ändern, aber die gleiche Ecke bleibt optimal).



Wir betrachten Spezialfall:

c wird ersetzt durch: $c^{(0)} + c^{(1)}t$, d.h. 1-par. LOA.

Haben:

$P(t) \quad \max\{\langle c(t), x\rangle \mid Ax = b, \quad x \geq 0\}$ mit

$c(t) = c^{(0)} + c^{(1)}t, \quad c^{(0)}, c^{(1)} \in R^n.$

Ziel:

Für jedes $t \in (-\infty, +\infty)$ eine optimale Lösung von $P(t)$ zu berechnen, sofern eine existiert, bzw. feststellen, für welche t $P(t)$ nicht lösbar ist.

Wir haben:

T(t)

		x_N
	$d_{00}^{(0)} + d_{00}^{(1)} \cdot t$	$d_{0N}^{(0)} + d_{0N}^{(1)} \cdot t$
x_B	d_{B0}	d_{BN}

Lösung

Bei der Lösung ist für jede zulässige Basislösung das Intervall von t zu finden, für das diese Lösung optimal ist (**charakteristischer Bereich**). Die Grenzen des charakteristischen Bereichs werden durch die **charakteristischen Punkte** gegeben.

$P(t)$

$$ZF: \quad d_{00}^{(0)} + d_{00}^{(1)} t - \sum_{j \in N} (d_{0j}^{(0)} + d_{0j}^{(1)} t) x_j \qquad \longrightarrow \max$$

$x_B + A x_N = b$, $x_B \geq 0$, $x_N \geq 0$.

Idee zur Lösung der 1-par. LOA:

Wir stellen fest, unter welchen Bedingungen das von uns aufgestellte Tableau $T(t)$ ein Abschlußtableau ist und wie weit sich t ändern kann, ohne daß $T(t)$ seine Optimalität verliert.

Zuerst lösen wir die LOA für $t = t_0 = 0$. (Natürlich kann man die Aufgabe für $t_0 = k$ und k beliebig starten.) Dabei führen wir alle Umrechnungen mit $d_{00}^{(0)}$, $d_{00}^{(1)}$, $d_{0j}^{(0)}$, $d_{0j}^{(1)}$ durch. Damit erhalten wir eine Abschlußtabelle $T(t)(t = 0)$, bei der alle Werte in der charakteristischen Zeile **nichtnegativ** sind, D.h.

$$(1) \qquad d_{0j}^{0,(0)} + d_{0j}^{0,(1)} \cdot t \geq 0 \qquad \forall j, j \in N$$

für $t = 0$, wobei

T(t)

		x_N
	$d_{00}^{0,(0)} + d_{00}^{0,(1)} \cdot t$	$d_{0N}^{0,(0)} + d_{0N}^{0,(1)} \cdot t$
x_B	d_{B0}	d_{BN}

Das bedeutet, daß

$$(2) \qquad d_{0j}^{0,(0)} \geq 0 \qquad \forall j, j \in N.$$

Das Ungleichungssystem (1) ist aber i.A. nicht nur für einen einzigen Wert von t (nämlich für $t = 0$) erfüllt, sondern für ein Intervall (um $t = 0$).

Wir berechnen jetzt dieses Intervall, in dem wir die Werte von t bestimmen, für die (1) erfüllt bleibt und erhalten:

$$t \leq \min\{-\frac{d_{0j}^{0,(0)}}{d_{0j}^{0,(1)}} \mid d_{0j}^{0,(1)} < 0 \wedge j \in N\} =: t_1$$

und

$$t \geq \max\{-\frac{d_{0j}^{0,(0)}}{d_{0j}^{0,(1)}} \mid d_{0j}^{0,(1)} > 0 \wedge j \in N\} =: t_0$$

Wenn wir t über t_1 hinaus wachsen lassen, dann wird mindestens für ein $j \in N$ der Koeffizient $d_{0j}^{0,(0)} + d_{0j}^{0,(1)} \cdot t$ kleiner Null. Danach können wir einen Simplexschritt ausführen und ein neues Intervall $[t_1, t_2]$ mit $t_2 \geq t_1$ finden, oder wir können kein Pivotelement bestimmen, weil alle Zahlen in der Pivotspalte negativ sind. Dann ist die ZF für $t > t_1$ offenbar unbeschränkt.

Dieses Verfahren können wir endlich oft wiederholen, weil die Anzahl der möglichen Basen endlich ist. Die Eckpunkte der Intervalle nennen wir, wie bereits gesagt, **charakteristische Punkte**.

Also, wir erhalten die charakteristischen Punkte $t_0, t_1, \cdots, t_r$. Analog berechnen wir noch die charakteristischen Punkte $t_{-s}, \cdots, t_{-1}, t_0$, wenn wir t kleiner als t_0 werden lassen. Analog ist auch s endlich.

Damit erhalten wir:

$$t_{-s}, \cdots, t_{-1}, t_0, t_1, \cdots, t_r.$$

Die Struktur der optimalen Programme (der ZF) zwischen je zwei benachbarten charakteristischen Punkte bleibt die gleiche. An den charakteristischen Punkten erhalten wir jeweils (mindestens) 2 ZF-Strukturen.

Falls wir für $t = 0$ keine optimale Tabelle finden können, dann haben wir eine „negative Spalte“ mit negativen Koeffizienten in der Tabelle berechnet.

Dann überprüfen wir, ob diejenigen Ungleichungen $d_{0j}^{(0)} + d_{0j}^{(1)} \cdot t \geq 0$

aus dem Ungleichungssystem (1) bei denen die dazugehörige $j-$te Spalte nur negative Zahlen enthält, erfüllt werden können. Gibt es kein solches t, so hat die LOA für keinen Wert von t eine Lösung. Anderenfalls können wir für ein gewisses Intervall für t eine optimale Simplextabelle ausrechnen, oder für dieses Intervall ist die LOA unlösbar etc.

Wir betrachten die 1-par. LOA:

$$P(t): \qquad \max\{\langle c(t), x\rangle \,|\, Ax \leq b \quad x \geq 0\}, \qquad c(t) = c^{(0)} + c^{(1)}t, \quad t \in (-\infty, \infty)$$

Wir haben einen Algorithmus angegeben, der die R-Achse

$-\infty$
∞

in endlich viel Intervalle einteilt; und genauer:

Satz 1:

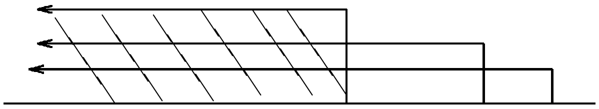
Verwendet man in dem Algorithmus zur Berechnung einer optimalen Lösung für $P(t)$ für jedes $t \in (-\infty, +\infty)$ ein Simplexverfahren mit Antizyklentechnik (z.B. lexikographische Simplexmethode), so ermittelt dieser Algorithmus in **endlich vielen** Schritten für jedes $t \in (-\infty, +\infty)$ ein zulässiges Abbruchtableau der Aufgabe.

Beobachtungen:

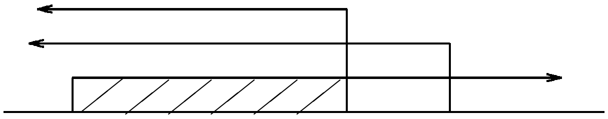
1. Die Geltungsbereiche für t, die sich aus der Lösung der Ungleichungen

$$d_{0j}^{(0)} + d_{0j}^{(1)} t \geq 0, \qquad j \in N$$

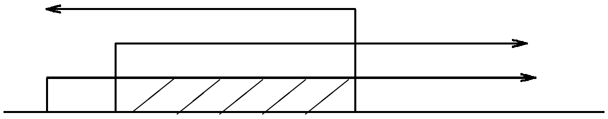
ergeben, sehen wie folgt aus: (für $card(N) = 3$)



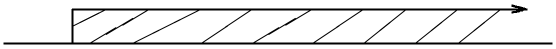
bzw.



bzw.

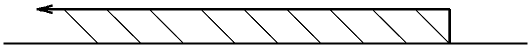


Wir wissen: Aus den Koeffizienten zu der NBV x_j ergibt sich der Geltungsbereich für t:



falls: $d_{0j}^{(0)} + d_{0j}^{(1)} t \geq 0$ und $d_{0j}^{(1)} > 0$.

und



falls: $d_{0j}^{(1)} < 0$.

2. Beobachten wir nun, was geschieht, wenn ein Simplexschritt ausgeführt wird, indem die NBV x_j gegen die BV x_k ausgetauscht wird:

(d_{0l} ist ein Koeffizient in der charakteristischen Zeile)

$$\tilde{d}_{0l}^{(0)} + \tilde{d}_{0l}^{(1)} t = d_{0l} - \tfrac{d_{kl} d_{0j}}{d_{kj}} =$$

$$= d_{0l}^{(0)} + d_{0l}^{(1)} t - \tfrac{d_{kl}(d_{0j}^{(0)} + d_{0j}^{(1)} t)}{d_{kj}} =$$

$$= \left(d_{0l}^{(0)} - \tfrac{d_{kl} d_{0j}^{(0)}}{d_{kj}} \right) + \left(d_{0l}^{(1)} - \tfrac{d_{kl} d_{0j}^{(1)}}{d_{kj}} \right) t =$$

$$= \tilde{d}_{0l}^{(0)} + \tilde{d}_{0l}^{(1)} t \text{ und}$$

$$\tilde{d}_{0l}^{(0)} = ...$$

$$\tilde{d}_{0l}^{(1)} = ...$$

Analog gilt:

$$\tilde{d}_{0k}^{(0)} + \tilde{d}_{0k}^{(1)} t = -\tfrac{d_{0j}}{d_{kj}} =$$

$$= -\tfrac{d_{0j}^{(0)} + d_{0j}^{(1)} t}{d_{kj}} = -\tfrac{d_{0j}^{(0)}}{d_{kj}} - \tfrac{d_{0j}^{(1)}}{d_{kj}} t$$

d.h. $\tilde{d}_{0k}^{(0)} = -\tfrac{d_{0j}^{(0)}}{d_{kj}}$

und $\tilde{d}_{0k}^{(1)} = ...$

Offensichtlich sind die Koeffizienten $d_{0j}^{(0)}$ und $d_{0k}^{(1)}$ jeweils nach der Kreuzregel zu berechnen.

Wir haben:

T(t)		x_N
	$d_{00}^{(0)}$	$d_{0N}^{(0)}$
	$d_{00}^{(1)}$	$d_{0N}^{(1)}$
x_B	d_{B0}	d_{BN}

Was macht man, wenn die Daten des Vektors b einparametrisch sind?

Wir berechnen die duale Aufgabe.

Beispiel:

$$3x_1 + 8x_2 \longrightarrow \max$$

$$P(t) \begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 4 + 2t \\ x_1 + 2x_2 \leq 20 + t \\ 2x_1 + x_2 \leq 28 - 3t \\ x_1 \geq 0 \ , \ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

für $t \in [-2, \frac{28}{3}]$ zu lösen !

Lösung:

Zuerst berechnen wir die zu $P(t)$ duale Aufgabe $D(t)$:

$$(4 + 2t)y_1 + (20 + t)y_2 + (28 - 3t)y_3 \longrightarrow \min$$

$$D(t) \begin{cases} -y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 3 \\ y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 8 \\ y_1 \geq 0 \ , \ y_2 \geq 0 \ , \ y_3 \geq 0 \end{cases}$$

Wir werden die Aufgabe $D'(t)$ lösen mit $ZF(D') = -ZF(D)$ und $M_D = M_{D'}$:

$D'(t) \qquad -(4 + 2t)y_1 - (20 + t)y_2 - (28 - 3t)y_3 \longrightarrow \max$
mit den gleichen Nebenbedingungen, wie in $D(t)$.

$\Rightarrow$ zu lösen ist also:

$$-(4 + 2t)y_1 - (20 + t)y_2 - (28 - 3t)y_3 \longrightarrow \max$$

$$\begin{cases} -y_1 + y_2 + 2y_3 - u_1 = 3 \\ y_1 + 2y_2 + y_3 - u_2 = 8 \\ y_i \geq 0 \ , \ u_j \geq 0 \end{cases}$$

Um einen ersten zulässigen Basispunkt zu finden, lösen wir zuerst die Hilfsaufgabe (H):

$$-(z_1 + z_2) \longrightarrow \max$$

$$(H) \begin{cases} -y_1 + y_2 + 2y_3 - u_1 + z_1 = 3 \\ y_1 + 2y_2 + y_3 - u_2 + z_2 = 8 \\ y_i \geq 0 \ , \ u_j \geq 0 \ , \ z_k \geq 0 \end{cases} .$$

$\hookrightarrow -(z_1 + z_2) = -11 + 3y_2 + 3y_3 - u_1 - u_2 = -11 - (-3y_2 - 3y_3 + u_1 + u_2)$

			y_1	$y_2 \downarrow$	y_3	u_1	u_2
		-11	0	-3	-3	1	1
←	z_1	3	-1	**1**	2	-1	0
	z_2	8	1	2	1	0	-1

			$y_1 \downarrow$	z_1	y_3	u_1	u_2
		-2	-3	3	3	-2	1
	y_2	3	-1	1	2	-1	0
←	z_2	2	**3**	-2	-3	2	-1

		z_2	z_1	y_3	u_1	u_2
	0					
y_2	11/3			1	$-1/3$	$-1/3$
y_1	2/3			-1	2/3	$-1/3$

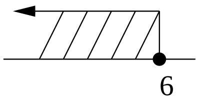
Die restlichen Elemente der Tabelle brauchen wir nicht, um die Starttabelle für die $D'(t)$-Aufgabe aufzustellen:
BV: y_1 , y_2
NBV: y_3 , u_1 , u_2
und
$y_2 = 11/3 - (y_3 - 1/3u_1 - 1/3u_2)$
$y_1 = 2/3 - (-y_3 + 2/3u_1 - 1/3u_2)$.

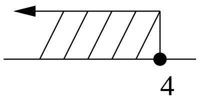
Wir müssen nur noch die Zielfunktion $ZF(D')$ als Funktion der NBV darstellen, um die charakteristische Zeile angeben zu können:

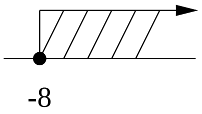
$$\begin{aligned}
ZF(D') &= -(4+2t)y_1 - (20+t)y_2 - (28-3t)y_3\\
&= -(4y_1 + 20y_2 + 28y_3) - (2y_1 + y_2 - 3y_3)t\\
&= -[4(\frac{2}{3} + y_3 - \frac{2}{3}u_1 + \frac{1}{3}u_2) + 20(\frac{11}{3} - y_3 + \frac{1}{3}u_1 + \frac{1}{3}u_2) + 28y_3]\\
&\quad -[2(\frac{2}{3} + y_3 - \frac{2}{3}u_1 + \frac{1}{3}u_2) + (\frac{11}{3} - y_3 + \frac{1}{3}u_1 + \frac{1}{3}u_2) - 3y_3]t\\
&= -[\frac{8}{3} + 4y_3 - \frac{8}{3}u_1 + \frac{2}{3}u_2 + \frac{220}{3} - y_3 + \frac{20}{3}u_1 + \frac{20}{3}u_2 - 28y_3]\\
&\quad -[\frac{4}{3} + 2y_3 - \frac{4}{3}u_1 + \frac{2}{3}u_2 + \frac{11}{3} - y_3 + \frac{1}{3}u_1 + \frac{1}{3}u_2 - 3y_3]t\\
&= -[76 + 12y_3 + 4u_1 + 8u_2] - [5 - 2y_3 - u_1 + u_2]t\\
&= -76 - (12y_3 + 4u_1 + 8u_2) - 5 - (-2y_3 - u_1 + u_2)t
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich die **Starttabelle**:

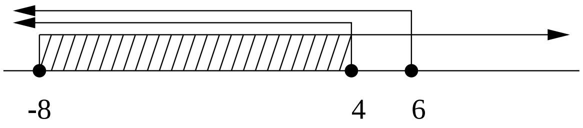
			y_3	$u_1 \downarrow$	u_2
		-76	12	4	8
	t	-5	-2	-1	1
$\leftarrow$	y_1	2/3	-1	**2/3**	$-1/3$
	y_2	11/3	1	$-1/3$	$-1/3$







dh. wir haben:

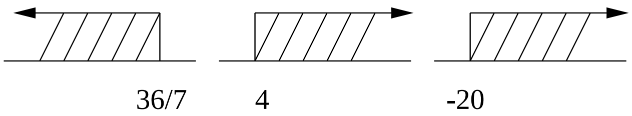


Diese Tabelle ist eine abschließende für $t \in [-8, 4]$. Dann hat $D'(t)$ die Zielfunktion $ZF_{D'(t)} = -76 - 5t$ und $BP = \begin{pmatrix} \overline{y_1} \\ \overline{y_2} \\ \overline{y_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 11/3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

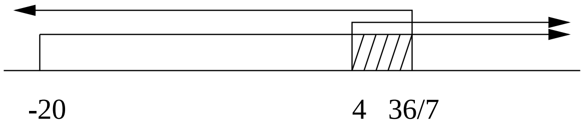
Die Zielfunktion $ZF_{P(t)}$ ist $(76+5t)$ und $BP = \begin{pmatrix} \overline{u_1} \\ \overline{u_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-t \\ 8+t \end{pmatrix}$.

Wenn t **über 4 wächst**, dann muß u_1 BV werden und y_1 NBV.

			$y_3 \downarrow$	y_1	u_2
		-80	18	-6	10
		-4	$-7/2$	$3/2$	$1/2$
	u_1	1	$-3/2$	$3/2$	$-1/2$
←	y_2	4	**$1/2$**	$1/2$	$-1/2$



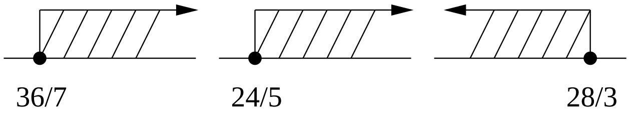
dh. wir haben:



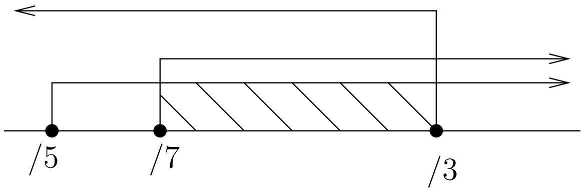
Wir erhalten: $t \in [4, \frac{36}{7}]$, $ZF_{P(t)} = 80 + 4t$, $BP = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 + \frac{1}{2}t \end{pmatrix}$.

Wenn t **über $\frac{36}{7}$ wächst**, so muß y_3 BV und y_2 NBV werden.

		y_2	y_1	u_2
	-224	-36	-24	28
	24	7	5	-3
u_1				-2
y_3	8	2	1	-1



dh. wir haben:

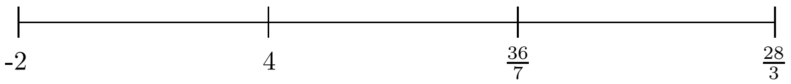


Also: $t \in [\frac{36}{7}, \frac{28}{3}]$, $ZF_{P(t)} = 224 - 24t$, $BP = \begin{pmatrix} 0 \\ 28 - 3t \end{pmatrix}$.

Wir rechnen nicht mehr weiter, da das Verhalten der Zielfunktion für $t \in [-2, \frac{28}{3}]$ gesucht ist (Aufgabenstellung!).

Wir haben erhalten:

$P(t)$: $t \in$


-2
4
$\frac{36}{7}$
$\frac{28}{3}$

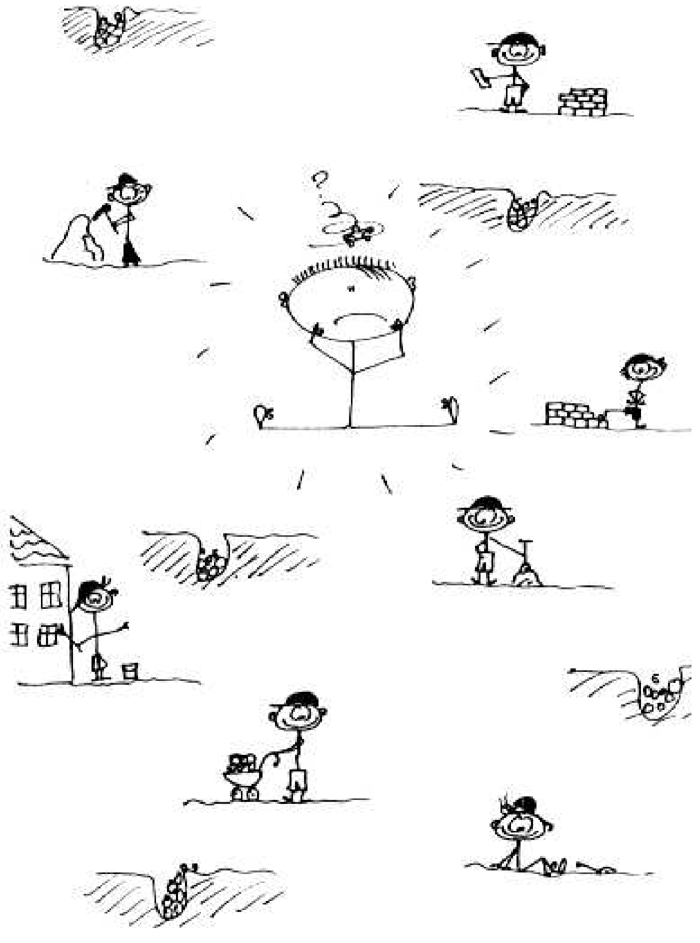
ZF:	$76 + 5t$	$80 + 4t$	$224 - 24t$
BP:	$\begin{pmatrix} 4 - t \\ 8 + t \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 10 + \frac{t}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 28 - 3t \end{pmatrix}$

Kapitel 5

5.1 Die Transportaufgabe

Gegeben seien n Produzenten P_i (Erzeuger) und m Abnehmer (Verbraucher) A_j.

Ein beliebig teilbares Gut ist vom Produzenten P_i zum Abnehmer A_j so zu transportieren, daß die dabei entstehenden Transportkosten minimal sind.



Das ist im allgemeinen der Inhalt der Transportaufgabe. Je nachdem, welche zusätzlichen Bedingungen erfüllt werden sollen, entstehen verschiedene Arten der Transportaufgabe.

Zuerst betrachten wir die allgemeine TA mit Ausschöpfung des produzierten Gutes und Abdeckung des Bedarfes, also mit erfüllter Bilanzgleichung.

a_i — die Menge des bei P_i produzierten Gutes

b_j — der Bedarf des Gutes bei A_j

c_{ij} — Preis für den Transport einer Einheit des Gutes von P_i zu A_j.

Ziel: Minimale Transportkosten, wobei $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = \sum\limits_{j=1}^{m} b_j$.

Die Matrix

$$\begin{array}{c|cccc|}
 & A_1 & A_2 & \dots & A_m \\
\hline
P_1 & c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1m} \\
\vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\
P_n & c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nm} \\
\hline
\end{array}$$

heißt Kostenmatrix.

Modell:

Mit x_{ij} bezeichnen wir die Menge des Gutes, die von P_i nach A_j transportiert wird. Dann modelliert folgende LOA die vorgestellte Transportaufgabe:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij} \longrightarrow \min$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = a_i \quad \forall i \ (i = 1 \dots n)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j \quad \forall j \ (j = 1 \dots m)$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j \text{ — Bilanzgleichung}$$

$$x_{ij} \geq 0,\ a_i \geq 0,\ b_j \geq 0.$$

Nun sehen wir uns das Problem genauer an:

Offensichtlich hat die Transportaufgabe die Form:

$$(TP) \qquad \min\{\langle c, x\rangle \mid Ax = b, \quad x \geq 0\}.$$

Es gilt:

$$x = (x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1m}, x_{21}, \dots, x_{2m}, \dots, x_{n1}, \dots, x_{nm}) \in R^{nm}.$$

Das Gleichungssystem wird durch folgende Matrix A und Vektor b beschrieben:

$$A=\left(\begin{array}{cccc}
\multicolumn{4}{c}{\overbrace{\hspace{10cm}}^{n\times}}\\
\overbrace{\begin{matrix}1&1&\dots&1\\0&0&\dots&0\\\vdots&&&\\0&0&\dots&0\end{matrix}}^{m\times} & \overbrace{\begin{matrix}0&\dots&0\\1&\dots&1\\\vdots&&\\0&\dots&0\end{matrix}}^{m\times} & \begin{matrix}\dots\\\dots\\\vdots\\\dots\end{matrix} & \overbrace{\begin{matrix}0&\dots&0\\0&\dots&0\\\vdots&&\\1&\dots&1\end{matrix}}^{m\times}\left.\vphantom{\begin{matrix}0\\0\\\vdots\\1\end{matrix}}\right\}n\times\\
\hline
\begin{matrix}1&0&\dots&0\\\vdots&&\ddots&\vdots\\0&0&\dots&1\end{matrix} & \begin{matrix}1&\dots&0\\\vdots&\ddots&\vdots\\0&\dots&1\end{matrix} & \begin{matrix}\dots\\\vdots\\\dots\end{matrix} & \begin{matrix}1&\dots&0\\\vdots&\ddots&\vdots\\0&\dots&1\end{matrix}\left.\vphantom{\begin{matrix}1\\\vdots\\0\end{matrix}}\right\}m\times
\end{array}\right)$$

$$b=\begin{pmatrix}a_1\\\vdots\\a_n\\b_1\\\vdots\\b_m\end{pmatrix}\in R^{n+m}.\qquad \text{Dabei ist } c=\begin{pmatrix}c_{11}\\\vdots\\c_{nm}\end{pmatrix}\in R^{nm}.$$

Es gilt offensichtlich: $rg(A)\leq\min\{n+m,nm\}=n+m$ für $\forall m\geq 2$, $\forall n\geq 2$.

Behauptung 1: $rgA=m+n-1$.

Beweis:

Betrachten wir die Matrix A:

$$A=\left(\begin{array}{ccccccccccc}
1&1&\dots&1&0&\dots&0&\dots&0&\dots&0\\
0&0&\dots&0&1&\dots&1&\dots&0&\dots&0\\
\vdots&&&&\vdots&&\vdots&&\vdots&&\vdots\\
0&0&\dots&0&0&\dots&0&\dots&1&\dots&1\\
\hline
1&0&\dots&0&1&\dots&0&\dots&1&\dots&0\\
\vdots&&\ddots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&&\vdots&\ddots&\vdots\\
0&0&\dots&1&0&\dots&1&\dots&0&\dots&1
\end{array}\right)$$

Wir addieren die letzten m Zeilen und ziehen sie von der ersten ab.

$$A=\left(\begin{array}{ccccccccccc}
0&0&\dots&0&-1&\dots&-1&\dots&-1&\dots&-1\\
0&0&\dots&0&1&\dots&1&\dots&0&\dots&0\\
\vdots&&&&\vdots&&\vdots&&\vdots&&\vdots\\
0&0&\dots&0&0&\dots&0&\dots&1&\dots&1\\
\hline
1&0&\dots&0&1&\dots&0&\dots&1&\dots&0\\
\vdots&&\ddots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&&\vdots&\ddots&\vdots\\
0&0&\dots&1&0&\dots&1&\dots&0&\dots&1
\end{array}\right)$$

Jetzt addieren wir die Zeilen 2 bis n zu der ersten hinzu:

$$A = \left(\begin{array}{ccccccccccc}
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & & & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 1 \\
\hline
1 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\
\vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 1
\end{array}\right)$$

Nun werden die ersten m Spalten von den jeweils nächsten m Spalten abgezogen etc.:

$$A = \left(\begin{array}{ccccccccccc}
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & & & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 1 \\
\hline
1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0
\end{array}\right)$$

Anzahl der unabhängigen Zeilen ist jetzt offensichtlich $m + (n - 1)$.

□

Behauptung 2: $M_{(TP)} \neq \emptyset$.

Beweis:

Wir konstruieren $\overline{x} \in M_{(TP)}$ nach der sogenannten NW-Eckenregel:

A_j P_i	b_1	$\dots$	$\dots$	$\dots$	b_m
a_1					
$\vdots$			c_{ij}		
a_n					

Definition (NW-Ecken-Regel):

(A)

$x_{11} := \min\{a_1, b_1\}$. Dabei wird

(a) a_1 ausgeschöpft, falls $\min\{a_1, b_1\} = a_1$. Dann ist von b_1 bereits ein Teil (genau a_1-Teil) ausgeliefert worden. Noch zu deckender Bedarf von A_1 ist dann $b_1 - a_1 =: c_1$.

oder

(b) b_1 wird gesättigt, falls $\min\{a_1, b_1\} = b_1$. Dann hat P_1 nach $a_1 - b1 =:$ d_1 vorhandene Ware.

(I)

Sei x_{ij} schon definiert und dabei ist

(a) a_i ausgeschöpft und von b_j bereits ein Teil geliefert, so daß noch c_j zu liefern ist.
$\Rightarrow$ (IS) $x_{i+1,j} := \min\{a_{i+1}, c_j\}$. Offensichtlich gilt dabei:
  - (a1) a_{i+1} wird ausgeschöpft, falls $\min\{a_{i+1}, c_j\} = a_{i+1}$. Dann braucht A_j noch $c_j - a_{i+1}$ Ware, um seinen Bedarf zu decken (d.h. $c_j := c_j - a_{i+1}$).
  - (a2) b_j wird gesättigt, falls $\min\{a_{i+1}, c_j\} = c_j$. Bei P_{i+1} ist dann noch $a_{i+1} - c_j$ an Ware übrig (d.h. $d_{i+1} := a_{i+1} - c_j$).

(b) b_j ist gesättigt und von a_i noch d_i übrig geblieben (d.h. $a_i - d_i$ der Ware des Produzenten P_i ist ausgeliefert).
$\Rightarrow$ (IS) $x_{i,j+1} := \min\{b_{j+1}, d_i\}$. Offensichtlich wird dabei entweder
  - (b1) a_i ausgeschöpft, falls $\min\{b_{j+1}, d_i\} = d_i$.
    oder
  - (b2) b_{j+1} gesättigt, falls $\min\{b_{j+1}, d_i\} = b_{j+1}$.

Rest: $x_{ij} := 0$.

□

Und die formelle Beschreibung der **NW-Ecken-Regel**:

```
for $i := 1$ to $n$ do
    for $j := 1$ to $m$ do
        $x_{ij} := 0$;
    end
end

$x_{11} := \min\{a_1, b_1\}$;
$c_1 := \max\{0, b_1 - a_1\}$;
$d_1 := \max\{0, a_1 - b_1\}$;
$i := 1$;
$j := 1$;

do  if $c_j > 0$ then $x_{i+1,j} := \min\{a_{i+1}, c_j\}$;
                      $c_j := \max\{0, c_j - a_{i+1}\}$;
                      $d_{i+1} := \max\{0, a_{i+1} - c_j\}$;
                      $i := i + 1$;
                  end

    if $d_i > 0$ then $x_{i,j+1} := \min\{d_i, b_{j+1}\}$;
                      $c_{j+1} := \max\{0, b_{j+1} - d_i\}$;
                      $d_i := \max\{0, d_i - b_{j+1}\}$;
                      $j := j + 1$;
                  end

    if $c_j = 0$ & $d_i = 0$ then $x_{i+1,j+1} := \min\{a_{i+1}, b_{j+1}\}$;
                                  $c_{j+1} := \max\{0, b_{j+1} - a_{i+1}\}$;
                                  $d_{i+1} := \max\{0, a_{i+1} - b_{j+1}\}$;
                                  $x_{i+1,j} (= 0)$ oder $x_{i,j+1} (= 0)$ wird KE ;
                                  $i := i + 1; j := j + 1$;
                              end

until $i := n$ & $j := m$ .
```

□

Offensichtlich gilt:

- In jedem Schritt wird ein b_j gesättigt oder/und ein a_i ausgeschöpft.
- Zum Schluß werden b_m und a_n gleichzeitig gesättigt und ausgeschöpft (wegen der Bilanzgleichung).

Folglich ist die Anzahl der Kästchenelemente ($\overline{x}_{ij} \neq 0$) $m + n - 1$.

$\longrightarrow$ (TA) besitzt eine optimale Lösung.

$\square$

Beispiel 1:

Seien die Daten des Transportproblems in der Kostenmatrix zusammengefaßt. Wir konstruieren ein $\overline{x} \in M_{(TP)}$ (dh. $\overline{x}$ ist ein erster zulässiger Transportplan für die Aufgabe) nach der NW-Ecken-Regel:

A P	4	5	2	1
7	$\boxed{3}_4$	$\boxed{4}_3$	7	2
3	1	$\boxed{2}_2$	$\boxed{4}_1$	5
2	4	8	$\boxed{9}_1$	$\boxed{6}_1$

Es ist: $m = 4,\ n = 3$. Wir haben insgesamt $6 = m + n - 1$ Kästchen markiert. Die Werte von $\overline{x}$ sind: $\overline{x}_{11} = 4,\ \overline{x}_{12} = 3,\ \overline{x}_{22} = 2,\ \overline{x}_{23} = 1,\ \overline{x}_{33} = 1,\ \overline{x}_{34} = 1$, restliche $\overline{x}_{ij} = 0$. $\square$

5.2 Optimalitätskriterium

Wie kommt man zu einem besseren Transportplan?

Lemma 1:

Die Lösungen einer TA verändern sich nicht, wenn zu einer Zeile (oder Spalte) der Kostenmatrix eine feste Zahl addiert wird.

Beweis:

Gegeben: Punkt $\overline{x}$ sei ein optimaler Punkt für die Transportaufgabe

$$(TA) \qquad \min\{\sum_{i,j} c_{ij}x_{ij} \mid Ax = b, \quad x \geq 0_{mn}\}.$$

Sei

$$(TA^*) \qquad \min\{\sum_{i,j}(c_{ij} + (\alpha_i + \beta_j))x_{ij} \mid Ax = b, \quad x \geq 0_{mn}\}.$$

Behauptung: $\overline{x}$ ist auch ein optimaler Punkt von (TA^*).

o.B.d.A. sei $\alpha_i = \begin{cases} k \neq 0, & i = 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

und $\beta_j = 0$ für $j = 1 \dots m$.

Dann ist $c^*_{1j} = c_{1j} + k \qquad \forall j (1 \leq j \leq m)$

und $c^*_{ij} = c_{ij} \qquad \forall i (i \geq 2) \forall j (1 \leq j \leq m)$.

Für die ZF von (TA^*) gilt dann:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c^*_{ij}x_{ij} = \underbrace{c^*_{11}}_{=c_{11}+k} x_{11} + \dots + \underbrace{c^*_{1m}}_{=c_{1m}+k} x_{1m} + \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{m} \underbrace{c^*_{ij}}_{=c_{ij}} x_{ij}$$

$$= k\underbrace{(x_{11} + \dots + x_{1m})}_{=a_1} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij}$$

Analog würde gelten:

$$\sum_{i,j} c^*_{ij}\overline{x}_{ij} = ka_1 + \sum_{i,j} c_{ij}\overline{x}_{ij}.$$

Da $\overline{x}$ ein Optimalpunkt für (TA) ist, gilt:

$$\sum_{i,j} c_{ij}\overline{x}_{ij} \leq \sum_{i,j} c_{ij}x_{ij} \qquad \forall x_{ij} \in M_{(TA)} = M_{(TA^*)} =: M$$

und damit

$$\underbrace{\sum_{i,j} c_{ij}\overline{x}_{ij} + ka_1}_{=\sum c^*_{ij}\overline{x}_{ij}} \leq \underbrace{\sum_{i,j} c_{ij}x_{ij} + ka_1}_{=\sum c^*_{ij}x_{ij}} \qquad \forall x_{ij} \in M.$$

□

Wann ist ein Transportplan optimal?

Betrachten die Dualaufgabe zu (TA):

$$(DTA) \qquad \max\{\sum_i a_iu_i + \sum_j b_jv_j \mid u_i + v_j \leq c_{ij}\}.$$

Aus dem Dualitätssatz folgt, daß die Dualaufgabe lösbar ist und die Extremalpunkte gleich sind.

Satz 1: (Charakterisierungssatz der LO)

$(P1)\min\{\langle c,x\rangle \mid Ax=b, \quad x\geq 0_n\}$. Dabei sei die Matrix A vom Typ (m,n).

Der Punkt $\overline{x}\in R^n$, $\overline{x}\geq 0_n$ mit $A\overline{x}=b$ ist optimal für (P1) gdw. ein Punkt $\overline{y}\in R^m$ existiert mit

(1) $A^T\overline{y}\leq c$ und

(2) $\overline{x}^T(A^T\overline{y}-c)=0$.

Beweis:

$(\longrightarrow)$

Sei $\overline{x}$ ein optimaler Punkt für (P1). Betrachten die zu (P1) duale Aufgabe

(D1) $\max\{\langle b,y\rangle \mid A^Ty\leq c\}$.

Da (P1) eine Lösung hat (und zwar $\overline{x}$), so besitzt (D1) auch eine, sei diese der Punkt $\overline{y}$.

Dann gilt:

$A^T\overline{y}\leq c$ und damit genügt $\overline{y}$ der Bedingung (1). Nach dem Dualitätssatz gilt weiterhin:

$c^T\overline{x}=b^T\overline{y}. \qquad (*)$

Aus $\overline{x}$ - optimaler Punkt von (P1) folgt

$A\overline{x}=b$

$\Leftrightarrow \quad A\overline{x}-b=0 \mid$ Multiplizieren von links mit $\overline{y}^T$

$\Leftrightarrow \quad \overline{y}^T(A\overline{x}-b)=0$

$$\Leftrightarrow \quad \overline{y}^TA\overline{x}-\underbrace{\overline{y}^Tb}_{\substack{=b^T\overline{y}\\ =c^T\overline{x}}}=0$$

$\Leftrightarrow \quad \overline{y}^TA\overline{x}-c^T\overline{x}=0$

$\Leftrightarrow \quad (\overline{y}^TA-c^T)\overline{x}=0$

$\Leftrightarrow \quad \overline{x}^T(A^T\overline{y}-c)=0.$

$(\longleftarrow)$

Sei $\overline{y}\in R^m$ ein Punkt, der (1) und (2) erfüllt. Sei weiterhin $\overline{x}\in R^n$, $\overline{x}\geq 0_n$ mit $A\overline{x}=b$. Es ist **zu zeigen**, daß $\overline{x}$ ein optimaler Punkt für (P1) ist.

$\overline{y}$ ist ein zulässiger Punkt für (D1) und $\overline{x}$ ist ein zulässiger Punkt für (P1). Folglich gilt:

$b^T\overline{y}\leq c^T\overline{x}$ und falls

$b^T\overline{y}=c^T\overline{x}$ gilt, so sind $\overline{x}$ bzw. $\overline{y}$ optimal für (P1) bzw. (D1).

Betrachten $\overline{x}^T(A^T\overline{y}-c)=0$.

$\Leftrightarrow \quad \overline{x}^TA^T\overline{y}-\overline{x}^Tc=0$

$$\Leftrightarrow \quad (\underbrace{A\overline{x}}_{=b})^T\overline{y}-\overline{x}^Tc=0$$

$\Leftrightarrow \quad b^T\overline{y}-\overline{x}^Tc=0$

$\Leftrightarrow \quad b^T\overline{y}=\overline{x}^Tc$

und folglich ist $\overline{x}$ ein optimaler Punkt für (P1).

□

Frage: Wie verbessert man einen Transportplan (einen ersten Plan kann man durch die NW-Regel erhalten) bzw. warum ist ein Plan optimal?

Antwort: Wir wenden den Satzes 5.1. für die Transportaufgabe an:
Da die (TA) eine optimale Lösung besitzt, besitzt auch die duale (DTA) eine optimale Lösung, sei diese $\begin{pmatrix} u_i \\ v_j \end{pmatrix}$.

Dann gilt nach dem Satz 5.1.: $\overline{x}^T(A^T \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \end{pmatrix} - c) = 0.$

Das bedeutet komponentenweise: $\overline{x}_{ij}(u_i + v_j - c_{ij}) = 0 \quad \forall i \; \forall j.$

1. Fall: $\overline{x}_{ij} \neq 0$ (d.h. $\overline{x}_{ij}$ ist BV in der (TA))
$\rightarrow u_i + v_j - c_{ij} = 0 \Leftrightarrow u_i + v_j = c_{ij}.$

2. Fall: $\overline{x}_{ij} = 0$
$\rightarrow u_i + v_j \leq c_{ij}.$

Damit haben wir

Kriterium

$\overline{x}_{ij} \neq 0 \longrightarrow u_i + v_j = c_{ij}$
$\overline{x}_{ij} = 0 \longrightarrow u_i + v_i \leq c_{ij}$
gdw
$\overline{x}$ - optimal

Wir haben $m + n$ Variablen u_i, v_j und wir haben $m + n - 1$ Gleichungen
$\rightsquigarrow$ setzen (z.B.) $u_1 := 0$ und bestimmen die restlichen u_i, v_j, so daß $u_i + v_j = c_{ij}$.

Beispiel 1:

A P	4	5	2	1	u_i
7	$\boxed{3}_4$	$\boxed{4}_3$	7	2	0
3	1	$\boxed{2}_2$	$\boxed{4}_1$	5	-2
2	4	8	$\boxed{9}_1$	$\boxed{6}_1$	3
v_j	3	4	6	3	

$$\xrightarrow[\Delta_{ij}]{}$$

	0	0	1	-1	
	0	0	0	4	
	-2	1	0	0	

wobei $\Delta_{ij} := c_{ij} - u_i - v_j$

Offensichtlich ist dieser Plan ($\overline{x}_{11} = 4$, $\overline{x}_{12} = 3$, $\overline{x}_{22} = 2$, $\overline{x}_{23} = 1$, $\overline{x}_{33} = 1$, $\overline{x}_{34} = 1$, Rest $= 0$) $\underline{\text{nicht optimal}}$ (z.B. $\Delta_{31} < 0$) !

Merke: Wir können anstatt mit der ursprünglichen Kostenmatrix mit der (Δ_{ij})-Matrix weiterarbeiten (Lemma 1)!

Frage: Wenn der aktuelle Transportplan nicht optimal ist, wie kann man ihn verbessern?

Antwort: Wir suchen jetzt einen zulässigen Transportplan, der mindestens an einer Stelle die ”negativen” Kosten verbessert:

$\xrightarrow[\text{”Zyklus” bilden}]{\qquad\qquad\qquad}$ neuer TP $\longrightarrow$ weiter!

Frage:

1. Gibt es immer einen ”Zyklus”?
2. Ist der neue TP besser?

$\boxed{\textbf{Dazu:}}$ Sei die Optimalitätsbedingung in $\Delta_{i_0 j_0}$ verletzt.

Definition 1: Zwei Elemente einer Matrix heißen *benachbart*, wenn sie in der gleichen Zeile oder gleichen Spalte stehen (d.h. a_{ij} und a_{kl} sind benachbart, wenn $i = k$ oder $j = l$).

Definition 2: Ein *Weg* (in einer Matrix) ist eine Folge jeweils benachbarter Elemente.

Definition 3: Ein *Zyklus* (Kreis) ist ein Weg, dessen Anfangs- und Endpunkt dieselben sind.

Definition 4: Eine Teilmenge T der Elemente einer Matrix heißt *zusammenhängend*, wenn es zu je 2 Elementen von T einen Weg in T gibt, der diese verbindet.

Bemerkung 1: Ein Transportplan, der nach der NW-Eckenregel entsteht, hat die Eigenschaft, daß die Kästchenelemente eine zusammenhängende Menge bilden.

Beweis: Offensichtlich nach Definition 4 □

Bemerkung 2: Wenn die Menge der Kästchenelemente zusammenhängend ist und wenn in jeder Zeile (Spalte) mindestens ein Kästchenelement enthalten ist, dann gibt es einen Zyklus, der aus $\Delta_{i_0 j_0}$ und Kästchenelementen besteht.

Beweis: Betrachten die Kostenmatrix und $c_{i_0 j_0}$. Es ex. ein KE $c_{i_0 j_1}$ in derselben Zeile (i_0). Betrachten $c_{i_0 j_0}$. Es ex. ein KE $c_{i_k j_0}$ in derselben Spalte (j_0). Da die Menge der KE zusammenhängend ist, ex. ein Weg, der $c_{i_0 j_1}$ und $c_{i_k j_0}$ verbindet und nur aus KE besteht. Folglich ex. ein Zyklus, der aus $c_{i_0 j_0}$ und KE besteht.

□

5.3 Algorithmus zur Definition eines neuen Transportplans

Sei die Optimalitätsbedingung in (Δ_{ij})-Matrix für $\Delta_{i_0 j_0}$ verletzt ($\Delta_{i_0 j_0} < 0$).

Wir bilden den Zyklus $c_{i_0 j_0}$, $c_{i_0 j_1}$, $c_{i_1 j_1}$, ... ,$c_{i_k j_k}$, $c_{i_k j_0}$.

Offensichtlich ist die Anzahl der Elemente des Zyklus gerade.

Es gilt:

1. $\Delta_{i_0 j_0} = c_{i_0 j_0} - u_{i_0} - v_{j_0}$ und
2. $0 = c_{i_s j_t} - u_{i_s} - v_{j_t}$, $\forall c_{i_s j_t}$–KE

und es gilt:

$$c_{i_0 j_0} - c_{i_0 j_1} + c_{i_1 j_1} - c_{i_1 j_2} + \cdots + c_{i_k j_k} - c_{i_k j_0} =$$

$$=_{(2)} c_{i_0 j_0} - u_{i_0} - \underline{v_{j_1}} + \underline{\underline{u_{i_1}}} + \underline{v_{j_1}} - \underline{\underline{u_{i_1}}} - \cdots + \underline{u_{i_k}} + \underline{\underline{v_{j_k}}} - \underline{u_{i_k}} - v_{j_0} =$$

$$= c_{i_0 j_0} - u_{i_0} - v_{j_0} \underset{(1)}{=} \Delta_{i_0 j_0}.$$

Wir nennen *"Minus"*-Elemente des Zyklus alle $c_{i_s j_t}$, für die gilt: $s + 1 = t$ und die Übrigen ($s = t$) *"Plus"*-Elemente.

Sei $k := min\{x_{i_s j_{s+1}} \mid c_{i_s j_{s+1}} \in \text{Zyklus}\} = x_{i_{s_0} j_{s_0+1}}$, d.h.

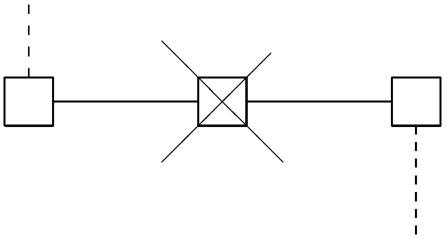
k ist das Minimum aller BV, für die das entsprechende Element in der Kostenmatrix ein "Minus"-Element in dem Zyklus ist.

Wir definieren einen neuen Transportplan x^*_{ij}, wie folgt:

$$x^*_{ij} := \begin{cases} x_{ij} & , \quad c_{ij} \notin \text{Zyklus} \\ x_{ij} - k & , \quad c_{ij} \in \text{Zyklus und } c_{ij} \text{ -"Minus-Element"} \\ x_{ij} + k & , \quad c_{ij} \in \text{Zyklus und } c_{ij}\text{-"Plus"-Element} \end{cases}$$

Dabei wird $x^*_{i_{s_0}j_{s_0+1}} = 0$ sein. Das entsprechende Element $c_{i_{s_0}j_{s_0+1}}$ wird kein KE mehr sein. Dafür wird $x^*_{i_0j_0} = k > 0$ und $c_{i_0j_0}$ ein KE.

Merke: Wir betrachten immer "minimale" Zyklen, d.h.



ist nicht erlaubt.

Bemerkung 3: Bei dem neuen Transportplan x^* verbessert sich der Wert der Zielfunktion.

Beweis : Es gilt:

$$z = \sum_{i,j} x_{ij}c_{ij} = \sum_{\substack{i,j \\ c_{ij}\text{-KE}}} x_{ij}c_{ij} = \sum_{\substack{c_{ij}\text{-KE} \\ c_{ij}\notin\text{Zykl}}} x_{ij}c_{ij} + \sum_{\substack{c_{ij}\text{-KE} \\ c_{ij}\in\text{Zykl}}} x_{ij}c_{ij}$$

$$z^* = \sum_{i,j} x^*_{ij}c_{ij} = \sum_{\substack{c_{ij}\text{-KE} \\ c_{ij}\notin\text{Zykl}}} \overbrace{x^*_{ij}}^{=x_{ij}} c_{ij} + \underbrace{\sum_{\substack{i,j \\ c_{ij}\text{-KE} \\ c_{ij}\in\text{Zykl}}} x^*_{ij}c_{ij}}_{\sum\limits_{\text{Plus-el.}} (x_{ij}+k)c_{ij} + \sum\limits_{\text{Minus-el.}} (x_{ij}-k)c_{ij}} + \underbrace{x^*_{i_0j_0}}_{=k} c_{i_0j_0} =$$

$$= \underbrace{\sum_{\substack{c_{ij}\text{-KE} \\ c_{ij}\notin\text{Zykl}}} x_{ij}c_{ij} + \sum_{\substack{c_{ij}\text{-KE} \\ c_{ij}\in\text{Zykl}}} x_{ij}c_{ij}}_{=z} + k\Delta_{i_0j_0}$$

Wir wissen, daß $k \geq 0$ und $\Delta_{i_0j_0} < 0$ sind. Wenn $k > 0$ ist, gilt dann $z^* < z$, d.h. der Wert der Zielfunktion hat sich verbessert. Wenn aber $k = 0$ ist, so ist dann $z^* = z$, d.h. der Wert der Zielfunktion hat sich nicht verschlechtert.

□

Bemerkung 4: Der Transportplan x^* ist (a) ebenfalls zusammenhängend und (b) liefert ebenfalls in jeder Spalte und jeder Zeile ein KE.

Beweisidee:

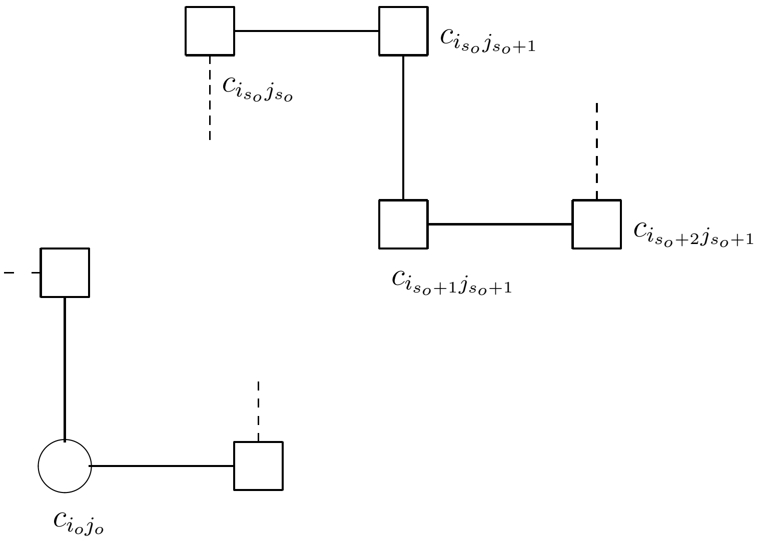
zu (a):
Betr. Zyklus $c_{i_0 j_0}, c_{i_0 j_1}, \ldots, c_{i_{s-1} j_{s-1}}, c_{i_{s-1} j_s}, c_{i_s j_s}, c_{i_s j_{s+1}}, c_{i_{s+1} j_{s+1}}, \ldots, c_{i_k j_k}, c_{i_k j_0}$.

Wissen: $c_{i_s j_t}$ ist

$$\begin{array}{lll} \text{"Minus"-El.} & \Leftrightarrow & s+1=t \\ \text{"Plus"-El.} & \Leftrightarrow & s=t \end{array}$$

$$\begin{aligned} k &= \min\{\text{alle "Minus"-El.}\} \\ &= \min\{x_{i_s j_t} \mid c_{i_s j_t} \in \text{Zyklus und } s+1=t\} \\ &= x_{i_{s_0} j_{s_0+1}}. \end{aligned}$$

Dann würde $c_{i_{s_0} j_{s_0+1}}$ zwar zum nichtKE (NKE), dafür aber $c_{i_0 j_0}$ zum KE:



Wir wissen, daß $T = \{\text{“}alte\text{“}KE\}$ zusammenhängend ist. Alle Wege, die über $c_{i_{s_0} j_{s_0}}$, $c_{i_{s_0} j_{s_0+1}}$, $c_{i_{s_0+1} j_{s_0+1}}$ gingen, können jetzt über den Rest des Zyklus gehen. Folglich ist dann $T^* = (T \setminus \{c_{i_{s_0} j_{s_0+1}}\}) \cup \{c_{i_0 j_0}\}$ auch zusammenhängend.

zu(b):

Wir zeigen jetzt, daß der x^*-Transportplan ein KE in jeder Zeile und jeder Spalte der Kostenmatrix liefert.

Erhalten haben wir den Plan x^* aus einem vorhergehenden Plan, sei dieser x genannt. Die Menge der KE, die x^* liefert, haben wir bereits mit T^* bezeichnet. Offensichtlich bezeichnet T die Menge der KE, die x liefert. Es ist sofort zu sehen, daß T und T^* sich nur um ein Element unterscheiden: zu T gehört das Element $c_{i_{s_0} j_{s_0+1}}$, aber nicht $c_{i_0 j_0}$ und zu T^* gehört $c_{i_0 j_0}$ aber nicht $c_{i_{s_0} j_{s_0+1}}$. Die übrigen Elemente der beiden Mengen sind gleich.

Wir zeigen nun, daß in jeder Zeile der Kostenmartix sich ein KE aus T^* befindet. Der Beweis für jede Spalte ist analog.

Sei r eine beliebige Zeile in der Kostenmatrix.

1. Fall: $r \neq i_{s_0}$.

In dieser Zeile gibt es ein KE c_{rl} aus T. Dieses KE kann offensichtlich nicht $c_{i_{s_0}j_{s_0+1}}$ sein und folglich gehört c_{rl} auch zu der Menge T^*, d.h. die Zeile r hat ein KE aus T^*.

2. Fall: $r = i_{s_0}$

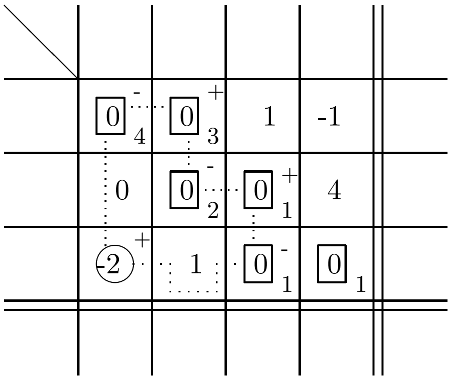
Dann befindet sich in dieser Zeile das Element $c_{i_{s_0}j_{s_0+1}}$, das auch ein Zykluselement ist. Betrachten wir jetzt die KE a und b aus T, die die Nachbarelemente von $c_{i_{s_0}j_{s_0+1}}$ in dem Zyklus sind. Wegen der Vereinbarung, daß wir nur minimale zyklen betrachten (vgl. **Merke**) können nicht alle drei Elemente ($c_{i_{s_0}j_{s_0+1}}$, a und b) in einer Spalte liegen. Damit muß nach Def. 2 einer der benachbarten Elemente, sei dieses oBdA. a, in der gleichen Zeile wie $c_{i_{s_0}j_{s_0+1}}$ liegen, dh. in der Zeile $i_{s_0} = r$.

Offensichtlich ist a ein KE aus T, $a \neq c_{i_{s_0}j_{s_0+1}}$ und folglich auch in T^*. Damit haben wir auch in diesem Fall ein KE aus T^* gefunden, das in der Zeile r liegt.

□

Beispiel 2: (wir betrachten wieder das vorhergehende Beispiel)

Wie wir im Beispiel 1 gesehen haben ist der aktuelle TP nicht optimal. In der Δ-Matrix bilden wir einen Zyklus mit dem negativen ElementΔ_{31}:



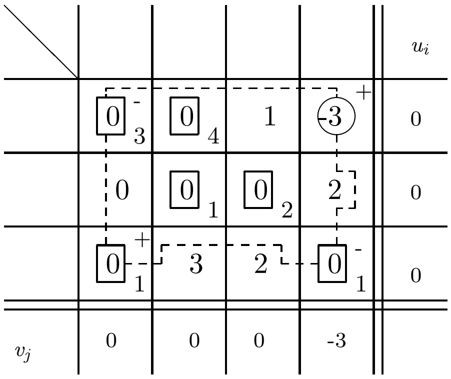
Minimum der "Minus"- Elemente ist $\min\{4, 2, 1\} = 1$, dh. Δ_{31} wird ein neues KE und Δ_{33} wird ein NKE. Damit ergibt sich ein neuer TP:

					u_i
	$\boxed{0}_3$	$\boxed{0}_4$	1	-1	0
	0	$\boxed{0}_1$	$\boxed{0}_2$	4	0
	$\boxed{-2}_1$	1	0	$\boxed{0}_1$	-2
v_j	0	0	0	2	

Die Überprüfung seiner Optimalität

	$\boxed{0}_3$	$\boxed{0}_4$	1	-3	
	0	$\boxed{0}_1$	$\boxed{0}_2$	2	
	$\boxed{0}_1$	3	2	$\boxed{0}_1$	

zeigt, daß auch dieser TP nicht optimal ist. Deshalb rechnen wir analog weiter:



					u_i
	$\boxed{0}_3$ -	$\boxed{0}_4$	1	$\enclose{circle}{-3}$ +	0
	0	$\boxed{0}_1$	$\boxed{0}_2$	2	0
	$\boxed{0}_1$ +	3	2	$\boxed{0}_1$ -	0
v_j	0	0	0	-3	

$min\{1,3\} = 1$

Auch dieser TP ist nicht optimal. Wir berechnen erneut einen weiteren TP:

	$\boxed{0}_2$	$\boxed{0}_4$	1	$\boxed{0}_1$
	0	$\boxed{0}_1$	$\boxed{0}_2$	5
	$\boxed{0}_2$	3	2	3

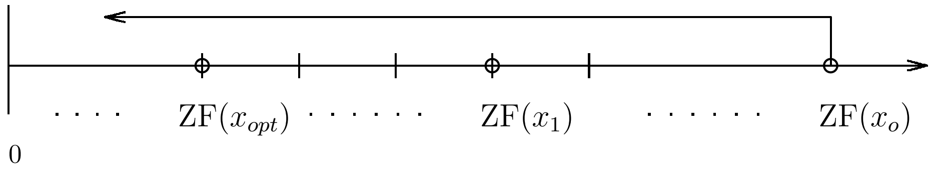
Offensichtlich ist der Transportplan $\overline{x}_{11} = 2$, $\overline{x}_{12} = 4$, $\overline{x}_{14} = 1$, $\overline{x}_{22} = 1$, $\overline{x}_{23} = 2$, $\overline{x}_{31} = 2$ Rest= 0 optimal.

Die Gesamtkosten betragen: $2 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 4 = \underline{\underline{42}}$.

Bemerkung 5: Es gibt mehrere optimale Transportpläne, falls für ein NKE $\Delta_{ij} = 0$ ist.

Bemerkung 6: Der Algorithmus berechnet in endlich vielen Schritten einen optimalen Transportplan.

Beweis: Es ist klar (sofern keine ausgeartete Lösung zwischendurch auftaucht), denn jedesmal wird die ZF verbessert und nur ganzzahlige nichtnegative Werte sind dabei möglich.



□

Ausartung: Wenn das "Minimal"-Element mehr als einmal im Zyklus vorhanden ist.

Wissen: Es gibt eine Lösung ($\widehat{=}$ lex. SM); hier "Ungarische Methode".

5.4 Variationen der klassischen TA

Wir betrachten die klassische Transportaufgabe, in der aber die Bilanzgleichung nicht erfüllt ist:

1. Fall: Überproduktion

$$\sum_{i=1}^{n} a_i > \sum_{j=1}^{m} b_j,$$

d.h. es gibt eine Überproduktion. Um diese Transportaufgabe auf die vorhergehende zurückzuführen, definieren wir einen *fiktiven Verbraucher* A_{m+1}, so daß dann die Bilanzgleichung erfüllt wird.

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m+1} b_j, \text{ d.h. } b_{m+1} := \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{j=1}^{m} b_j.$$

Die Transportkosten $c_{i,m+1}$ von P_i nach A_{m+1} (für jedes $i = 1, \ldots, n$) werden *gleich* gesetzt (günstig 0).

2. Fall: Produktionsmangel

$$\sum_{i=1}^{n} a_i < \sum_{j=1}^{m} b_j,$$

d.h. es gibt einen Produktionsmangel. In diesem Fall führen wir einen *fiktiven Produzenten* P_{n+1} ein mit den Transportkosten $c_{n+1,j} = k(= 0)$ für alle $j = 1, \ldots, m$. Die Produktionsmenge von P_{n+1} ist

$$a_{n+1} := \sum_{j=1}^{m} b_j - \sum_{i=1}^{n} a_i,$$

damit die Bilanzgleichung für die modifizierte Aufgabe erfüllt ist.

3. Fall: Streckensperrung

Bestimmte Strecken von P_i nach A_j sind gesperrt.

Für diese Strecken setzen wir *fiktive Transportkosten* ein, die so hoch sind, daß sie de facto immer hoch bleiben und damit das Verfahren diese Strecken automatisch meidet:

Als fikitive Transportkosten setzen wir M ein, so daß

$$M \pm k \geq 0 \; \forall k \in \mathbb{N}$$

$$-M \pm k \leq 0 \; \forall k \in \mathbb{N}$$

Falls in einer solchen Transportaufgabe im optimalen Transportplan eine gesperrte Strecke vorkommt, dann besitzt diese Transportaufgabe keinen optimalen Plan.

4. Fall: Transportaufgabe mit Kapazitätenbeschränkungen

$$\min\{\sum_{i,j} c_{ij}x_{ij} \quad | \quad \begin{array}{l} \sum_{j=1}^{m} x_{ij} = a_i, \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j, \\ x_{ij} \leq k_{ij}, k_{ij} > 0 \\ x_{ij} \geq 0\}. \end{array}$$

Das heißt, wir haben eine LOA der Form

$$(1) \quad \min\{\langle c, x\rangle \mid \quad \begin{array}{l} A_1 x = a \\ A_2 x = b \\ -x \geq -k \\ x \geq 0\} \end{array}$$

mit $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$, $A_1 = (m \cdot n, n)$, $A_2 = (m \cdot n, m)$, $x \in \mathbb{R}^{m \cdot n}$, $k \in \mathbb{R}^{m \cdot n}$

Die zu (1) duale Aufgabe (1_D) hat dann die Form:

$$(1_D) \quad \max\{a^T u + b^T v - k^T w | \quad \begin{array}{l} A_1^T u + A_2^T v - w \leq c\}. \\ w \geq 0 \end{array}$$

Satz 2 (Komplementaritätssatz): (für diesen Fall)

$$\overline{x} \in \mathbb{R}^{n \cdot m} \quad \text{mit} \quad \begin{array}{l} A_1\overline{x} = a \\ A_2\overline{x} = b \\ \overline{x} \leq k \\ \overline{x} \geq 0 \end{array}$$

ist Minimum für (1) gdw. ein $\overline{y} = \begin{pmatrix} \overline{u} \\ \overline{v} \\ \overline{w} \end{pmatrix}$ existiert mit

1. $A_1^T\overline{u} + A_2^T\overline{v} - \overline{w} \leq c$
2. $\overline{w} \geq 0$
3. $\overline{x}^T(\underbrace{A_1^T\overline{u} + A_2^T\overline{v} - \overline{w}}_{A^T y} - c) = 0$
4. $\overline{w}^T(\underbrace{k - \overline{x}}_{-E^T\overline{x} - (-k)}) = 0$

Beweis: HA. □

Das bedeutet komponentenweise:

1. Fall $0 < \overline{x}_{ij} < k_{ij}$ $\quad (\overline{x}_{ij} -$ BV $)$

$$\hookrightarrow \quad \left.\begin{array}{l} \overline{u}_i + \overline{v}_j - \overline{w}_{ij} - c_{ij} = 0 \\ \text{und } \overline{w}_{ij} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{u}_i + \overline{v}_j = c_{ij}$$

2. Fall $\overline{x}_{ij} = k$ $\quad (\overline{x}_{ij} -$ BV$)$

$$\hookrightarrow \quad \left.\begin{array}{l} \overline{u}_i + \overline{v}_j - \overline{w}_{ij} - c_{ij} = 0 \\ \text{und } \overline{w}_{ij} \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{u}_i + \overline{v}_j \geq c_{ij}$$

3. Fall $\overline{x}_{ij} = 0$

$$\hookrightarrow \quad \left.\begin{array}{l} \overline{u}_i + \overline{v}_j - \overline{w}_{ij} \leq c_{ij} \\ \text{und } \overline{w}_{ij} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{u}_i + \overline{v}_j \leq c_{ij}.$$

Damit haben wir für die Optimalität von $\overline{x}$ (Transportplan) ein **Kriterium:** erhalten:

$\overline{x}$ ist ein optimaler Transportplan **gdw**

$$\begin{array}{rcl} 0 < \overline{x}_{ij} < k_{ij} & \longrightarrow & \overline{u}_i + \overline{v}_j = c_{ij} \\ \overline{x}_{ij} = k_{ij} & \longrightarrow & \overline{u}_i + \overline{v}_j \geq c_{ij} \\ \overline{x}_{ij} = 0 & \longrightarrow & \overline{u}_i + \overline{v}_j \leq c_{ij} \end{array}$$

Achtung:

1. Bei min $= m$ Bestimmung eines Zyklus muß auch $x_{ij} + m \leq k_{ij}$ beachtet werden, falls x_{ij} ein "Plus"-Element des Zyklus ist.
2. Falls $\Delta_{ij} > 0$ und c_{ij} gesättigt $(x_{ij} = k_{ij})$ errechnen wir einen neuen Transportplan mittels eines Zyklus, wobei jetzt c_{ij} ein "Minus"-Element ist.

Kapitel 6

Lineare Optimierung und Matrixspiele

6.1 Grundbegriffe der Spieltheorie

- Ein Spiel ist charakterisiert durch eine Menge von Spielern I. Für jeden Spieler $i \in I$ gibt es eine Strategie-Menge S_i.
- Das Spiel läuft so ab, daß jeder Spieler aus seiner Strategiemenge eine Strategie $s_j \in S_i$ wählt, und zwar so, daß er einen Nutzen davon hat.

Frage: Wie läßt sich dieser Nutzen bestimmen?

Wir definieren:

Definition 1:

Die Funktion $f_k : \underset{i \in I}{\mathbf{X}} S_i \longrightarrow R$ heißt (Gewinn-)Funktion für den Spieler k.

Natürlich ist es wichtig, ob Spieler ihre Strategien untereinander abstimmen können, Koalitionen bilden, etc.

Betrachten wir n-Personenspiele, nichtkooperativ, d.h. die Strategien der Spieler werden voneinander unabhängig gewählt (keine Absprache).

Wir definieren vorerst einige Grundbegriffe der Spieltheorie:

Definition 2:

Das Tripel $\Gamma = [I, \{S_i\}_{i \in I}, \{f_i\}_{i \in I}]$ heißt Spiel.

Definition 3:

$s \in \underset{i \in I}{\mathbf{X}} S_i$ heißt Situation.

Definition 4:

Eine Situation $s = (s_1, \ldots, s_k, \ldots, s_n)$ heißt für den Spieler k **annehmbar** , falls gilt:

$\forall t_k (t_k \in S_k \longrightarrow f_k(s_1, \ldots, s_{k-1}, t_k, s_{k+1}, \ldots, s_n) \leq f_k(s_1, \ldots, s_k, \ldots, s_n))$.

Definition 5:

Eine Situation s heißt Gleichgewichtssituation (GGS), falls s für alle Spieler annehmbar ist.

Beispiel 1: Gefangenendilemma

Zwei Diebe kommen in Betracht, eine „sehr große“ Summe erbeutet zu haben. Sie werden gefaßt und stehen vor Gericht. Es läßt sich zweifelsfrei nachweisen, daß einer der beiden der Täter ist. Wenn beide behaupten, daß sie unschuldig sind, werden sie zu je einem Jahr Gefängnis verurteilt. Wenn einer aussagt, daß er der Schuldige ist, bekommt er 10 Jahre und der andere wird nicht bestraft. Wenn beide gestehen, so müssen sie für je 8 Jahre hinter Gitter.

Daraus ergeben sich die Gewinnfunktionen f_1 und f_2 wie folgt:

f_1

$1\backslash 2$	g	n
g	-8	-10
n	0	-1

f_2

$1\backslash 2$	g	n
g	-8	0
n	-10	-1

g - gestehen
n - nicht gestehen

Es gilt: (n,n) ist GGS, denn (n,n) ist annehmbar für f_1 und für f_2.

Um zu zeigen, daß (n,n) annehmbar für f_1 ist genügt es zu zeigen, daß:

$f_1(n,n) \geq f_1(x,n) \qquad \forall x \in \{g,n\}\backslash\{n\}$, d.h., daß:

$f_1(n,n) \geq f_1(g,n)$.

Es folgt aber sofort aus der Tabelle, daß

$f_1(n,n) = -1 > -10 = f_1(g,n)$ gilt.

Um zu zeigen, daß (n,n) auch eine annehmbare Situation auch für f_2 ist, müßen wir zeigen, daß

$f_2(n,n) \geq f_2(n,y) \qquad \forall y \in \{g,n\}\backslash\{n\}$, d.h., daß:

$f_2(n,n) \geq f_2(n,g)$.

Nun gilt wiederum aus der Def. von f_2, daß

$f_2(n,n) = -1 > -10 = f_2(n,g)$

d.h. wir haben eine GGS.

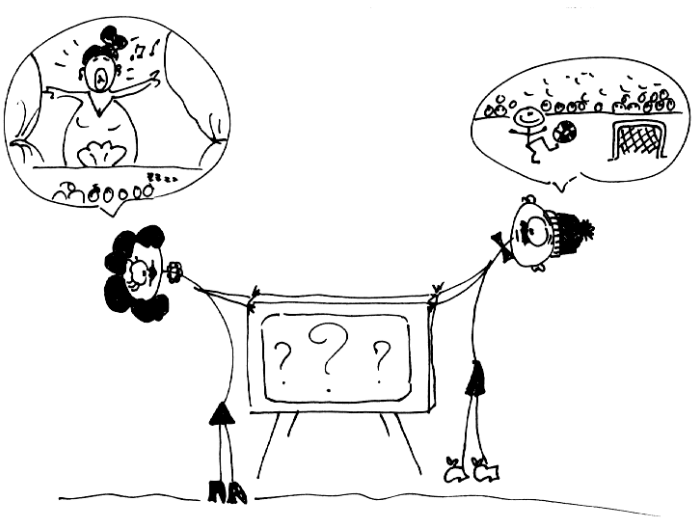
□

Beispiel 2: Familienstreit

Abend: Theater oder Fußball:

Die Frau würde lieber ein Theaterstück im Fernsehn sehen, dagegen freut sich der Mann eher auf die Übertragung des Fußballspiels seiner Lieblingsmannschaft. Das "Familiendrama" kann man folgendermassen bewerten:

- Gemeinsame Entscheidung ⟶ 1 Pkt.
- Eigener Vorzug ⟶ 1 Pkt.
- "Sturheit" , dh. jeder beharrt auf seinem Wunsch ⟶ -1 Pkt.
- sonst ⟶ 0 Pkte.



f_1

$1\backslash 2$	F	T
F	1	0
T	0	2

f_2

$1\backslash 2$	F	T
F	2	0
T	0	1

(F,F) und (T,T) sind GGS.

$\square$

Beispiel 3: Spieler A gegen Spieler B

Gewinn von A = Verlust von B

f_A

$A\backslash B$	1	2
1	1	5
2	3	2

f_B

$A\backslash B$	1	2
1	-1	-5
2	-3	-2

Dieses Spiel hat keine GGS.

$\square$

Damit ist klar, daß der **Lösungsbegriff** nicht unproblematisch ist! - z.B. wenn ein Spiel keine oder mehrere GGS besitzt.

6.2 Zwei-Personen-Null-Summen-Spiele

Definition 6:

Ein Spiel Γ mit $n = 2$ heißt antagonistisch (oder 2-Personen-Nullsummenspiel), wenn $f_1 = -f_2$.

Lemma 1:

Sei Γ ein antagonistisches Spiel. Wenn die Situationen (s_1, s_2) und (t_1, t_2) GGS sind, so sind auch (s_1, t_2) und (t_1, s_2) jeweils GGS und $f_i(s_1, s_2) = f_i(t_1, t_2)$ mit $i = 1, 2$.

Beweis:

Sei $f = f_1$. Dann ist $f_2 = -f$.

$s = (s_1, s_2)$ - GGS $\leftrightarrow f(x, s_2) \leq f(s_1, s_2) \quad \forall x \in S_1$

und $f(s_1, y) \geq f(s_1, s_2) \quad \forall y \in S_2$

d.h.

(1) $f(x, s_2) \leq f(s_1, s_2) \leq f(s_1, y) \quad \forall x \in S_1 \quad \forall y \in S_2$.

Analog:

(2) $f(x, t_2) \leq f(t_1, t_2) \leq f(t_1, y) \quad \forall x \in S_1 \quad \forall y \in S_2$.

Einsetzen in (1) $x = t_1$, $y = t_2$ und
in (2) $x = s_1$, $y = s_2$ ergibt:

$f(t_1, s_2) \leq f(s_1, s_2) \leq f(s_1, t_2)$

$f(s_1, t_2) \leq f(t_1, t_2) \leq f(t_1, s_2)$

und damit:

$f(t_1, s_2) = f(s_1, s_2) = f(s_1, t_2) = f(t_1, t_2)$

□

Das Lemma 1 berechtigt uns, bei antagonistischen Spielen (sonst nicht, vergleiche Beispiel 2) von optimaler Strategie zu sprechen.

Definition 7:

$s_1 \in S_1$ ist optimal für den Spieler 1, falls es $s_2 \in S_2$ gibt, so daß (s_1, s_2) GGS ist.

(d.h. wenn ein antagonistisches Spiel eine GGS besitzt, so ist sie optimal für die Spieler.)

Lemma 2:

Sei Γ weiterhin ein antagonistisches Spiel.

(s_1, s_2) ist GGS gdw. $\max\limits_{x \in S_1} f(x, s_2) \leq \min\limits_{y \in S_2} f(s_1, y)$.

Beweis:

$(\longrightarrow)$ Sei (s_1, s_2) GGS.

$\Rightarrow \quad f(s_1, s_2) \geq f(x, s_2), \quad$ dh. $\forall x \in S_1 \leftrightarrow \max\limits_{x \in S_1} f(x, s_2) \leq f(s_1, s_2)$

und $-f(s_1,s_2) \geq -f(s_1,y)$, dh. $\forall y \in S_2 \leftrightarrow \min\limits_{y\in S_2} f(s_1,y) \geq f(s_1,s_2)$

Anmerkung: max und min nur, falls f Maximum bzw. Minimum besitzt, sonst *sup* bzw. inf.

$\Rightarrow \quad \max\limits_{x\in S_1} f(x,s_1) \leq \min\limits_{y\in S_2} f(s_1,y)$.

$(\longleftarrow)$ Sei $\max\limits_{x\in S_1} f(x,s_2) \leq \min\limits_{y\in S_2} f(s_1,y)$. (1)

Es gilt für min und max immer:

$\max\limits_{x\in S_1} f(x,s_2) \geq f(s_1,s_2)$ weil s_1 ein bel. Element aus S_1 ist, und

$\min\limits_{y\in S_2} f(s_1,y) \leq f(s_1,s_2)$.

$$\Rightarrow \quad \max_{x\in S_1} f(x,s_2) \geq f(s_1,s_2) \geq \min_{y\in S_2} f(s_1,y). \tag{2}$$

Aus (1) und (2) folgt:

$$\underbrace{\max_{x\in S_1} f(x,s_2) = f(s_1,s_2)}_{\substack{\downarrow \\ f(x,s_2)\leq f(s_1,s_2) \quad \forall x\in S_1}} = \underbrace{f(s_1,s_2) = \min_{y\in S_2} f(s_1,y)}_{\substack{\downarrow \\ -f(s_1,y)\leq -f(s_1,s_2) \quad \forall y\in S_2}}$$

Nach Definition 5 folgt daraus, daß (s_1,s_2) eine GGS ist.

□

(d.h. suchen eine Situation (s_1,s_2) mit min(max(...)) = max(min(...)). $\Rightarrow$ deshalb: min-max-Methode).

Beispiel: Mensch - Natur

An einem sonnigen Sonntagmorgen unternimmt jemand (Spieler 1) einen Ausflug, wobei er sich entschließt, das damit verbundene Vergnügen mit der Zahl 10 zu bewerten. Der Terminus „aufkommende Niederschlagsneigung“ im Wetterbericht des Rundfunks für diesen Tag führt ihn zu dem Schluß, daß der Natur zwei Strategien zur Verfügung stehen: (1) Regen und (2) Trockenheit. (Da der Spieler 1 einige Gesetzmäßigkeiten der Natur kennt, schließt er von vornherein aus der

Menge ihrer Strategien Schnee, Frost, Wirbelsturm, Überschwemmungen usw. aus.) Nun überdenkt der Spieler 1 seine eigenen Strategien. Es sind drei: (1) Verzicht auf den Ausflug (in diesem Fall ist sein Vergnügen unabhängig von der Strategie der Natur gleich Null); (2) Mitnahme eines leichten Regenmantels (die mit dem Tragen des Mantels verbundene Unannehmlichkeit verringert sein Vergnügen bei trockenem Wetter auf 9. Gleichzeitig bewirkt das Vorhandensein des Mantels, daß der Ausflug sogar bei Regen eines gewissen Reizes nicht entbehrt; in diesem Fall bewertet der Spieler 1 das mit dem Ausflug verbundene Vergnügen mit 5); (3) Weggehen ohne Mantel (ungetrübtes Vergnügen bei trockenem Wetter und sehr mäßiges, nämlich nur das einer einzigen Einheit entsprechende bei Regen).

Was ist das optimale Verhalten für den Spieler 1?

Lösung:

f_M:

$M\backslash N$	R	T	min	max(min)
1	0	0	0	
2	5	9	5	5
3	1	10	1	
max	5	10		
min(max)	5			

$\rightarrow$ $(2, R)$ - GGP und optimal.

$\rightarrow$ Strategie für den Menschen: „Regenmantel mitnehmen“

□

6.3 Matrixspiele

- Das sind antagonistische Spiele mit $card(S_1)$ und $card(S_2)$ **endlich**.
  d.h. $\Gamma = [\{1, 2\}, \{f_1, f_2\}, \{S_1, S_2\}]$.
- Sei $cardS_1 = m \quad : \quad s_1, \ldots, s_m$
  Sei $cardS_2 = n \quad : \quad t_1, \ldots, t_n$.
- Bilden die Gewinnmatrix $A = (a_{ij})$ mit $a_{ij} = f(s_i, t_j)$. (f ist dabei die Gewinnfunktion für Spieler 1).
- **Grundvoraussetzung:** Das Matrixspiel werde sehr oft gespielt: Zahl der Spiele N!

Spieler 1 wählt die Strategie s_i hierbei N_i-mal.

$\Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{m} N_i = N$.

Wenn Spieler 2 ständig die Strategie t_j anwendet, so wird der Gewinn von Spieler 1:

$\sum\limits_{i=1}^{m} N_i a_{ij}$ und der „relative“ Gewinn pro Spiel:

$$\sum_{i=1}^{m} \underbrace{\frac{N_i}{N}}_{\in[0,1]} a_{ij}$$

Definition 8:

Gegeben sei das Matrixspiel $\Gamma = [\{1,2\},\{S_1,S_2\},f]$ mit Strategiemengen $S_1 = \{s_1,\ldots,s_m\}$ und $S_2 = \{t_1,\ldots,t_n\}$.

Der Vektor $p = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_m \end{pmatrix}$ heißt *gemischte Strategie* für den Spieler 1, falls $0 \leq p_i$, $i = 1,\ldots,m$, $\sum\limits_{i=1}^{m} p_i = 1$.

Wir sagen, daß p_i die Wahrscheinlichkeit (Häufigkeit) sein soll, mit der Spieler 1 die Strategie s_i wählt.

⇒ Gewinn von Spieler 1 bei Anwendung der gemischten Strategie p gegen Strategie t_j vom Spieler 2 ist $\sum\limits_{i=1}^{m} p_i a_{ij}$.

Analog kann man die gemischte Strategie für Spieler 2 einführen:

$q = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}$, $0 \leq q_i$, $i = 1,\ldots,n$, $\sum\limits_{j=1}^{n} q_j = 1$.

Verlust vom Spieler 2 bei Anwendung von Strategie s_i (durch Spieler 1) und der Strategie q ist dann

$\sum\limits_{j=1}^{n} q_j a_{ij}$.

⇒ Gewinn von Spieler 1 bei Anwendung von (p,q) wird:

$$\sum_{j=1}^{n} q_j \left(\sum_{i=1}^{m} p_i a_{ij} \right) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} p_i q_j a_{ij} = p^T A q = \langle p, Aq \rangle$$

Haben:

1. $P = \{p \in R^m \mid p \geq 0, \quad \sum\limits_{i=1}^{m} p_i = 1\}$
2. $Q = \{q \in R^n \mid q \geq 0, \quad \sum\limits_{j=1}^{n} q_j = 1\}$

⇒ P und Q sind kompakt (abgeschlossen und beschränkt) und konvex.

Die Gewinnfunktion vom Spieler 1: $E(p,q) = \langle p, Aq \rangle$.

Definition 9:

Sei $\Gamma = [\{1,2\},\{S_1,S_2\},f]$ ein antagonistisches Spiel. Für jede gemischte Strategie $p \in P$ und $q \in Q$ mit der Gewinnfunktion von Spieler 1 $E(p,q) = \langle p, Aq \rangle$ heißt das Spiel $\Gamma^* = [\{1,2\},\{P,Q\},E]$ gemischte Erweiterung von Γ.

Satz (Hauptsatz über Matrixspiele):

Die gemischte Erweiterung des Spiels Γ besitzt immer eine GGS.

Folgerung:

Der Matrix A läßt sich eindeutig eine Zahl $v(A) = \langle p, Aq \rangle$ zuordnen ((p,q) - GGS des Spiels Γ^*). Dabei ist die Repräsentantenunabhängigkeit durch Lemma 1 gegeben.

Definition 10:

$v(A)$ heißt Wert des Matrixspiels. (Genauer: Wert der gemischten Erweiterung von Γ)

Beweis des Satzes:

Betrachten: $g_1(p) := \min\limits_{q \in Q} \langle p, Aq \rangle$ ist der garantierte Mindestgewinn vom Spieler 1.

$\Rightarrow$ $\overline{p}$ ist optimale Strategie für Spieler 1, falls $\overline{g}_1 = g_1(\overline{p}) = \max\limits_{p \in P} g_1(p)$

Analog: $g_2(q) := \max\limits_{p \in P} \langle p, Aq \rangle$. (garantiert maximalen Verlust)

$\Rightarrow$ $\overline{q}$ ist optimale Strategie für Spieler 2, falls $g_2(\overline{q}) = \min\limits_{q \in Q} g_2(q)$

Betrachten g_1: $g_1(p) := \min\limits_{q \in Q} \langle p, Aq \rangle = (*)$

Da Q ein Polyeder ist, reicht es, die Ecken zu betrachten.

$Q = \{q \mid q_i \geq 0, \quad \sum q_i = 1\} \rightarrow$ Ecken von Q sind $e_j = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)^T$.

$\Rightarrow$ $(*)= \min\limits_j \langle p, Ae_j \rangle = \min\limits_j \langle p, A_{\cdot j} \rangle$.

Wissen:

Für jedes feste j ist $p \longrightarrow \langle p, A_{\cdot j} \rangle$ stetig. Wegen der endlichen Anzahl von j folgt:

$g_1 = g_1(p)$ ist stetig und damit nimmt g_1 das Maximum auf der abgeschlossen und beschränkten Menge P an.

Die Aufgabe $\max\limits_{p \in P} g_1(p)$ läßt sich so schreiben:

Betrachten alle t: $\min\limits_j \langle p, A_{\cdot j} \rangle \;\geq t$,

d.h. betrachten $\{t \mid \min\limits_j \langle p, A_{\cdot j} \rangle \geq t\}$ und suchen dabei größtes t.

$\Rightarrow \max\{t \mid \min\limits_j \langle p, A_{\cdot j} \rangle \geq t\} = g_1(\overline{p})$.

$\Rightarrow \max\limits_{p \in P} g_1(p) = \max\{t \mid \langle p, A_{\cdot j} \rangle \;\geq t, \quad j = 1, \ldots, n, \quad p \in P\}$.

(t, p) werden dabei als Variable aufgefaßt.

$\Rightarrow$ Das ist eine LOA, d.h. **wir haben:**

$\max\{t \mid \langle p, A_{\cdot j} \rangle - t \geq 0, \; j = 1, \ldots n, \; \sum p_i = 1, \; p_i \geq 0, \; t \in R\}$.

Die Aufgabe für Spieler 2 wird analog umgeformt:

$$\min g_2(q) = \min\{s \mid \langle A_{i}\cdot, q\rangle - s \le 0,\ \sum_j q_j = 1\ , q_j \ge 0, s \in R\}.$$

Bemerkung:

Als LOA sind $\max g_1$ und $\min g_2$ zueinander dual.

Beweis:

$$\max g_1(p) = \max\{t \mid \langle p, A_{\cdot j}\rangle - t \ge 0,\ j = 1,\dots,n,\ \sum_{i=1}^{m} p_i = 1,\ p_i \ge 0,\ t \in R\}$$

$$= \max\{t \mid t - \langle p, A_{\cdot j}\rangle \le 0,\ j = 1,\dots,n, \sum_{i=1}^{m} p_i = 1, p_i \ge 0, t \in R\}$$

$$= \max\{t \mid t - \langle A_{\cdot 1}, p\rangle \le 0,\ \dots, t - \langle A_{\cdot n}, p\rangle \le 0, \sum_{i=1}^{m} p_i = 1, p_i \ge 0, t \in R\}$$

$$\begin{aligned} = \max\{1 \cdot t + 0^T_{(m)} \cdot p \mid\ & I^T \cdot t - A^T \cdot p \le 0,\\ & p_1 + \dots + p_m = 1,\\ & p_i \ge 0,\\ & t - bel.\},\end{aligned}$$

wobei $I = (\underbrace{1,\dots,1}_{n})$

$$= \max\{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t \\ p_1 \\ \vdots \\ p_m \end{pmatrix} \right\rangle \mid \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ & -A & \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} t \\ p_1 \\ \vdots \\ p_m \end{pmatrix} \le 0_{(n)},$$

$$(0,1,\dots,1) \cdot \begin{pmatrix} t \\ p_1 \\ \vdots \\ p_m \end{pmatrix} = 1,$$

$$p_i \ge 0,$$
$$t - bel.\}$$

Wissen:

$\max\{\langle c, x\rangle | A_1 x \le b_1, A_2 x = b_2, x \ge 0\}$ dual zu $\min\{u_1^T b_1 + u_2^T b_2 | A_1^T u_1 + A_2^T u_2 \ge c, u_1 \ge 0\}$.

und dual zu $\min\{s \mid q_1 + \dots + q_n = 1, s - \langle q, A_{i}\cdot\rangle \ge 0, q_j \ge 0\}$

$$= \min\{s \mid \langle q, A_{i}\cdot\rangle - s \le 0, \sum_{1}^{n} q_j = 1, q_j \ge 0, s \in R\}$$

□

Da $\max g_1$ und $\min g_2$ zueinander dual und beide Aufgaben lösbar sind gilt $\max g_1 = \min g_2$.

Seien $\overline{p}$ und $\overline{q}$ entsprechende Lösungen. Dann muß gelten:

$$\min_{q \in Q} \langle \overline{p}, Aq\rangle = g_1(\overline{p}) = v = g_2(\overline{q}) = \max_{p \in P} \langle p, A\overline{q}\rangle.$$

$$\Rightarrow \langle \overline{p}, Aq\rangle \ge v \ge \langle p, A\overline{q}\rangle \quad \forall p \forall q$$

$$\underbrace{\langle \overline{p}, Aq\rangle \geq \langle \overline{p}, A\overline{q}\rangle}_{\text{Situation annehmbar für Sp. 2}} \quad = \quad \underbrace{\langle \overline{p}, A\overline{q}\rangle \geq \langle p, A\overline{q}\rangle}_{\text{Situation annehmbar für Sp. 1}}$$

$\Rightarrow$ $(\overline{p}, \overline{q})$ ist eine GGS. □

Bemerkung:

$\Rightarrow$ Lösen der LOA (P) liefert $(\overline{p}, \overline{t})$

$\Rightarrow$ Lösen der LOA (D) liefert $(\overline{q}, \overline{s})$

Dabei ist $\overline{p}$ optimal für Spieler 1, $\overline{q}$ optimal für Spieler 2 und $\overline{t} = \overline{s} = v(A)$.

Beispiel: (Spiel: „Papier-Schere-Stein“)

Das Spiel „Papier-Schere-Stein“ ist ein Zwei-Personenspiel. Beide Spieler wählen unabhängig voneinander eines der Symbole „Papier“, “Schere“ oder „Stein“. Dabei:

- das Papier wickelt den Stein ein;
- der Stein zertrümmert die Schere;
- die Schere zerschneidet das Papier.

Der Sieger erhält vom Verlierer 1 Punkt; bei gleichen Symbolen erhält jeder Spieler 0 Punkte.

Wie soll man spielen?

Lösung:

Gewinnfunktion von Spieler 1:

$1\backslash 2$	P	Sch	St	min	max
P	0	-1	1	-1	-1
Sch	1	0	-1	-1	
St	-1	1	0	-1	
max	1	1	1		
min	1				

$f_1 = -f_2$

$\rightarrow$ keine GGS!

Wie häufig soll man die verschiedenen Strategien spielen, damit man optimalen Gewinn erwartet, d.h. Berechnung der gemischten Erweiterung.

$$\begin{array}{rr|rrr}
 & 1\backslash 2 & P & Sch & St \\ \hline
p & P & 0 & -1 & 1 \\
q & Sch & 1 & 0 & -1 \\
1-p-q & St & -1 & 1 & 0
\end{array}$$

Es sind p, q (und $1-p-q$) zu berechnen. Dafür lösen wir die LOA:

$$\text{(P)} \quad \max\{t \mid \langle p, A_{\cdot j}\rangle - t \geq 0, \sum_{i=1}^{n} p_i = 1, p_i \geq 0, t \in R\}$$

mit $n = 3$, $p_1 = p$, $p_2 = q$, $p_3 = 1-p-q$.

Es gilt:

$$\begin{aligned}
\text{(P)} = \max\{t|\; & q - 1 + p + q - t \geq 0 \quad \} \\
& -p + 1 - p - q - t \geq 0 \\
& p - q - t \geq 0 \\
& p, q \geq 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= \max\{t|\; & 2q + p - 1 - t \geq 0 \quad \}. \\
& -2p - q + 1 - t \geq 0 \\
& p - q - t \geq 0 \\
& p, q \geq 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= \max\{t|\; & 2q + p - t \geq 1 \;\; \} \\
& 2p + q + t \leq 1 \\
& -p + q + t \leq 0 \\
& p, q \geq 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= \max\{t^+ - t^-|\; & 2q + p - t^+ + t^- \geq 1 \;\; \} \\
& 2p + q + t^+ - t^- \leq 1 \\
& -p + q + t^+ - t^- \leq 0 \\
& p, q, t^+, t^- \geq 0
\end{aligned}$$

Wir erhalten durch Hinzufügen von Schlupfvariablen das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}
& 2q + p - t^+ + t^- - u_1 + y_1 = 1 \\
& 2p + q + t^+ - t^- + u_2 = 1 \\
& -p + q + t^+ - t^- + u_3 = 0
\end{aligned}$$

Um einen zulässigen Basispunkt zu finden müssen wir für diese LOA die Hilfsaufgabe lösen:

$$\text{(HA):} \left\{ \begin{array}{l}
\max(-y_1) = \max(p + 2q - t^+ + t^- - u_1 - 1) \\
\\
2q + p - t^+ + t^- - u_1 + y_1 = 1 \\
2p + q + t^+ - t^- + u_2 = 1 \\
-p + q + t^+ - t^- + u_3 = 0
\end{array} \right.$$

			p	$q\downarrow$	t^+	u_1	t^-
		-1	-1	-2	1	1	-1
	y_1	1	1	2	-1	-1	1
	u_2	1	2	1	1	0	-1
←	u_3	0	-1	$\mathbf{1}$	1	0	-1

$$\begin{array}{c|c|c|ccccc}
 & & & p\downarrow & u_3 & t^+ & u_1 & t^- \\
\hline
 & & -1 & -3 & 2 & 3 & 1 & -3 \\
\hline
\leftarrow & y_1 & 1 & \mathbf{3} & -2 & -3 & -1 & 3 \\
 & u_2 & 1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
 & q & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & -1
\end{array}$$

$$\begin{array}{c|c|ccccc}
 & & y_1 & u_3 & t^+ & u_1 & t^- \\
\hline
 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
p & 1/3 & 1/3 & -2/3 & -1 & -1/3 & 1 \\
u_2 & 0 & -1 & 1 & 3 & 1 & -3 \\
q & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & -1/3 & 0
\end{array}$$

$\Rightarrow$ BV: p, u_2, q.

Und nun zurück zur Originalaufgabe:

$$\begin{array}{c|c|c|cccc}
 & & & u_3 & t^+\downarrow & u_1 & t^- \\
\hline
 & & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\
\hline
 & p & 1/3 & -2/3 & -1 & -1/3 & 1 \\
\leftarrow & u_2 & 0 & 1 & 3 & 1 & -3 \\
 & q & 1/3 & 1/3 & 0 & -1/3 & 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{c|c|cccc}
 & & u_3 & u_2 & u_1 & t^- \\
\hline
 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\
\hline
p & 1/3 & -1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\
t^+ & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & -1 \\
q & 1/3 & 1/3 & 0 & -1/3 & 0
\end{array}$$

$\Rightarrow p = 1/3,\ q = 1/3 \Rightarrow 1 - p - q = 1/3, \quad t = t^+ - t^- = 0 - 0 = 0$

$t = v(A) = 0.$

□

Bilder von Sara Zeugmann