Hausaufgaben in Lin. Opt.

Abgabe: 11.05.2004

Aufgabe 1 (Skalarprodukt): (4 Punkte)

Gegeben sei der Vektorraum $[L, +]$ über $\mathbb{R}$, wobei $[L, +, \cdot]$ der Körper mit $L = \{\ f\ \mid\ [a,b] \subseteq \mathbb{R},\ f : [a,b] \to \mathbb{R},\ f - stetig\ \}$ ist. Sei weiterhin die Abb. $[\cdot,\cdot] : L \times L \to \mathbb{R}$ definiert wie folgt:

$$[f, g] := \int_a^b (f(t) + g(t))dt.$$

Ist diese Abb. ein Skalarprodukt in $[L, +]$? Beweis.

Aufgabe 2 (extremaler Punkt): (4 Punkte)

Sei das konvexe Polyeder $P := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 5x - 2y \leq 7, x \geq 0, y \geq 0\}$ gegeben. Zeigen Sie, daß $K = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ kein extremaler Punkt in P ist und daß der Punkt $L = \begin{pmatrix} 1,4 \\ 0 \end{pmatrix}$ extremal in P ist.

Aufgabe 3 (konvexe Mengen): (10 Punkte)

Zeigen Sie, daß die Menge $K(x_0, r) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid < x - x_0, x - x_0 > \leq r^2\}$ konvex ist.

Hinweis: Zeigen Sie, daß $(< p, p > \cdot < s, s >) \geq (< p, s >)^2$ für alle p und alle s aus $\mathbb{R}^n$ gilt. (Cauchy-Ungleichung)