

Angewandte Mathematik für die Informatik

(eine Zusammenfassung des 2. Teils der Vorlesung)

PD Dr. Louchka Popova-Zeugmann
PD Dr. Wolfgang Kössler

8. Juli 2019

Lineare Optimierung

Ganzzahlige Optimierung

Differentialgleichungen

Differentialgleichungen 1.Ordnung

Differentialgleichungen 2. Ordnung

Anhang

Einige allgemeine Grundbegriffe

Definition 1.1 (Skalarprodukt in dem VR $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ über dem Körper $(\mathbb{R}, +, \cdot)$).

Die Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Skalarprodukt, falls gilt:

- ▶ $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$ für alle $v, w \in \mathbb{R}^n$,
- ▶ $\langle v_1 + v_2, w \rangle = \langle v_1, w \rangle + \langle v_2, w \rangle$ für alle $v_1, v_2, w \in \mathbb{R}^n$,
- ▶ $\langle \lambda \cdot v, w \rangle = \lambda \cdot \langle v, w \rangle$, für alle $v, w \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$,
- ▶ $\langle v, v \rangle \geq 0$ für alle $v \in \mathbb{R}^n$ und $\langle v, v \rangle = 0$ gdw $v = \mathbf{0}$.

Einige allgemeine Grundbegriffe

- Betrachten wir den VR $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ über den Körper $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.

Dann ist $\langle v, w \rangle := \sum_{i=1}^n v_i \cdot w_i$ ist ein SP.

Dieses Skalarprodukt wird Euklidisches SP oder Standard-SP genannt.

- Ab sofort bezeichnen wir den VR $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ über den Körper $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ kurz nur $\mathbb{R}^n$.

Einige allgemeine Grundbegriffe

Definition 1.2.

Seien $x_1, \dots, x_k$ Elemente (Punkte) aus $\mathbb{R}^n$. Das Element x heißt

1. eine **lineare Kombination** von $x_1, \dots, x_k$, wenn es k reelle Zahlen $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ gibt, so dass gilt:

$$x = \sum_{i=1}^k \lambda_i \cdot x_i,$$

2. eine **affine Kombination** von $x_1, \dots, x_k$, wenn

2.1 x ist eine lineare Kombination von $x_1, \dots, x_k$, etwa $x = \sum_{i=1}^k \lambda_i \cdot x_i$, und

2.2 $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1,$

3. eine **konvexe Kombination** von $x_1, \dots, x_k$, wenn

3.1 x ist eine affine Kombination von $x_1, \dots, x_k$, etwa

$$x = \sum_{i=1}^k \lambda_i \cdot x_i \quad \text{mit} \quad \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1 \quad \text{und}$$

3.2 $\lambda_i \geq 0$ for all $i \in \{1, \dots, k\}$.

Einige allgemeine Grundbegriffe

Definition 1.3 (konvexe Hülle).

Sei $M := \{x_1, \dots, x_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ eine endliche Menge von Punkten in $\mathbb{R}^n$. Die Menge aller konvexen Kombinationen von $\{x_1, \dots, x_k\}$ heißt die **konvexe Hülle** von M (Bez.: $\text{conv}\{x_1, \dots, x_k\}$).

Bezeichnung 1.1.

Seien x_1, x_2 zwei Punkte aus $\mathbb{R}^n$. Die konvexe Hülle $\text{conv}\{x_1, x_2\}$ heißt auch **Verbindungsstrecke** zwischen x_1 und x_2 .

Definition 1.4 (konvexe Menge).

Die Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **konvex**, wenn für beliebige $x_1, x_2 \in M$ gilt auch $\text{conv}\{x_1, x_2\} \subseteq M$.

Grundbegriffe der Linearen Optimierung

Definition 1.5 (Lineares Optimierungsproblem).

Sei $x, c \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^m, A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Das Problem

$$(P) \quad \max / \min \{ \langle c, x \rangle \mid A \cdot x = b, x \geq 0 \}$$

heißt ein *Lineares Optimierungsproblem* (kurz: LOP).

Ein LOP wird auch *Lineare Optimierungsaufgabe* (kurz: LOA) genannt.

Sei in dem Weiteren, o.B.d.A., $m \leq n$.

Bezeichnung 1.2.

$M := \{x \in \mathbb{R}^n \mid A \cdot x = b, x \geq 0\}$ heißt Restriktionsbereich oder Bedingungsmenge, $\langle c, x \rangle$ wird Zielfunktion genannt.

Grundbegriffe der Linearen Optimierung

- ▶ Sei $rg(A) = m$. Dann existieren m linear unabhängige Spalten in der Matrix A . Seien diese, o.B.d.A., die ersten m .
 - ▶ Sei $A = (A_B \mid A_N)$, wobei A_B aus den ersten m Spalten besteht. A_B heißt dann eine **Basismatrix** von Matrix A .
 - ▶ Daraus ergibt sich:
 - ▶ $c = \begin{pmatrix} c_B \\ c_N \end{pmatrix}$
- und
- ▶ $x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}$.

Die Variablen $x_i, i \in B$ nennt man **Basisvariablen** (kurz: BV)
und die Variablen $x_j, j \in N - B$ **Nichtbasisvariablen** (kurz: NBV).

B und N werden gleichzeitig auch als Bezeichnungen für Indexmengen (Nummer von Spalten in der Matrix A) verwendet: B steht für die Indexmenge von m linear unabhängigen Spalten aus A , die die Matrix A_B bilden. N bezeichnet die Indexmenge der restlichen Spalten. Somit, falls A_B aus den ersten m Spalten besteht, dann ist $B = \{1, \dots, m\}$ und $N = \{m + 1, \dots, n\}$.

Grundbegriffe der Linearen Optimierung

Betrachten wir die LOA $\max\{\langle c, x \rangle \mid A \cdot x = b, x \geq 0\}$.

Definition 1.6 ((zulässiger) Basispunkt).

Der Punkt $x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_B \\ 0_{n-m} \end{pmatrix}$ mit $A \cdot x = b$ heißt **Basispunkt** von A zur Basismatrix A_B .

Wenn zusätzlich gilt, dass $x_B \geq 0_m$, dann heißt der Punkt x ein **zulässiger Basispunkt** von A zur Basismatrix A_B .

Bemerkung 1.3.

Ein zulässiger Basispunkt gehört zum Restriktionsbereich der betrachteten LOA.

0 bezeichnet hier ein Nullvektor entspr. Dimension, die manchmal als Index noch angegeben wird.

Simplexalgorithmus

Wir betrachten erneut die LOA $(P) \max\{\langle c, x \rangle \mid A \cdot x = b, x \geq 0\}$.

Für den Restriktionsbereich gilt:

$$\begin{aligned} A \cdot x &= b && \text{gdw} \\ (A_B \mid A_N) \cdot \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} &= b && \text{gdw} \\ A_B \cdot x_B + A_N \cdot x_N &= b. && \end{aligned} \tag{S1}$$

Simplexalgorithmus

Damit ergeben sich für das LOP (P) folgende drei Schreibformen:

$$(P) = \max\{\langle c, x \rangle \mid A \cdot x = b, x \geq 0\} \quad (A)$$

$$= \max\{c_B^T \cdot A_B^{-1} \cdot b - (c_B^T \cdot A_B^{-1} \cdot A_N - c_N^T) \cdot x_N \mid (x_B =) A_B^{-1} \cdot b - A_B^{-1} \cdot A_N \cdot x_N \geq 0, x_N \geq 0\} \quad (B)$$

$$= \max\{d_{00} - \sum_{j \in N} d_{0j} \cdot x_j \mid (x_k =) d_{k0} - \sum_{j \notin B} d_{kj} \cdot x_j \quad \forall k \in B, x_j \geq 0 \quad \forall j \in N\}. \quad (C)$$

Aus (C) läßt sich das erste Simplextableau aufstellen:

Simplexalgorithmus

Definition 1.7 (1. Simplextableau:).

			NBV (N)					
			x_{m+1}	$\dots$	x_j	$\dots$	x_n	
charakteristische Zeile			$d_{0,0}$	$d_{0,m+1}$	$\dots$	$d_{0,j}$	$\dots$	$d_{0,n}$
BV (B)	x_1	$d_{1,0}$	$d_{1,m+1}$	$\dots$	$d_{1,j}$	$\dots$	$d_{1,n}$	
	x_2	$d_{2,0}$	$d_{2,m+1}$	$\dots$	$d_{2,j}$	$\dots$	$d_{2,n}$	
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	
	x_i	$d_{i,0}$	$d_{i,m+1}$	$\dots$	$d_{i,j}$	$\dots$	$d_{i,n}$	
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	
	x_m	$d_{m,0}$	$d_{m,m+1}$	$\dots$	$d_{m,j}$	$\dots$	$d_{m,n}$	
		$\underbrace{A_B^{-1} \cdot b}$	$\underbrace{A_B^{-1} \cdot A_N}$					

Wenn $A_B = E_m$, so ist dann $A_B^{-1} = E_m$, $A_B^{-1} \cdot b = b$ und $A_B^{-1} \cdot A_N = A_N$.

Simplexalgorithmus

Fragen:

1. Was mache ich, wenn nicht alle Variablen nichtnegativ sind?

Transformation

2. Wie erhalte ich aus einem Ungleichungssystem ein Gleichungssystem?

Transformation

3. Wie finde ich leicht einen zulässigen Basispunkt?

Ein Hilfsproblem lösen

Simplexalgorithmus

ad (1): Sei x_i eine beliebige Variable, d.h. $x_i \in \mathbb{R}$.

Dann definieren wir $x_i := x_i^+ - x_i^-$, wobei $x_i^+ \geq 0$ und $x_i^- \geq 0$.

Das ist offenbar immer möglich!

Beispiel: $7 = 8 - 1$
 $ = 17 - 10,$
 $-5 = 3 - 8$
 $ = 0 - 5, \text{ etc.}$

Diese **Transformation** ist sehr einfach (linear). Sie erhöht aber die Dimension des betrachteten VRs.

Simplexalgorithmus

ad (2): Falls eine der Restriktionen, z.B. i -te, bei der Modellierung des Problems mit einer Ungleichung gegeben ist, etwa:

$$(A) \quad a_{i,1} \cdot x_1 + \cdots + a_{i,n} \cdot x_n \leq b_i \quad \text{bzw.}$$

$$(B) \quad a_{i,1} \cdot x_1 + \cdots + a_{i,n} \cdot x_n \geq b_i,$$

wobei o.B.d.A. $b_i \geq 0$,

dann transformieren wir die Ungleichung durch **Schlupfvariablen**, hier mit u_i bezeichnet, zur **einer Gleichung**:

$$(A') \quad a_{i,1} \cdot x_1 + \cdots + a_{i,n} \cdot x_n + u_i = b_i, \quad u_i \geq 0 \quad \text{bzw.}$$

$$(B') \quad a_{i,1} \cdot x_1 + \cdots + a_{i,n} \cdot x_n - u_i = b_i, \quad u_i \geq 0.$$

Auch diese **Transformation** ist sehr einfach (linear). Auch sie erhöht aber die Dimension des betrachteten VRs.

ad (3): Wird später behandelt.

Simplexalgorithmus

Frage: Wie kann ich feststellen, ob ein Punkt optimal ist?

Antwort:

Satz 1.8.

Wenn $d_{0j} \geq 0$ für alle $j \in N$, so ist dann der Punkt

$\bar{x} = \begin{pmatrix} (d_{i0})_{i=1 \dots m} \\ 0_{n-m} \end{pmatrix}$ optimal für die LOA.

Bemerkung 1.4.

Offensichtlich ist der Punkt $\bar{x}$ ein zulässiger Basispunkt.

Simplexalgorithmus

Frage: Wenn ein betrachteter Punkt nicht optimal ist, wie finde ich einen besseren?

Antwort:

Satz 1.9.

Wenn ein $\ell \in N$ mit $d_{0\ell} < 0$ existiert, so kann durch eine Basiswechsel der Wert der Zielfunktion erhöht* werden.*

Simplexalgorithmus

		NBV						
		x_{m+1}	...	x_ℓ	...	x_j	...	x_n
BV		$d_{0,0}$	$d_{0,m+1}$...	$d_{0,\ell}$	...	$d_{0,j}$	...	$d_{0,m}$
	x_1	$d_{1,0}$	$d_{1,m+1}$...	$d_{1,\ell}$	...	$d_{1,j}$	...	$d_{1,m}$
	x_2	$d_{2,0}$	$d_{2,m+1}$...	$d_{2,\ell}$	...	$d_{2,j}$	...	$d_{2,m}$
	.	.	.	.	.	.	.	.
	.	.	.	.	.	.	.	.
	.	.	.	.	.	.	.	.
	x_k	$d_{k,0}$	$d_{k,m+1}$...	$d_{k,\ell}$	...	$d_{k,j}$	...	$d_{k,m}$ ← Pivotzeile
	.	.	.	.	.	.	.	.
	.	.	.	.	.	.	.	.
	x_i	$d_{i,0}$	$d_{i,m+1}$...	$d_{i,\ell}$	...	$d_{i,j}$	...	$d_{i,m}$
	.	.	.	.	.	.	.	.
	.	.	.	.	.	.	.	.
	x_m	$d_{m,0}$	$d_{m,m+1}$...	$d_{m,\ell}$	...	$d_{m,j}$	...	$d_{m,m}$

↑
Pivotspalte

$d_{k,\ell}$ heißt **Pivot**-Element

Berechnung des nachfolgenden Tableaus

Es bleibt noch anzugeben, wie die zur neuen Basis $\tilde{B}$ gehörenden $\tilde{d}_{ij}$ aussehen, d.h. wie das neue Simplextableau aus dem alten zu berechnen ist.

- $\tilde{d}_{\ell 0}$, $\tilde{d}_{\ell k}$, $\tilde{d}_{\ell j}$ sind die Elemente der ℓ -ten Zeile in dem neuen Simplextableau, d.h. die (alte) Pivotzeile sieht wie folgt aus:

$$\tilde{d}_{\ell k} = \frac{1}{d_{k\ell}}, \quad \tilde{d}_{\ell j} = \frac{d_{kj}}{d_{k\ell}}.$$

- $\tilde{d}_{0k}$, $\tilde{d}_{\ell k}$, $\tilde{d}_{ik}$ sind die Elemente der k -ten Spalte in dem neuen Simplextableau, d.h. die (alte) Pivotspalte sieht wie folgt aus:

$$\tilde{d}_{\ell k} = \frac{1}{d_{k\ell}}, \quad \tilde{d}_{ik} = -\frac{d_{i\ell}}{d_{k\ell}}.$$

- Restliche Elemente $\tilde{d}_{ij}$ werden nach der Kreuzregel berechnet:

$$\tilde{d}_{ij} = d_{ij} - \frac{d_{i\ell} d_{kj}}{d_{k\ell}}.$$

Simplexalgorithmus

Fragen:

- ▶ Kann ich bei der Berechnung eines besseren Punktes in einen Zyklus geraten?

Antworten:

Ja, aber...

nicht, wenn

man die lexikographische Simplexmethode verwendet.

- ▶ Kann ich in endlich vielen Schritten einen optimalen Punkt finden?

Ja, weil ...

Simplexalgorithmus (lexikographische Simplexmethode)

Definition 1.10.

Ein Basispunkt heißt **entartet**, wenn der Wert mindestens einer Basisvariable Null ist.

			NBV
			x_ℓ
			$d_{0\ell}$
BV	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	x_k	$0 = d_{k0}$	$d_{k\ell}$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Neuer Wert der Zielfunktion bei einem Wechsel $B \rightarrow \tilde{B} = (B \setminus \{k\}) \cup \{\ell\}$ ist

$$d_{00} - d_{0\ell} \overbrace{\frac{d_{k0}}{d_{k\ell}}}^{=0} = d_{00}.$$

Wenn das Element $d_{k\ell}$ das Pivotelement werden sollte, wird sich der Zielfunktionswert nicht ändern!

Daher müssen wir uns in diesem Fall mit der Frage der Endlichkeit des Algorithmus beschäftigen, denn es kann ja sein, daß wir in einen Zyklus geraten, wie das letzte Beispiel auch zeigte.

Simplexalgorithmus (lexikographische Simplexmethode)

Betrachten wir in diesem Fall die Lange Form des Simplextableaus:

		BV					NBV					
			x_1	$\dots$	x_p	$\dots$	x_m	x_{m+1}	$\dots$	x_q	$\dots$	x_n
		$d_{0,0}$	0	$\dots$	0	$\dots$	0	$d_{0,m+1}$	$\dots$	$d_{0,q}$	$\dots$	$d_{0,m}$
BV	x_1	$d_{1,0}$	1	$\dots$	0	$\dots$	0	$d_{1,m+1}$	$\dots$	$d_{1,q}$	$\dots$	$d_{1,m}$
	x_2	$d_{2,0}$	0	$\dots$	0	$\dots$	0	$d_{2,m+1}$	$\dots$	$d_{2,q}$	$\dots$	$d_{2,m}$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	
	x_p	$d_{p,0}$	0	$\dots$	1	$\dots$	0	$d_{p,m+1}$	$\dots$	$d_{p,q}$	$\dots$	$d_{p,m}$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
	x_m	$d_{m,0}$	0	$\dots$	0	$\dots$	1	$d_{m,m+1}$	$\dots$	$d_{m,q}$	$\dots$	$d_{m,m}$

Simplexalgorithmus (lexikographische Simplexmethode)

Lexikographische Simplexmethode :

Wir definieren eine neue Regel für die Auswahl der Pivotzeile:

- ▶ Spalte ℓ legt fest (durch $d_{0\ell} < 0$).
- ▶ Wir betrachten $i \in B$ mit $d_{i\ell} > 0$ (Menge B_+) und bilden $\frac{z_i}{d_{i\ell}} = z'_i$.
- ▶ Offensichtlich unterscheiden sich die Zeilen z'_i und z'_v ($z'_i \neq z'_v$ für $i \neq v$, $i, v \in B$, weil die Zeilen z_i und z_v unterschiedlich sind, denn es gilt: $d_{ii} = z_{ii} = 1$ und $d_{vi} = z_{vi} = 0$).
- ▶ Unter den Zeilen z'_i gibt es folglich genau eine kleinste nach der lexikographischen Ordnung, diese sei z_k .
Damit wird die k -te Zeile Pivotzeile, d.h.
 z'_k ist das lexikographische Minimum von den z'_i , $i \in B_+$:
 $z'_k = \text{lex_min}\{z'_i \mid i \in B_+\}.$

Simplexalgorithmus (lexikographische Simplexmethode)

Deshalb funktioniert es ...

Satz 1.11.

Seien alle Zeilen z_i ($i \in B$) in der erweiterten Form eines (beliebigen) Simplextableaus lexikographisch positiv.

Dann sind nach der Simplextransformation alle Zeilen $\tilde{z}_i$, $i \in \tilde{B}$ ebenfalls lexikographisch positiv.

Bemerkung 1.5.

Offensichtlich kann man den Simplexalgorithmus immer mit einem lexikographisch positives Simplextableau starten.

Satz 1.12.

Die charakteristische Zeile im langen Tableau wächst lexikographisch.

Simplexalgorithmus

Was wir bis jetzt wissen:

Satz 1.13.

*Ist der Restriktionsbereich einer linearen Optimierungsaufgabe **nicht leer**, so kann nur einer der beiden folgenden Fälle eintreten:*

- 1. Entweder existiert eine Lösung der Aufgabe,*
- 2. oder die LOA ist unlösbar, weil die Zielfunktion unbeschränkt wächst (bei Maximierung) bzw. unbeschränkt fällt (bei Minimierung).*

*Beide Fälle werden durch den lexikographischen Simplexalgorithmus erkannt, sofern man **einen zulässigen Basispunkt kennt** und werden in endlich viel Schritten mit Hilfe des (lexikographischen) Simplexalgorithmus entschieden.*

Simplexalgorithmus

Wie findet man einen zulässigen Basispunkt? bzw.

Wie erkennt man, dass der Restriktionsbereich $M = \emptyset$ ist?



Mit der Hilfsaufgabe!

Simplexalgorithmus (Die Hilfsaufgabe)

Sei $x, c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$, $b \geq 0$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und

$$(P) \max\{\langle c, x \rangle \mid A \cdot x = b, x \geq 0\} \text{ eine LOA.}$$

Dann nennt man die LOA

$$(H_P) \min\left\{\sum_{i=1}^m y_i \mid Ax + E_m y = b, x \geq 0, y \geq 0\right\}$$

die zu (P) gehörige Hilfsaufgabe.

Zusammenfassung

Für jede LOA $(P) \max\{\langle c, x \rangle \mid A \cdot x = b, x \geq 0\}$ gilt:

- ▶ (eventuell mittels Hilfsaufgabe)
 - ▶ kann man **leicht** einen Start-Basispunkt finden oder
 - ▶ man stellt fest, dass der Restriktionsbereich der LOA leer ist.
- ▶ Ist der Restriktionsbereich nicht leer, so kann nur einer der beiden Fälle eintreten:
 - ▶ entweder existiert eine Lösung der Aufgabe, oder
 - ▶ oder die LOA ist unlösbar, weil die Zielfunktion wächst unbeschränkt (bei Maximierung) bzw. fällt unbeschränkt bei Minimierung.

Alle Fälle werden in endlich viel Schritten mit Hilfe des (lexikographischen) Simplexalgorithmus entschieden (worste-case: in exponentiell - zu der Dimension der Aufgabe - vielen Schritten).

Definition 1.14.

Betrachten wir die LOA

$$(P) \quad \max\{\langle c, x \rangle \mid A \cdot x \leq b, x \geq 0\}.$$

Die LOA

$$(D) \quad \min\{\langle b, y \rangle \mid A^T \cdot y \geq c, y \geq 0\}$$

heißt die zu (P) *duale Aufgabe*.

Bemerkung 1.6.

Sei (P) eine LOA in Gleichungsform, d.h.

$$(P) \quad \max\{\langle c, x \rangle \mid A \cdot x = b, x \geq 0\}.$$

Dann ist die zu (P) duale Aufgabe die LOA (D) mit

$$(D) \quad \min\{\langle b, u \rangle \mid A^T \cdot u \geq c\}.$$

Satz 1.15 (Dualitätssatz der linearen Optimierung).

Es seien

$(P): \max\{\langle c, x \rangle \mid A \cdot x \leq b, x \geq 0\}$ und

$(D): \min\{\langle b, y \rangle \mid A^T \cdot y \geq c, y \geq 0\}$ mit

$c, x \in \mathbb{R}^n, b, y \in \mathbb{R}^m, A \in \mathbb{R}^{m \times n}.$

Dann gilt:

(P) ist lösbar genau dann, wenn (D) lösbar ist. Im Falle der Lösbarkeit sind die Extremalwerte gleich.

Duale Simplexmethode

Betrachten wir ein erstes Simplextableau:

		x_N
	d_{00}	d_{0N}
x_B	d_{B0}	d_{BN}

Simplexmethode:

Start: $d_{B0} \geq 0$, d_{0N} - beliebig.

Ziel: $d_{0N} \geq 0$ zu konstruieren unter Beibehaltung $d_{B0} \geq 0$.

Duale Simplexmethode:

Start: $d_{0N} \geq 0$, d_{B0} - beliebig.

Ziel: $d_{B0} \geq 0$ zu konstruieren unter Beibehaltung $d_{0N} \geq 0$.

Ganzzahlige Optimierung

Definition 1.16 (ILP/MILP).

Sei $c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Das Problem

$$(P) \quad \max \{ \langle c, x \rangle \mid A \cdot x = b, x \geq 0 \},$$

wobei $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{Z}$, $x_{k+1}, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ heißt

- ▶ ein *ganzzahliges Optimierungsproblem* (kurz: *ILP*), wenn $k = n$ und
- ▶ ein *gemischt-ganzzahliges Optimierungsproblem* (kurz: *MILP*), wenn $1 \leq k \leq n - 1$ und
- ▶ ein *LOP*, wenn $k = 0$ (wie bereits definiert).

Wir betrachten hier, o.B.d.A., das ILP.

Gomory-Schnitte

Wir betrachten ILP's mit $A \in \mathbb{Q}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{Q}^m$!

Ableitung der Gomory-Schnitte:
Betrachte das ILP

$$(P) = \max\{c^T \cdot x \mid Ax = b, x \geq 0, x \in \mathbb{Z}^n\}$$

sowie die Relaxation

$$(P_0) = \max\{c^T \cdot x \mid Ax = b, x \geq 0.\}$$

Gomory-Schnitte

Sei $Ax = b$ äquivalent zu

$$x_i + \sum_{j \in \mathbb{N}} \bar{a}_{ij} \cdot x_j = \bar{b}_i \quad \forall i \in B \quad \forall x \in M_0$$

mit

$$x_i^* = \bar{b}_i, \quad i \in B, \quad x_j^* = 0, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Sei für $k \in B$ der Wert $x^* \notin \mathbb{Z}$. Dann nennt man

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} (\bar{a}_{kj} - \lfloor \bar{a}_{kj} \rfloor) \cdot x_j \geq \bar{b}_k - \lfloor \bar{b}_k \rfloor$$

Gomory-Schnitt für x_i .

Differentialgleichungen

Eine Gleichung, in der eine Variable x und eine gesuchte Funktion $y = y(x)$, sowie deren Ableitungen $y'(x)$, $\dots$ $y^{(n)}(x)$ bis zur Ordnung n vorkommen, heißt *gewöhnliche Differentialgleichung n -ter Ordnung*. Formal:

Differentialgleichungen

Definition 2.1.

- ▶ Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $D_F \subseteq \mathbb{R}^{n+2}$, $n \geq 1$, bzw. $D_G \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$.
Eine *gewöhnliche Differentialgleichung n -ter Ordnung* (kurz: *DGL*) ist eine Gleichung für eine gesuchte Funktion $y(x)$ der Form

$$F(x, y, y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0 \quad (\text{implizite Form}),$$

bzw.

$$y^{(n)}(x) = G(x, y, y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) \quad (\text{explizite Form}),$$

wobei $F : D_F \rightarrow \mathbb{R}$, bzw. $G : D_G \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen sind.

- ▶ Wenn für ein $x_0 \in \text{Def}(y)$ gelten muss, dass

$$y_0 = y(x_0), y' = y'(x_0), \dots, y_0^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}(x_0),$$

so nennt man diese n Gleichungen *Anfangsbedingungen*.

- ▶ Eine Differentialgleichung mit ihren Anfangsbedingungen nennt man *Anfangswertproblem*.

Anstatt $y(x)$ bzw. $y^{(i)}(x)$ schreiben wir oft nur y bzw. $y^{(i)}$.

Differentialgleichungen

Die Lösung einer DGL n -ter Ordnung nennt man *allgemein*, falls sie n unabhängige Parameter enthält.

Die Lösung nennt man *vollständig*, falls durch die Parameter alle mögliche Lösungen erfasst werden.

Die Lösung nennt man *speziell* oder *partikulär*, falls sie keine Parameter enthält.

Differentialgleichungen 1.Ordnung

Definition 2.2 (separabel).

Eine Differentialgleichung $F(x, y, y') = 0$ erster Ordnung heißt *separabel* oder *trennbar*, wenn es zwei stetige Funktionen f und g mit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, so dass sie sich in der Form

$$y' = f(x) \cdot g(y)$$

darstellen lässt.

Differentialgleichungen 1.Ordnung

Satz 2.1.

Das Anfangwertproblem $y' = f(x) \cdot g(y)$, mit den Funktionen $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ und dem Anfangswert $y(x_0) = y_0 \in J$, $g \neq 0$ auf J , hat eine eindeutige Lösung y und es gilt:

$$y(x) = G^{-1}(F(x)),$$

wobei $G(y)$ bzw. $F(x)$ die Stammfunktion von $\frac{1}{g(y)}$ bzw. von $f(x)$ ist. Man erhält die Lösung, in dem man die Gleichung

$$\int_{y_0}^y \frac{1}{g(y)} dy = \int_{x_0}^x f(x) dx.$$

nach y auflöst.

Differentialgleichungen 1.Ordnung

Definition 2.3 (Lineare DGL 1. Ordnung).

Eine DGL der Form

$$y' + a(x) \cdot y = f(x)$$

nennt man *linear*. Dabei sind a und f auf einem Intervall I stetige Funktionen.

Die Funktion $f(x)$ heißt *Störfunktion*.

- ▶ Wenn $f(x) \equiv 0$, so heißt die DGL *homogen*,
- ▶ anderenfalls heißt sie *inhomogen*

Differentialgleichungen 1.Ordnung

Satz 2.2.

Die lineare DGL

$$y' + a(x) \cdot y = f(x)$$

mit $a : I \rightarrow \mathbb{R}$ und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen besitzt, die vollständige Lösung,

- 1. falls die DGL homogen ist:*

$$y(x) = c_1 \cdot e^{-A(x)},$$

- 2. falls die DGL inhomogen ist:*

$$y(x) = \left(\int f(x) \cdot e^{A(x)} dx + c \right) e^{-A(x)},$$

wobei $c_1, c \in \mathbb{R}$ und $A(x)$ eine Stammfunktion von $a(x)$ ist.

Differentialgleichungen 1.Ordnung

Bemerkung 2.3.

Ein AWP

$$y' + a(x) \cdot y = f(x) \quad (*)$$

mit $a : I \rightarrow \mathbb{R}$ und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen und $x_0 \in I$ kann gelöst werden, in dem zuerst die allgemeine Lösung der DGL () berechnet und in dieser Lösung die Werte x_0 und y_0 entsprechend einsetzt.*

Differentialgleichungen 2.Ordnung

Sei $y'' = f(x, y, y')$

eine Differentialgleichung 2.Ordnung, bzw. zusammen mit

$$y(x_0) = y_0 \text{ und } y'(x_0) = y'_0$$

ein Anfangswertproblem.

Wir betrachten hier 2 Fälle:

Differentialgleichungen 2.Ordnung

1.Fall: $y'' = f(x)$.

Die vollständige Lösung erhalten nach 2 mal integrieren.

2.Fall: $y'' = f(x, y')$.

Die vollständige Lösung erhalten mittels

- ▶ der Substitution $z(x) = y'(x)$.
- ▶ Dann erhalten wir aus der gegebenen DGL 2. Ordnung die Gleichung $z' = f(x, z)$, die eine DGL 1. Ordnung ist. Wenn wir diese lösen können, erhalten wir z mit $z(x_0) = y'_0$.
- ▶ y berechnen wir durch Integrieren von z .

ANHANG

Definition 3.1 (Verknüpfung).

Seien M_1, M_2, M_3 drei nichtleere Mengen.

- ▶ Eine *Verknüpfung* $\circ$ von $M_1 \times M_2$ in M_3 ist eine Abbildung von $M_1 \times M_2$ in M_3 , d.h.

$$\circ : M_1 \times M_2 \rightarrow M_3.$$

- ▶ Falls $M_1 = M_2 = M_3 =: M$ ist, dann nennt man die Verknüpfung $\circ$ *abgeschlossen* bzw. eine Verknüpfung auf M .
- ▶ Wir nennen $(M, \circ)$ eine algebraische Struktur, falls $\circ$ abgeschlossen auf M ist.

Definition 3.2 (Halbgruppe).

Eine algebraische Struktur $(M, \circ)$ heißt *Halbgruppe*, falls die Veknüpfung $\circ$ assoziativ ist, d.h.

$$\text{für alle } a, b \text{ und } c \text{ gilt: } a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c.$$

Beispiele für Halbgruppen

- ▶ $(\mathbb{N}, +)$
- ▶ $(\mathbb{N}, \cdot)$
- ▶ $(\mathbb{Z}, +)$
- ▶ $(\mathbb{Z}, \cdot)$
- ▶ $(\mathbb{R}, +)$
- ▶ $(\mathbb{R}, \cdot)$
- ▶ Sei $M := \{0, 1, 2, 3, 4\}$ und sei $\circ$ wie folgt definiert:

$\circ$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

Definitionen

Definition 3.3 (neutrales Element).

Sei $(M, \circ)$ eine algebraische Struktur und $e \in M$. Das Element e heißt ein *neutrales Element*, falls gilt:

$$e \circ a = a \circ e = a \text{ für alle } a \in M.$$

Definition 3.4 (inverses Element).

Sei $(M, \circ)$ eine algebraische Struktur mit einem neutralen Element e und sei $a \in M$. Das Element $b \in M$ heißt ein *inverses Element* von a , falls gilt:

$$a \circ b = b \circ a = e.$$

Bemerkung 3.1.

- ▶ *Das neutrale Element einer algebraischen Struktur ist eindeutig bestimmt.*
- ▶ *Das inverse Element eines Elements in einer algebraischen Struktur ist eindeutig bestimmt.*

Definitionen

Definition 3.5 (Monoid).

Die algebraische Struktur $(M, \circ)$ heißt ein *Monoid*, falls gilt:

- ▶ $(M, \circ)$ ist eine Halbgruppe und
- ▶ $(M, \circ)$ hat ein neutrales Element.

Definition 3.6 (Gruppe).

Die algebraische Struktur $(M, \circ)$ heißt ein *Gruppe*, falls gilt:

- ▶ $(M, \circ)$ ist ein Monoid und
- ▶ jedes Element a von M besitzt ein inverses Element bzgl. $\circ$ in M .

Beispiele für Halbgruppen

- ▶ $(\mathbb{N}, +)$
- ▶ $(\mathbb{N}, \cdot)$
- ▶ $(\mathbb{Z}, +)$
- ▶ $(\mathbb{Z}, \cdot)$
- ▶ $(\mathbb{R}, +)$
- ▶ $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$
- ▶ Sei $M := \{0, 1, 2, 3, 4\}$ und sei $\circ$ wie folgt definiert:

$\circ$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

Definitionen

Definition 3.7 (kommutativ).

Eine algebraische Struktur $(M, \circ)$ heißt *kommutativ*, falls gilt:

$$a \circ b = b \circ a \text{ für alle } a, b \in M.$$

Bemerkung 3.2.

*Kommutative Halbgruppen und Gruppen nennt man auch **abelsch**.*

Beispiel für eine nicht-kommutative Halbgruppe

- Sei $M := \{0, 1, 2\}$ und sei $\circ$ wie folgt definiert:

$\circ$	0	1	2
0	0	0	0
1	1	1	1
2	2	2	2

Dabei sei die Verknüpfung $\circ$ von $M \times M$.

Es gilt z.B.: $2 \circ 1 = 2 \neq 1 = 1 \circ 2$.

Definition 3.8 (Verband).

Die Struktur $(M, \circ, \bullet)$ heißt ein Verband, falls gilt:

- ▶ $(M, \circ)$ und $(M, \bullet)$ sind abelsche Halbgruppen,
- ▶ für $\circ$ und $\bullet$ gelten die Absorptionsgesetze, d.h. für alle drei Elementea, b und c aus M gilt:

$$a \circ (b \bullet a) = a \text{ und } a \bullet (b \circ a) = a.$$

Beispiel

1. $(\mathbb{N}^+, ggT, kgV)$ ist ein Verband.
2. Sei A eine beliebige Menge und $\wp(A)$ ihre Potenzmenge.
Dann ist $(\wp(A), \cup, \cap)$ ein Verband.

Definitionen

Definition 3.9 (Ring).

Die Struktur $(M, \circ, \bullet)$ heißt ein Ring, falls gilt:

- ▶ $(M, \circ)$ ist eine abelsche Gruppe,
- ▶ $(M, \bullet)$ ist eine Halbgruppe,
- ▶ für $\circ$ und $\bullet$ gilt die Distributivität, d.h. für alle drei Elemente a, b und c aus M gilt:

$$(a \circ b) \bullet c = (a \bullet c) \circ (b \bullet c)$$

und $a \bullet (b \circ c) = (a \bullet b) \circ (a \bullet c).$

Bemerkung 3.3.

Falls die Verknüpfung $\bullet$ in dem Ring $(M, \circ, \bullet)$ kommutativ ist, so nennt man den Ring kommutativ.

Definition 3.10 (Körper).

Die Struktur $(M, \circ, \bullet)$ heißt ein Körper, falls gilt:

- ▶ $(M, \circ)$ ist eine abelsche Gruppe mit e_1 als Neutralelement,
- ▶ $(M \setminus \{e_1\}, \bullet)$ ist eine abelsche Gruppe mit Neutralelement e_2 ,
- ▶ für $\circ$ und $\bullet$ gilt die Distributivität, d.h. für alle drei Elemente a, b und c aus M gilt:

$$(a \circ b) \bullet c = (a \bullet c) \circ (b \bullet c)$$

und

$$a \bullet (b \circ c) = (a \bullet b) \circ (a \bullet c).$$

Beispiele

- ▶ Ring:
 - ▶ $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, kommutativ
 - ▶ $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, kommutativ
 - ▶ $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, kommutativ
 - ▶ $(M, +, \cdot)$, nicht-kommutativ, wobei $M := \{A \mid A \in \mathbb{R}(n, n)\}$ die Menge alle quadratischen Matrizen mit n Zeilen/Spalten und reellen Zahlen als Elemente ist.
- ▶ kein Ring
 - ▶ $(\mathbb{N}, +, \cdot)$

Beispiele

- ▶ Körper:



- ▶ $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$

- ▶ $(\mathbb{R}, +, \cdot)$



- ▶ kein Körper

- ▶ $(\mathbb{N}, +, \cdot)$

- ▶ $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$

- ▶ $(M, +, \cdot)$

Bemerkung 3.4.

- ▶ Für Ringe und Körper bezeichnet man oft die erste Verknüpfung mit $+$ (anstatt $\circ$) und die zweite Verknüpfung mit $\cdot$ (anstatt $\bullet$).
- ▶ Das Neutralelement e_1 wird auch **Nullelement** des Rings/Körpers genannt und wird oft mit **0** bezeichnet.
- ▶ Das Neutralelement e_2 wird auch **Einselement** des Körpers genannt und wird oft mit **1** bezeichnet.
- ▶ Das inverse Element eines Elements a bzgl. $+$ bezeichnet man auch mit $-a$.
- ▶ Das inverse Element eines Elements a bzgl. $\cdot$ bezeichnet man auch mit a^{-1} .

Definition 3.11 (Vektorraum).

Sei $(K, +_K, \cdot_K)$ ein Körper mit $\mathbf{0}_K$ als Nullelement und $\mathbf{1}_K$ als Einselement. Die Struktur $(V, \oplus, \diamond)$ heißt ein Vektorraum über dem Körper K , falls gilt:

- ▶ $(V, \oplus)$ ist eine abelsche Gruppe mit $\mathbf{0}_V$ als neutrales Element,
- ▶ $\diamond$ ist eine Verknüpfung von $K \times V$ in V , d.h. $\diamond : K \times V \rightarrow V$ für die gilt:
 - ▶ $\mathbf{1}_K \diamond v = v$ für jedes Element $v \in V$,
 - ▶ $(m +_K n) \diamond v = (m \diamond v) \oplus (n \diamond v)$ für alle $m, n \in K, v \in V$,
 - ▶ $(m \cdot_K n) \diamond v = m \diamond (n \diamond v)$ für alle $m, n \in K, v \in V$, und
 - ▶ $m \diamond (w \oplus v) = (m \diamond v) \oplus (m \diamond w)$ für alle $m \in K, w, v \in V$.

Beispiele

Sei $n \in \mathbb{N}^+$.

- ▶ $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ ist ein VR über dem Körper $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.
- ▶ $(K^n, +_K, \cdot_K)$ ist ein VR über dem Körper $(K, +_K, \cdot_K)$,
komponentenweise für $n \geq 2$ verknüpfen.
- ▶ Sei $(V, \oplus, \diamond)$ ein beliebiger VR über dem Körper $(K, +_K, \cdot_K)$
und $D \neq \emptyset$ eine beliebige nichtleere Menge.

Sei $V^D := \{f \mid f : D \rightarrow V\}$ und

- ▶ für alle $f, g \in V^D$ sei $(f + g)(x) := f(x) \oplus g(x)$ für jedes
 $x \in D$ und
- ▶ $(k \cdot f)(x) := k \diamond f(x)$ für alle $x \in D$.

Dann ist $(V^D, +, \cdot)$ ein VR über dem Körper $(K, +_K, \cdot_K)$,
 $(V^D, +, \cdot)$ heißt auch Funktionenraum.

