Zerlegbare Unterräume

Wir befassen uns mit Homomorphismen in V.
Sei U invarianter Unterraum von V bezüglich f mit der Basis B1 und sei B Basis von V und sei B2 so gewählt, daß die Basen B1 und B2 sich zu B ergänzen. Gilt nun, dass f(B1) Teilmenge von L(B1) *und* f(B2) Teilmenge von L(B2) ist, so sind sowohl U1 als auch U2 invariante Unterraeume von V und es gilt:

$V = U_1 \oplus U_2$

Definition: Der Vektorraum V heißt (bezüglich f) zerlegbar, wenn invariante U_1, U_2 von V existieren, so daß $V = U_1 \oplus U_2$ ist, anderenfalls heißt V unzerlegbar.

Satz: Es gibt unzerlegbare invariante Unterraeume U1,...,Ur mit: V ist die direkte Summe aller U1,...,Ur.

Beweis: Wenn V unzerlegbar, so folgt r=1, U1 = V
sonst: V = U1 (+) U2 ("(+)" sei die direkte Summe) und dann zerlegen wir U1 & U2 solange bis keine Zerlegung mehr möglich ist. Nach endlich vielen Schritten wird man also alle unzerlegbare invariante Unterräume von V finden.

Satz: Sei f ein Endomorphismus und V unzerlegbar, dann ist U=Im(f) ein unzerlegbarer invarianter Unterraum.

Beweis: Die Invarianz läßt sich wiefolgt nachweisen:

$$f(U) = f(f(V)) \subseteq f(V) = U.$$

Indirekter Beweis:
Sei U in U1 und U2 zerlegbar, dann können wir eine Basis für U derart angeben, daß B1={b1,...,bk} auch Basis von U1 und B2={b(k+1),...,bn} Basis von U2 sind.
Nun gilt
f^(-1)(U1)=V1(+)Ker(f) und
f^(-1)(U2)=V2(+)Ker(f).
Nun kann man sich überlegen, daß V1 und V2 invariant sein müßten was jedoch der Unzerlegbarkeit von V wiederspäche.

Beispiel:

Sei B=$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ die Basis und

$$A_{BB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

der Operator (die Darstellungsmatrix) zu einem Homomorphismus in V=R^3.

Damit existieren die folgenden invarianten Unterräume:

$U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ und $U_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ und $U_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Leicht läßt sich nun anhand der Basen erkennen, daß U_1 und U_2 eine Zerlegung von V bilden.

$$V = U_1 \oplus U_2$$

Eigenschaften:

- Es gelte $f : V \to V$ und V unzerlegbar, dann ist U = Imf(f) ein unzerlegbarer invarianter Unterraum.

  (Beweisidee: Invarianz von U ist klar:
  $f(U) = f(f(U)) \in Imf(f) = U$

  Man nehme an U wäre zerlegbar:

  $U = U_1 \oplus U_2$

  Beweisen nun das daraus folgen würde, daß V zerlegbar sein müßte.
  Das steht jedoch im Widerspruch zur Voraussetzung.
  Q.E.D. (vollständiger Beweis siehe Kapitel 12 "*Normalformen von Matrizen*"))

- Ein Vektorraum V mit endlicher Basis läßt sich in eine endliche Zahl **m** unzerlegbarer invarianter Unterräume zerlegen.
  Sodaß gilt: $V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_m$

  (Beweis: wenn V unzerlegbar $\Rightarrow m = 1, U_1 = V$,
  sonst: $V = U_1 \oplus U_2$ und zerlegen dann $U_1 \& U_2$, solange
  bis keine Zerlegung mehr möglich)

Hier diese Seite als PS-Datei.

Fragen oder Ergänzungswünsche bzw. Vorschläge an < *baresel@informatik.hu-berlin.de* > oder an der Tutor unter *proksch@informatik.hu-berlin.de*
Erstellt am < 28.02.95 > , zuletzt geändert am < 18.04.95 >