Invariante Unteräume

Wir betrachten die Funktion $f(x) : V \mapsto V$ bzw. den Operator
($die \rightarrow Darstellungsmatrix \leftarrow$).

Definition: Der *Unterraum* $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{V}$ des Vektorraumes $\mathbf{V}$ heißt A *invarianter Unterraum*, falls gilt: $\forall u \in U: \ f(u) \in U$

Die Darstellungsmatrix mit der Basis $B = \{b_1, b_2, b_3, ...\}$ und mit einem invarianten Unterraum mit der Basis $B_U = \{b_1, b_2, b_3\}$ sieht dann wiefolgt aus:

$$A_{BB}(f) = \begin{pmatrix} * & * & * & ? & \cdots & ? \\ & \cdots & & & & \\ & * & * & ? & \cdots & ? \\ & \cdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & ? & \cdots & ? \\ & \cdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & ? & \cdots & ? \\ & \cdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & ? & \cdots & ? \end{pmatrix}$$

Lemma: Es genügt für einen A invarianten Unterraum U zu zeigen:

$\forall b \in B : f(b) \in U$ ($wobei\ B\ Basis\ von\ U\ also\ U = L(B)$)

sei B = (b1,b2,b3) Basis von U und es gilt: $\forall u \in B : f(u) \in U$
für ein beliebiges v $\in$ U:
v $= x_1 \cdot b1 + x_2 \cdot b2 + x_3 \cdot b3$
$\Rightarrow f(v) = f(x_1 \cdot b1 + x_2 \cdot b2 + x_3 \cdot b3)$
$= f(x_1 \cdot b1) + f(x_2 \cdot b2) + f(x_3 \cdot b3)$
$= x_1 \cdot f(b1) + x_2 \cdot f(b2) + x_3 \cdot f(b3)$
$\Rightarrow \forall u \in U : f(u) \in U$

1.Beispiel:

gegeben:

$V = \Re^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \Re\}$

Basis: $e1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad e3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

($\rightarrow$ *Basis eines Vektorraumes* $\leftarrow$).

f(x) $= (x_1, x_2, 10 \cdot x_3)$

Lösung:

Berechnen die *Darstellungsmatrix* $A_{BB}(f)$:

$$f(e1) = f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 0 \\ 10 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot e1 + 0 \cdot e2 + 0 \cdot e3$$

$$f(e2) = f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 \\ 1 \cdot 1 \\ 10 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix} = 0 \cdot e1 + 10 \cdot e2 + (-9) \cdot e3$$

$$f(e3) = f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 \\ 1 \cdot 1 \\ 10 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot e1 + 0 \cdot e2 + 1 \cdot e3$$

$$A_{BB}(f) = \left(\begin{array}{|c|cc|} \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & -9 & 1 \\ \hline \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \; U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \qquad U_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \qquad U_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

2.Beispiel:

gegeben:

$V = \Re^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \Re\}$

Basis: $e1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad e2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad e3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

($\rightarrow$ *Basis eines Vektorraumes* $\leftarrow$).

f(x) $= (3 \cdot x_1 + x_2, 7 \cdot x_2 + 2 \cdot x_1, 3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_3)$

Lösung:

Berechnen die *Darstellungsmatrix* von f:

$$f(e1) = f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 \\ 2 \cdot 1 \\ 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} 2 \cdot e1 + 3 \cdot e2 + 2 \cdot e3$$
$$f(e2) = f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \cdot 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} 1 \cdot e1 + 7 \cdot e2 + 0 \cdot e3$$
$$f(e3) = f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} 0 \cdot e1 + 0 \cdot e2 + 2 \cdot e3$$

$$A_{BB}(f) = \left(\begin{array}{|cc|c|} \hline 2 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ \hline \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \; U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \qquad U_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Eigenschaften invarianter Unterräume:

1. Sei $\{e_1, \cdots, e_k, \cdots, e_n\}$ eine Basis vom Vektorraum V derart, daß $\{e_1, \cdots, e_k\}$ eine Basis vom Unterraum U ist, der A inveriant ist, dann sieht die Matrix A wiefolgt aus :

$$A = \begin{pmatrix} U_A & ? & \cdots & ? \\ 0 \cdots 0 & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots \ddots \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 \cdots 0 & ? & \cdots & ? \end{pmatrix}$$

2. Ein Vektorraum V mit endlicher Basis läßt sich in eine endliche Zahl **m** unzerlegbarer invarianter Unterräume zerlegen.
Sodaß gilt: $V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_m$

(Beweis: wenn V unzerlegbar $\Rightarrow m = 1, U_1 = V$,
sonst: $V = U_1 \oplus U_2$ und zerlegen dann $U_1 \& U_2$, solange
bis keine Zerlegung mehr möglich)

3. Es gelte $f : V \mapsto V$ und V unzerlegbar, dann ist U = Imf(f) ein unzerlegbarer invarianter Unterraum.

(Beweisidee: Invarianz von U ist klar:
$f(U) = f(f(U)) \in Imf(f) = U$

Man nehme an U wäre zerlegbar:

$$U = U_1 \oplus U_2$$

Beweisen nun das daraus folgen würde, daß V zerlegbar sein müßte.
Das steht jedoch im Widerspruch zur Voraussetzung.
Q.E.D. $\langle$ vollständiger Beweis siehe Kapitel 12 *"Normalformen von Matrizen"* $\rangle$)