

L-Systeme

Dr. Hansrudi Noser

Prof. Dr. P. Stucki

Universität Zürich, Institut für Informatik,
MultiMedia Laboratorium

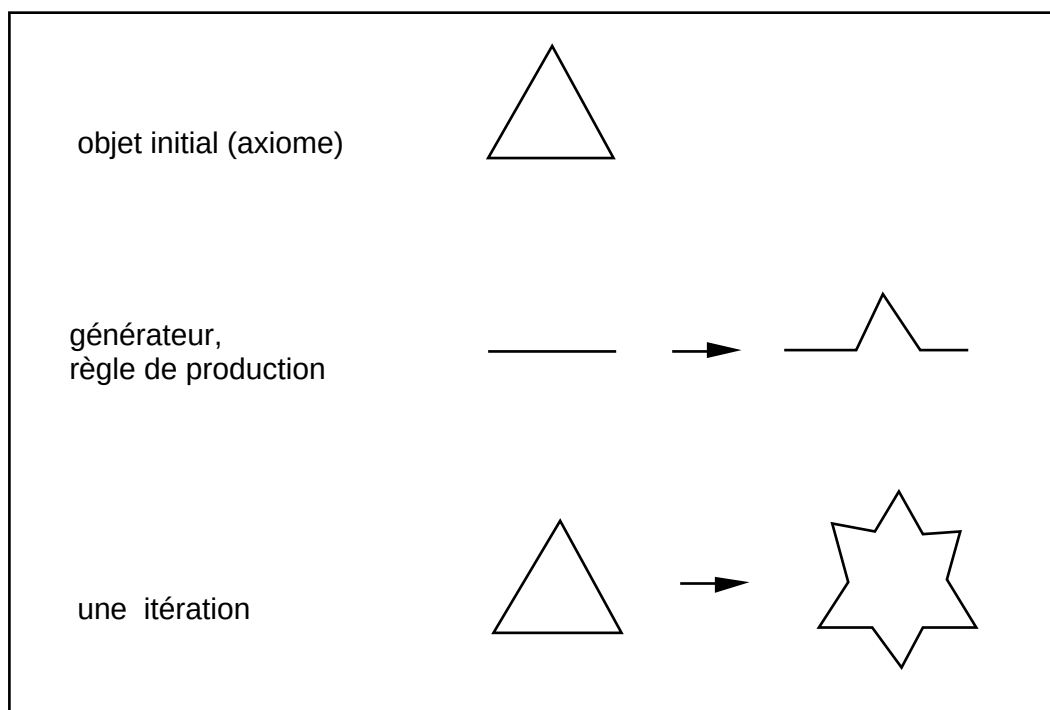
Juni 1998

L-Systeme	3
Einführung	3
Formalismus	5
Semantik.....	7
Edge rewriting	12
Node rewriting.....	13
L-Systeme mit Baumstruktur	14
Stochastische L-Systeme	15
Kontextabhängige L-Systeme	16
Parametrisierte L-Systeme	17
Erzeugung von Oberflächen	19
Zeitabhängige L-Systeme	20
Wachstumsfunktionen	23
Tropismus	27
Pflanzen	30
Die Phyllotaxie	30
Das Modellieren von Bäumen	34
Bibliographie	41

L-SYSTEME

Einführung

- ◆ L(indenmayer) - Systeme wurden von Aristid Lindenmayer 1968 eingeführt
- ◆ Mathematische Theorie der Entwicklung von Pflanzen
- ◆ Basiert auf der Erzeugung von komplexen Objekten durch Ersetzen von Teilen eines ursprünglichen Objektes gemäß einer Anzahl von Produktionsregeln
- ◆ Klassisches Beispiel eines Fraktals: Die Schneeflocke von Koch (1905)



- ◆ Ein L-System ist eine spezialisierte, formelle Grammatik
- ◆ Die Grammatiken von Chomsky (1950) beschreiben die Syntax von natürlicher Sprache.
- ◆ Man interessiert sich für Sätze, formale Sprachen und die Methoden zu deren Erzeugung, Erkennung und Transformation.
- ◆ Beispiel einer Regel, die die Anordnung von Subjekt und Prädikat der Englischen Sprache regelt [STIL87]
S -> NP Tense VP
S: Sentence The dog was humble
NP: Noun phrase the dog
Tense: Tense Marker PAST
VP: Verbal Phrase be humble
- ◆ Syntax und Semantik (Struktur und Bedeutung)
- ◆ Bei L-Systemen werden die Produktionsregeln parallel angewandt und nicht sequentiell wie bei den Grammatiken von Chomsky.
- ◆ Die Interpretation von gewissen Symbolen eines Wortes basiert auf der 3D Turtle-Geometrie des Typs LOGO
- ◆ Anwendungen:
Theoretische Biologie, Musik Kompositionen,
Verschlüsselung und Entschlüsselung von Texten,
Computergraphik und Animation

Formalismus

V : ein **Alphabet** $\{a, b, c, \dots, z\}$
 V^* : Menge der Wörter $\{e, a, ab, aaa, az, Jean, \dots\}$

$\omega \in V^*$: nicht leeres **Axiom** abc

$P \subset V \times V^+$: Endliche Menge von Produktionen

$\{(a, abd), (b, cdi), (a, a)\}$

$p \in P$: Eine **Produktion** p : (a, abc) oder $a \rightarrow abc$

a : **Vorgänger** (Symbol), linke Seite von p

abc : **Nachfolger** (Wort), rechte Seite von p

- ◆ Annahme: Für alle $a \in V$ existiert wenigstens eine Produktion (Identität ist Default Wert (a, a))
- ◆ $G = \langle V, \omega, P \rangle$: **String 0L-System**
- ◆ **D0L-System**: Ein L-System ist **deterministisch**, wenn für alle a von V ein χ aus V^* existiert, derart dass $a \rightarrow \chi$

◆ Beispiel:

Alphabet: $V = \{a, b\}$

Menge der Wörter: $V^* = \{a, b, aa, aaa, ab, \dots\}$

Axiom: $\omega = b$

Menge der Produktionen: $P = \{p_1, p_2\} = \{(a, ab), (b, a)\}$

$p_1: a \rightarrow ab$

$p_2: b \rightarrow a$

L-System: $G = \langle V, \omega, P \rangle$

Einige Iterationen

$b \rightarrow$
 $a \rightarrow$
 $ab \rightarrow$
 $aba \rightarrow$
 $abaab \rightarrow$

◆ Beispiel: Entwicklung eines multizellulären Filamentes in der Biologie:

Seien a und b die Zustände von Zellen (Größe, Neigung sich zu teilen) und l und r die Polarität einer Zelle (bestimmt die Position der Tochterzellen). Die Entwicklung eines Filamentes ist durch das folgende L-System gegeben

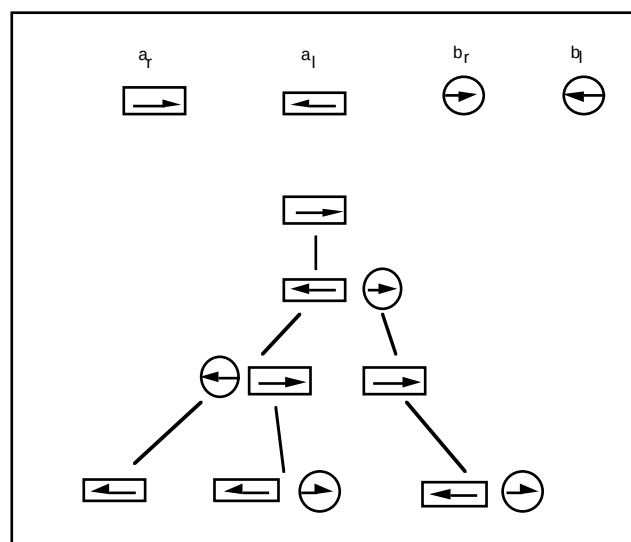
p1: a_r -> a_l b_r

p2: a_l -> b_l a_r

p3: $b_r \rightarrow a_r$

p4: $b_l \rightarrow a_l$

Iterationen: $a_r \rightarrow a_l \quad b_r \rightarrow b_l \quad a_r \rightarrow \dots$



◆ Interpretation von L-Systemen durch eine 2D LOGO
“turtle”

Zustand der Turtle: (x, y, β) = Position und Orientierung

Gegeben: δ = Rotationswinkel

d = Translationsschritt

Es gibt 4 Befehle (Symbole) die den Zustand der Turtle verändern.

F: Vorwärts $(x, y, \beta) \rightarrow (x', y', \beta)$ mit

$$x' = x + d * \cos(\beta)$$

$$y' = y + d * \sin(\beta)$$

Zeichne eine Linie von (x, y) nach (x', y')

f: wie F, aber es wird keine Linie gezeichnet

+: $(x, y, \beta) \rightarrow (x, y, \beta + \delta)$ Rotation nach links

-: $(x, y, \beta) \rightarrow (x, y, \beta - \delta)$ Rotation nach rechts

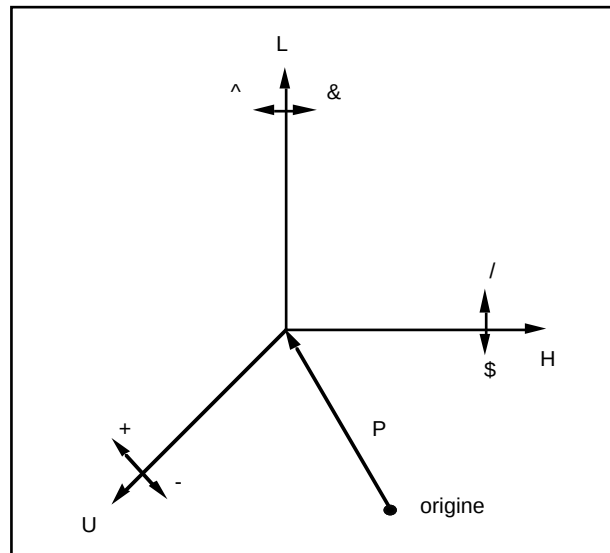
◆ Übung: Die quadratische Insel von Koch ($\delta = 90, d = 1$)

Axiom: $\omega = F - F - F - F$

p: $F \rightarrow F - F + F + F F - F - F + F$

Zeichnen Sie von Hand das Axiom und die erste Iteration.

- ◆ Interpretation der Symbole mittels einer 3D Turtle (Koordinatensystem)



- ◆ Zustand der 3D Turtle: (P, H, L, U)
mit H, L, U orthonormiert ($H \times L = U$)
- ◆ Sei $V = \{F, f, +, -, \$, /, ^, \&\}$ ein Alphabet.
- ◆ Semantik der Symbole.

F: Die Turtle bewegt sich von seiner aktuellen Position P um d Einheiten vorwärts in Richtung H und zeichnet gleichzeitig eine Linie. Seine neue Position ist $P' = P + d * H$

- f:** wie F , aber ohne ein Segment zu zeichnen
- +, -:** Rotation mit Winkel β ($-\beta$) um die Achse U
- \$/, /:** Rotation mit Winkel β ($-\beta$) um die Achse H
- ^, &:** Rotation mit Winkel β ($-\beta$) um die Achse L

♦ Beispiel: Die Schneeflocke von Koch

$d=1, \beta = 60$

$\omega: F - - F - - F$

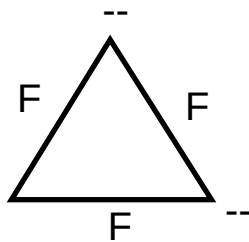
$p1: F \rightarrow F + F - - F + F$

Eine Iteration

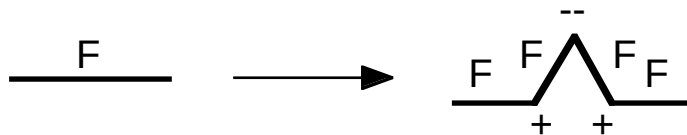
$F--F--F \rightarrow$

$F + F - - F + F - - F + F - - F + F - - F + F - - F + F$

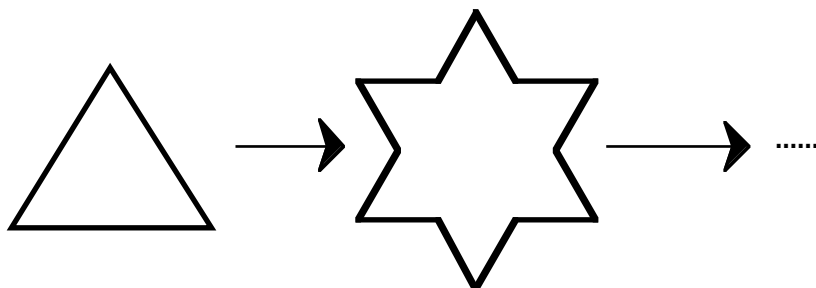
Axiom:



Produktionsregel:

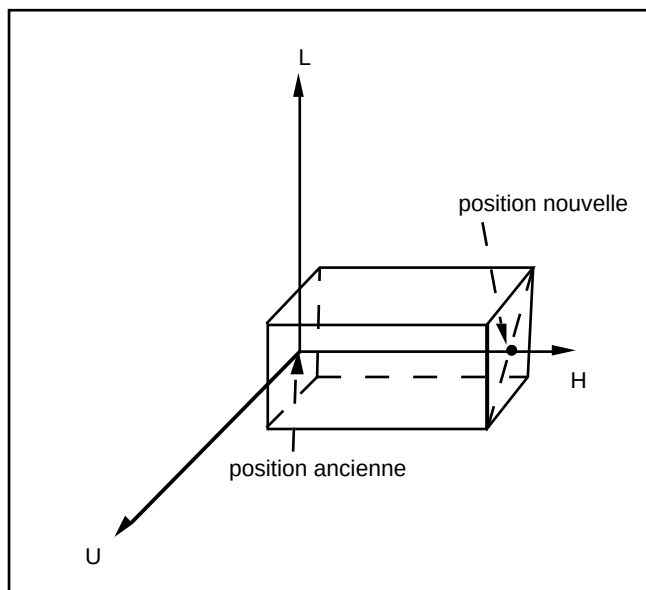


Iterationen:



♦ Semantik anderer Symbole:

c: Zeichne einen Würfel



N: Zeichne im Koordinatensystem der Turtle einen Zylinder (in Richtung H), der mit einer Halbkugel abgeschlossen ist. Die neue Position der Turtle befindet sich am Ende des Zylinders.

s: Zeichne eine Kugel.

m: Wähle ein Material aus einer vordefinierten Menge von Materialien.

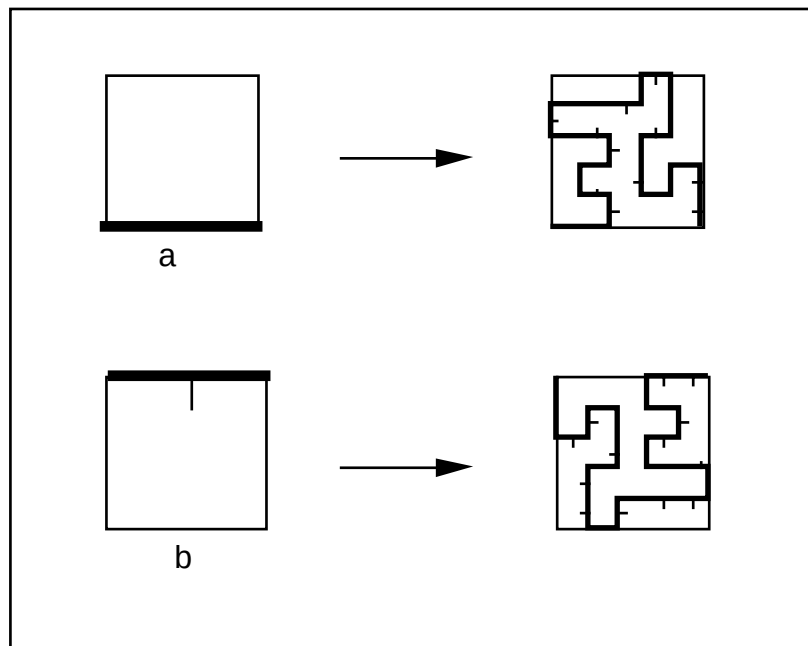
B: Zeichne eine importierte triangulierte Oberfläche.

Edge rewriting

- ◆ Ersetzen von Kanten
- ◆ Kurven des Typs **FASS** (space-filling, self-avoiding, simple and self-similar) sind Kurven, die durch alle Punkte eines Quadrates gehen und die sich niemals schneiden.

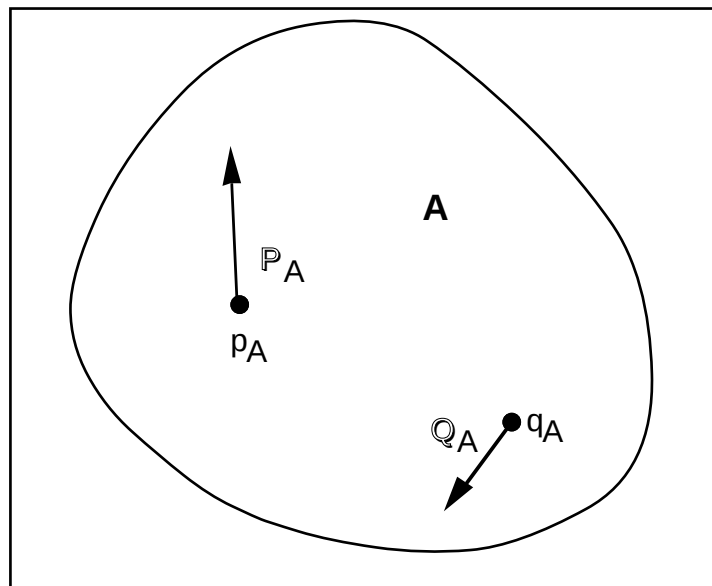
a -> aa+b+b-a-a+b+ba-b-aab+a-b-aa-b+ab+b+a-a-bb+

b -> -aa+b+b-a-ab-a+bb+a+b-abb+a+ba-a-b+b+a-a-bb



Node rewriting

- ◆ Ersetzen der Knoten des Vorgängerobjekts durch Polygone (Figuren, Oberflächen)



Teilfigur A

Eingangspunkt p_A

Eingangsvektor P_A

Ausgangspunkt q_A

Ausgangsvektor Q_A

Die Teilfigur A wird im lokalen Koordinatensystem der Turtle gezeichnet (in 2D gegeben durch (p_A, P_A))

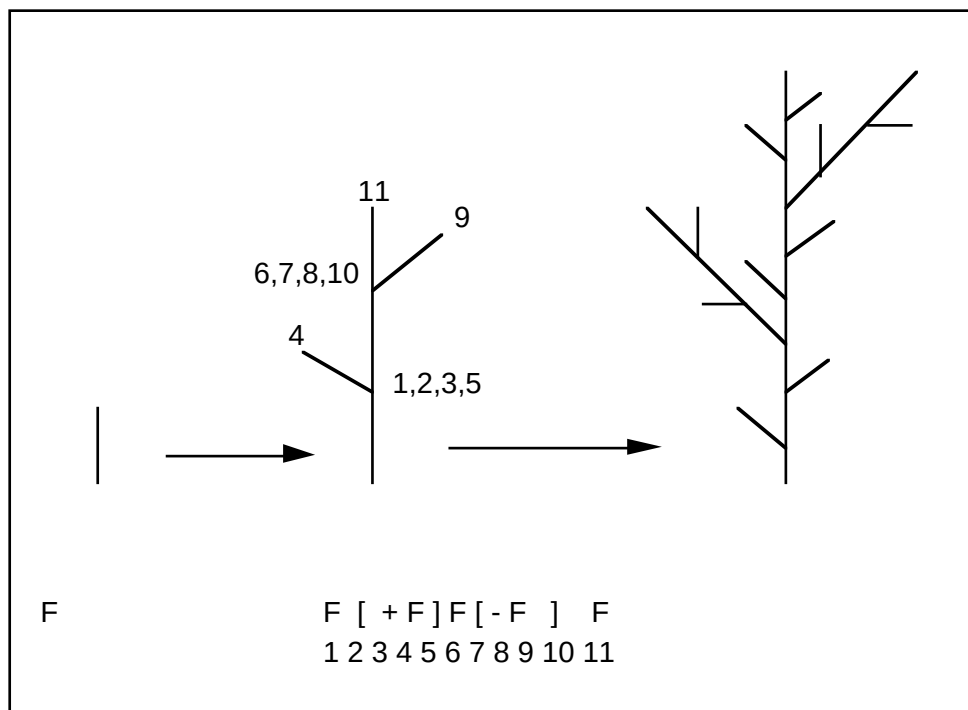
L-Systeme mit Baumstruktur

- ♦ Die "**Bracketed L-Systems**" ermöglichen es, Baumstrukturen zu schaffen.
- ♦ Man führt 2 neue Symbole ein (eckigen Klammern), die Stack Operationen symbolisieren.
 $[$: *push*: der Zustand der Turtle wird auf den Stapel gelegt.
 $]$: *pop*: der Zustand der Turtle wird vom Stapel genommen.

♦ Beispiel:

ω : F

p1: $F \rightarrow F[+F]F[-F]F$



♦ Komplexität der Symbolkette nach n Iterationen: $\sim 5^n$

Stochastische L-Systeme

♦ Zufallsverteilung

$$\pi : P \rightarrow (0,1)$$

$$G_{\pi} = (V, \omega, P, \pi)$$

mit

$$\sum_{i=1}^n \pi(p_{a,i}) = 1, \quad \forall a \in V, \quad n = \text{Anz. Produktionen für das Symbol } a$$

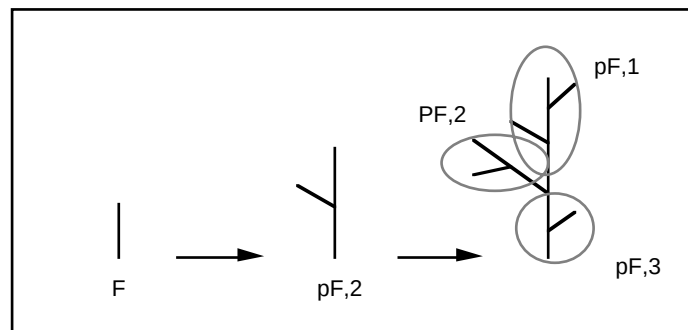
♦ Beispiel:

ω : F

$p_{F,1}$: F $\rightarrow$ (0.33) F[+F] F [-F] F

$p_{F,2}$: F $\rightarrow$ (0.33) F[+F] F

$p_{F,3}$: F $\rightarrow$ (0.34) F[-F] F



Kontextabhängige L-Systeme

- ◆ Ein (k, l) - System hat Produktionen der folgenden Art:

$$X_k < a > X_l \quad \text{--->} X$$

a: Zu ersetzendes Symbol

X_k : Der linke Kontext (Symbolkette mit k Symbolen)

X_l : Der rechte Kontext (Zeichenkette mit l Symbolen)

X Die rechte Seite der Produktion

- ◆ Im Falle der "bracketed L-systems" müssen die Operationen push '[' und pop ']' berücksichtigt werden

- ◆ Beispiel 1: Signalfortpflanzung

ω : baaaa

p1: $b < a \text{ ---> } b$

p2: $b \text{ ---> } a$

baaaa ---> abaaa ---> aabaa --->

- ◆ Übung: Baumstruktur und Kontextabhängigkeit

ω : abc[de][sg[hi[jk]l]mno]

p1: $bc < s > g[h]m \text{ ---> } X$

Wird das Symbol s bei der ersten Iteration ersetzt ?

Parametrisierte L-Systeme

♦ Einige Definitionen:

*: **Folge**

Σ : Menge der **formellen Parameter**: $\{x, y, z, t, T\}$

$E(\Sigma)$: Menge der **arithmetischen Ausdrücke**: $x * y - 5$

$C(\Sigma)$: Menge der **logischen Ausdrücke**: $x * t > 5$

Parametrisiertes Symbol: $A(a_1, \dots, a_n)$ mit $A \in V$, $a_i \in \mathfrak{R}$,
 a_i sind Parameter von A

♦ Ein parametrisiertes 0L-System:

$$G = \langle V, \Sigma, \omega, P \rangle$$

$$\omega \in (V \times \mathfrak{R}^*)^+$$

$$P \subset (V \times \Sigma^*) \times C(\Sigma) \times (V \times E(\Sigma)^*)^*$$

param. Symbol Bedingung parametrisiertes Wort

♦ Beispiel:

$R = 2$ (Konstante)

ω : $A(1)$

$p1$: $A(s) \rightarrow (\text{TRUE}) F(s) [+(90) A(s/R)] [-(90) A(s/R)]$

♦ Die Semantik der Parameter muss definiert werden:

F(s): Die Turtle geht um s Einheiten vorwärts und zeichnet eine Linie.

+(s): Rotation um den Winkel s (Achse U)

-(s): Rotation um den Winkel $-s$ (Achse U)

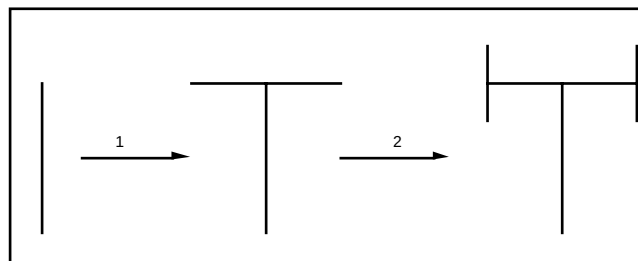
♦ Einige Iterationen:

$A(1) \rightarrow F(1) [+(90) A(0.5)] [-(90) A(0.5)] \rightarrow$

$F(1) [+(90)$

$F(0.5) [+(90) A(0.25)] [-(90) A(0.25)]] [-(90)$

$F(0.5) [+(90) A(0.25)] [-(90) A(0.25)]]$



Erzeugung von Oberflächen

- ♦ Mit einem Polygonstack und drei zusätzlichen Operationen (Symbolen) können Oberflächen mittels L-Systemen erzeugt werden.

{ : Das aktuelle Polygon wird auf den Polygonstack gegeben.

. : Fügt zum aktuellen Polygon den Vertex hinzu, der durch die Turtleposition gegen ist.

} : Zeichnet das aktuelle Polygon und nimmt das nächste Polygon vom Stack, das zum aktuellen Polygon wird.

- ♦ Beispiel: Schneeflocke von Koch

ω : { . f(9) . -(120) f(9) . -(120) f(9) }

p1: $f(x) \rightarrow f(x/3) \{ . +(60) f(x/3) . -(120) f(x/3) . \} +(60) f(x/3)$

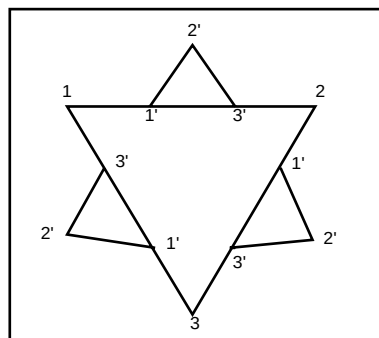
Eine Iteration:

{ . f(9) . -(120) f(9) . -(120) f(9) } $\rightarrow$ { .

f(3) { . +(60) f(3) . -(120) f(3) . } +(60) f(3) . -(120)

f(3) { . +(60) f(3) . -(120) f(3) . } +(60) f(3) . -(120)

f(3) { . +(60) f(3) . -(120) f(3) . } +(60) f(3) }



Zeitabhängige L-Systeme

(timed L-systems: tD0L-Systems)

◆ Einige Definitionen:

$(a, t) \in V \times \mathfrak{R}$ **Zeitabhängiges Symbol** a

t **Alter des Symbols** a

$G_t = \langle V, \omega, P \rangle$ **tD0L-System**

$\omega \in (V \times \mathfrak{R})^+$

$P \subset (V \times \mathfrak{R}) \times (V \times \mathfrak{R})^*$

$(a, \beta) \dashrightarrow (b_1, \alpha_1) \dots (b_n, \alpha_n)$

β : **maximales Alter** des Symbols a

α_i : **Startalter** des Symbols b_i ($\dashrightarrow \beta > \alpha_i$)

t : **Zeit**

◆ **Ableitungsfunktion D** (rekursiv definiert):

$D: (V \times \mathfrak{R})^+ \times \mathfrak{R} \dashrightarrow (V \times \mathfrak{R})^*$

$D(\chi, t) \dashrightarrow \chi'$

♦ Axiome der Ableitungsfunktion D:

Seien

$\chi = (a_1, t_1) \dots (a_n, t_n)$ ein Wort
 $p: (a, \beta) \rightarrow (b_1, \alpha_1) \dots (b_n, \alpha_n)$ eine Produktion

Axiom 1:

(charakterisiert die Unabhängigkeit von jedem Symbol)

$$D(\chi, t) = D((a_1, t_1), t) \dots D((a_n, t_n), t)$$

Axiom 2: (regelt das Wachstum von jedem Symbol)

$$D((a, \tau), t) = (a, \tau + t), \text{ wenn } \tau + t \leq \beta$$

Axiom 3: (regelt die Anwendung von Produktionen)

$$D((a, \tau), t) = D((b_1, \alpha_1) \dots (b_n, \alpha_n), t - (\beta - \tau)),$$

wenn $\tau + t > \beta$

$(\beta - \tau)$: restliche Lebenszeit des Symbols a im Alter von τ

$(b_1, \alpha_1) \dots (b_n, \alpha_n)$: Nachfolger von a

$t - (\beta - \tau)$: Alter des Nachfolgers von a

- ◆ Beispiel der Schneeflocke von Koch (nur ein Segment und eine Rotation)

Das tL-System:

$$\omega: (F, 0) (+, 0) \quad \delta = 60^\circ$$

$$p: (F, 1) \rightarrow \chi = (F, 0) (+, 0) (F, 0) (-, 0) (-, 0) (+, 0) (F, 0)$$

Die Ableitung:

$$t = 0.5$$

$$D((F, 0) (+, 0), 0.5) = (\text{Axiom 1})$$

$$D((F, 0), 0.5) D((+, 0), 0.5) = (\text{Axiom 2}, \tau + t = 0 + 0.5 < \beta = 1)$$

$$(F, 0.5) (+, 0.5)$$

$$t = 1.5$$

$$D((F, 0) (+, 0), 1.5) = (\text{Axiom 1})$$

$$D((F, 0), 1.5) D((+, 0), 1.5) = (\text{Axiom 3 et 2}, \\ \tau + t = 0 + 1.5 > \beta = 1)$$

$$D(\chi, 1.5 - (1 - 0)) (+, 1.5) =$$

$$D(\chi, 0.5) (+, 1.5) = (\text{Axiom 1 et 2})$$

$$D((F, 0) (+, 0) (F, 0) (-, 0) (-, 0) (+, 0) (F, 0), 0.5) (+, 1.5) = \\ (F, 0.5) (+, 0.5) (F, 0.5) (-, 0.5) (-, 0.5) (+, 0.5) (F, 0.5) (+, 1.5)$$

Wachstumsfunktionen

◆ Diskretes Wachstum:

ω : F (F ist ein Segment mit Länge d)

p: F $\rightarrow$ FFF

Iteration: F $\rightarrow$ (n=1) FFF $\rightarrow$ (n=2) FFF FFF FFF $\rightarrow$

$\Rightarrow$ die Länge L des Wortes $\chi_n = F \dots F$ nach n Iterationen:

$\Rightarrow L = d * 3^n$

◆ Kontinuierliches Wachstum

Sei $(a, \beta) \rightarrow (b_1, \alpha_1) \dots (b_n, \alpha_n)$ eine Produktion

$f(a, t)$ ist eine Wachstumsfunktion des Symbols a, die die Länge eines Segmentes zur Zeit t bestimmt.

$f(a, t)$ ist kontinuierlich im Intervall $[\alpha_{\min}, \beta]$

Bei einer Wachstumsfunktion verlangt man

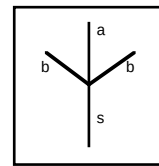
$$f^{(k)}(a, \beta) = \sum_{i=1}^n f^{(k)}(b_i, \alpha_i)$$

$f^{(k)}$ ist die k-te Ableitung von f nach der Zeit t.

◆ Beispiel: Kontinuierliches Wachstum einer Baumstruktur.

ω : (a, 0)

p1: (a, 1) $\rightarrow$ (s, 0) [(b, 0)] [(b, 0)] (a, 0)



p2: (b, β) $\rightarrow$ (a, 0)

Gesucht wird ein kontinuierliches Wachstum der Ordnung
($k = 0, 1$)

$$f^{(k)}(a, 1) = f^{(k)}(s, 0) + f^{(k)}(a, 0)$$

Kontinuierliches Wachstum entlang einer Achse

$$f^{(k)}(b, 0) = 0 \quad : b = 0 \text{ zu Beginn}$$

$$f^{(k)}(b, \beta) = f^{(k)}(a, 0) \quad : \text{kontinuierlicher Übergang von } b \text{ nach } a$$

Seien

$$f(a, t) = A_a * e^{B_a * t}$$

$$f(s, t) = A_s * e^{B_s * t} \quad : \text{exponentielles Wachstum}$$

$$f(b, t) = A_b * t^3 + B_b * t^2 + C_b * t + D_b$$

Mit der Anfangsgrösse **A_a** des Symbols a und seiner Anfangswachstumsrate von **B_a**, erhält man

$$f(a, 1) = A_a * e^{B_a} = f(s, 0) + f(a, 0) = A_s + A_a$$

$$\Rightarrow \mathbf{As} = Aa * (e^{Ba-1}) \quad (1)$$

$$f(1)(a, 1) = Aa * Ba * e^{Ba} = f(1)(s, 0) + f(1)(a, 0) = Aa * Ba + As * Bs \quad (2)$$

(1) in (2) eingesetzt ergibt

$$Aa * Ba * e^{Ba} = Aa * Ba + Bs * Aa * (e^{Ba-1}) = Aa * Ba - Aa * Bs + Bs * Aa * e^{Ba} \quad (3)$$

Gleichung 3 ist richtig für $\mathbf{Bs} = Ba$

zudem:

$$f(b, 0) = \mathbf{Db} = 0$$

$$f(1)(b, 0) = \mathbf{Cb} = 0$$

mit $\beta = 1$, erhält man

$$f(b, 1) = Ab + Bb = f(a, 0) = Aa$$

$$\Rightarrow Ab = Aa - Bb \quad (4)$$

$$f(1)(b, 1) = 3 * Ab + 2 * Bb = f(1)(a, 0) = Aa * Ba \quad (5)$$

Gleichung (4) in (5) eingesetzt ergibt

$$\mathbf{Bb} = Aa * (3 - Ba)$$

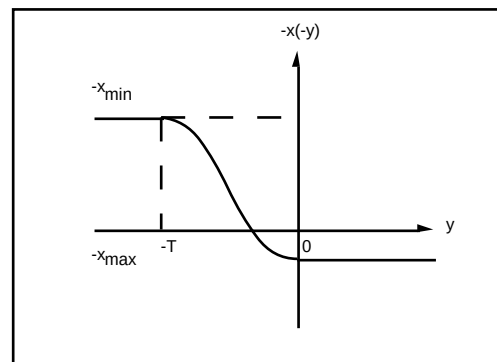
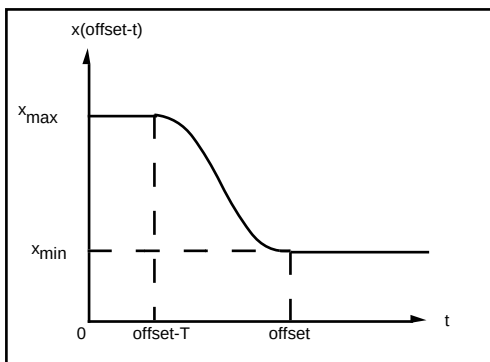
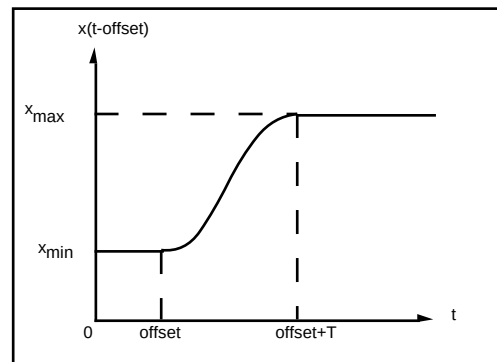
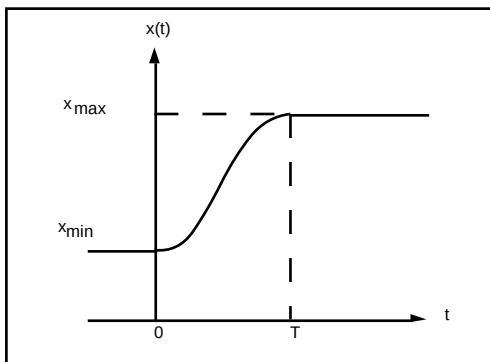
$$\mathbf{Ab} = Aa * (Ba - 2)$$

- ◆ Die Wachstumsfunktionen beschreiben kontinuierliche Prozesse wie z. B. das Wachsen von Ästen oder die Vergrößerung der Verzweigungswinkel. Für ein kontinuierliches Wachstum kann eine Funktion basierend auf einem kubischen Polynom von Hermite verwendet werden [PRUS93].

◆ Hermite Polynom:

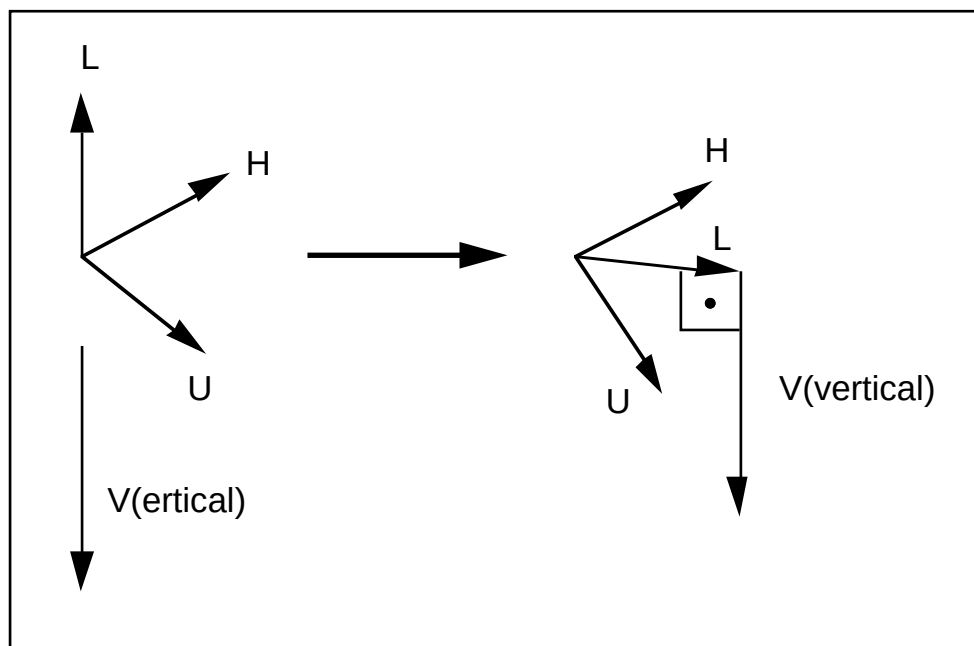
$$x(t) = \begin{cases} x_{\min}, & t < 0 \\ x_{\min} + 3(x_{\max} - x_{\min})\left(\frac{t}{T}\right)^2 - 2(x_{\max} - x_{\min})\left(\frac{t}{T}\right)^3, & 0 < t < T \\ x_{\max}, & t > T \end{cases}$$

- ◆ Diese Funktion $x(t)$ hat eine Nullwachstumsrate an beiden Enden des Intervalls $0 < t < T$, und sie wächst von $x_{\min}$ nach $x_{\max}$ im Innern des Intervalls. Seine Form kann leicht angepasst werden durch die Variablen T , $x_{\min}$ und $x_{\max}$ und durch einfache Parametertransformationen. Die folgenden Figuren zeigen einige Beispiele.



Tropismus

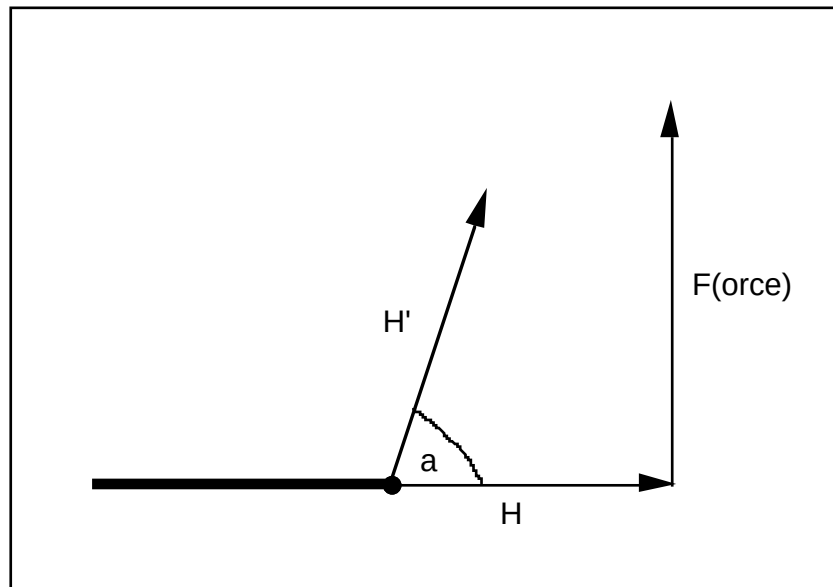
◆ Horizontale Ausrichtung der Turtle (L)



$$L = V \times H / |V \times H|$$

$$U = H \times L$$

◆ Wechselwirkung einer Baumstruktur mit Kraftfeldern



Drehmoment: $M = e * (H \times F)$

Winkel: $a = e * |H \times F|$

Achse: $A = H \times F / |H \times F|$

Neuer Zustand:

$$H' = (H * A) * A * (1 - \cos(a)) + H * \cos(a) + (A \times H) * \sin(a)$$

$$L' = (L * A) * A * (1 - \cos(a)) + L * \cos(a) + (A \times L) * \sin(a)$$

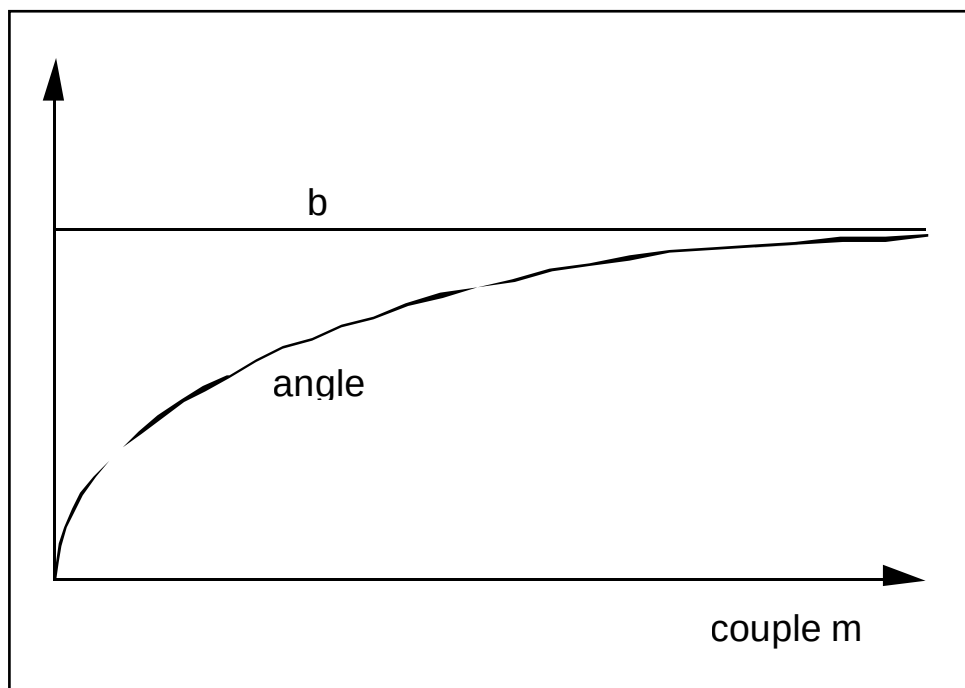
$$U' = H' \times L'$$

♦ Anpassung des Rotationswinkels:

Wert des Drehmomentes: $m = |H \times F|/e$

Winkel zwischen Kraft F und H: $b = \sin^{-1}((H \times F)/(|H| * |F|))$

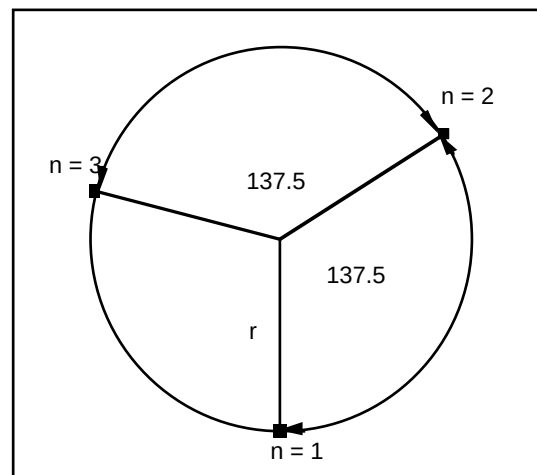
Korrigierter Winkel: $\text{angle} = b * (1 - 1/(m+1))$



Pflanzen

Phyllotaxis

- ◆ Phyllotaxis = Anordnung von Blättern, Knospen, oder Kernen um eine Achse
- ◆ Das ebene Modell:



- ◆ Platzierung der Kerne eines Sonnenblumenkopfes

$$\beta = n * 137.5^\circ,$$

$$r_n = c * n^{0.5}$$

n: n. Kern vom Blütenzentrum

β : Winkel zwischen dem ersten und dem n. Kern

r_n : Distanz zwischen Blütenzentrum und n. Kern

c: Skalierungsfaktor

Fibonacci Winkel: $137.5^\circ = 360^\circ / t^2$, $t = (5^{0.5} + 1) / 2$

Fibonacci Reihe:

$$F_0 = 0,$$

$$F_1 = 1,$$

$$F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{F_{k+1}}{F_k} = t$$

◆ Begründung für das Modell: $r \sim n^{0.5}$

Wir nehmen an dass alle Kerne dieselbe Größe haben und dass sie dicht verteilt sind auf dem Sonnenblumenkopf

=> n ist proportional zu einer Kreisfläche ($r^2 \cdot \pi$) => $n \sim r^2$

Man sieht 2 Mengen von Spiralen (Parastiches): im Uhrzeigersinn und im Gegenuhrzeigersinn.

Die Anzahl der Spiralen in den beiden Mengen ist immer gegeben durch eine Zahl der Fibonacci Reihe

(..., 21, 34 oder 89, 144 oder)

Die Anzahl der wahrgenommenen Spiralen hängt von der Größe des Kopfes und der Anzahl der Kerne ab.

♦ Beispiel:

$a = 137.5$.

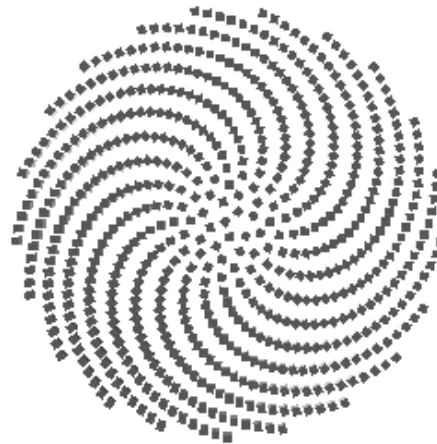
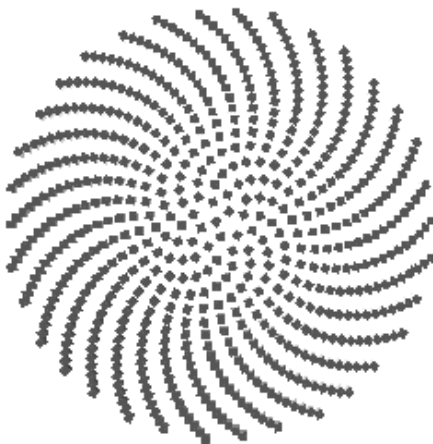
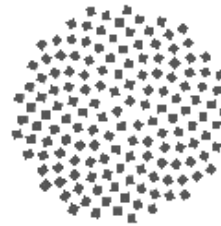
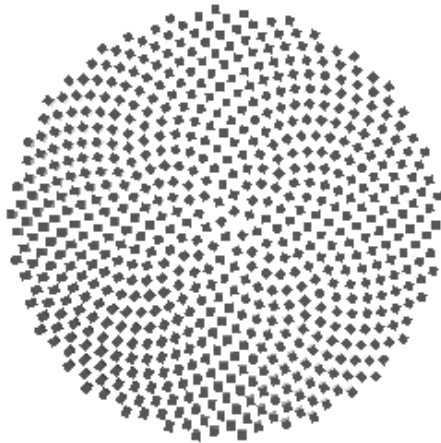
S, R sind Symbole die Kerne und Blütenblätter darstellen. A, C sind formelle Hilfssymbole, die nicht interpretiert werden.

ω : A(0)

p1: $A(n) \quad * \quad \text{--->} \quad +(a) [f(n^{0.5}) C(n)] A(n+1)$

p2: $C(n), \quad n \leq 200 \quad \text{--->} \quad S$

p3: $C(n), \quad n > 200 \quad \text{--->} \quad R$



A Fibonacci Winkel = 137.3

Fibonacci Winkel = 137.7

- ♦ Übung: Zählen Sie die Spiralen der ersten beiden Bilder und vergleichen Sie sie mit den Zahlen der Fibonacci Reihe.

Das Modellieren von Bäumen

◆ Das Modell von Honda

- Die Baumsegmente sind gerade. Ihr Umfang wird nicht berücksichtigt.
- Ein Vorgängersegment produziert zwei Nachfolgersegmente bei einem Verzweigungsprozess
- Die Längen der zwei Nachfolgersegmente werden durch zwei konstante Faktoren r_1 und r_2 bezüglich des Vorgängersegmentes reduziert.
- Das Vorgänger- und die Nachfolgersegmente liegen in derselben Verzweigungsebene. Die Verzweigungswinkel sind konstant.
- Die Linie senkrecht zum Vorgängersegment und in der Verzweigungsebene liegend ist horizontal. Diese Regel gilt nicht für Äste des Baumstammes. In diesem Falle ist der Divergenzwinkel zwischen zwei sich folgenden Ästen konstant.

◆ Das folgende L-System basiert auf dem Modell von Honda.

◆ Beispiel: Monopodial Structure

Einer der Verzweigungswinkel ist null. Der Reduktionsfaktor ist $w = 0.707$ und genügt dem Postulat von Leonardo da Vinci: Alle Nachfolgeräste haben zusammen dieselbe Dicke wie der Vorgängerast. (im Falle von Nachfolgerästen:

$$\Rightarrow w_1^2 = 2 \cdot w_2^2 \Rightarrow w_2/w_1 = 1 / \sqrt{2} = 0.707$$

$r_1 = 0.9$ contraction ratio for the trunk

$r_2 = 0.6$ contraction ratio for branches

$a_0 = 45$ branching angle from the trunk

$a_2 = 45$ branching angle for lateral axes

$d = 137.5$ divergence angle

$w_r = 0.707$ width decrease rate

ω : A(1, 10)

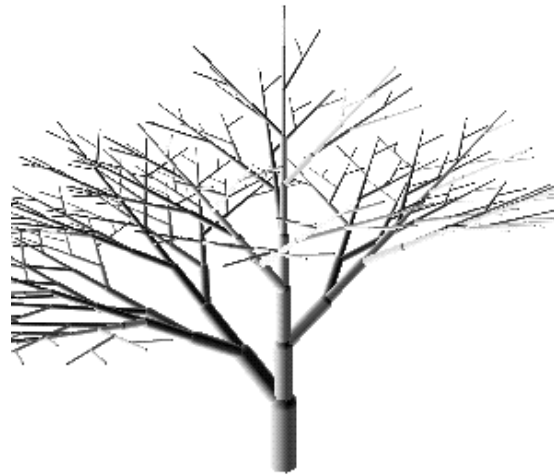
p_1 : A(l, w) * --> !(w) F(l) [&(a₀) B(l*r₂, w*w_r)]
/(d) A(l*r₁, w*w_r)

p_2 : B(l, w) * --> !(w) F(l) [-(a₂) \$ C(l*r₂, w*w_r)] C(l*r₁, w*w_r)

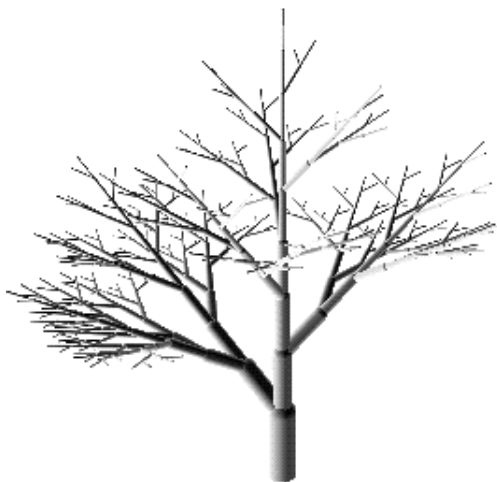
p_3 : C(l, w) * --> !(w) F(l) [(+a₂) \$ B(l*r₂, w*w_r)]
B(l*r₁, w*w_r)



$$r_1=0.9, r_2=0.6, a_0=45, a_2=45$$



$$r_1=0.9, r_2=0.9, a_0=45, a_2=45$$



$$r_1=0.9, r_2=0.8, a_0=45, a_2=45$$



$$r_1=0.9, r_2=0.7, a_0=30, a_2=-30$$

◆ Beispiel: Sympodial Structure

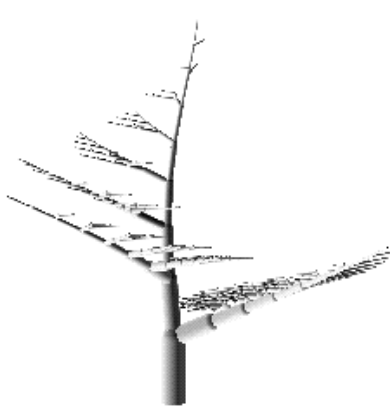
Beide Verzweigungswinkel sind von null verschieden

$r_1 = 0.9$ contraction ratio 1
 $r_2 = 0.6$ contraction ratio 2
 $a_1 = 45$ branching angle 1
 $a_2 = 45$ branching angle 2
 $w_r = 0.707$ width decrease rate

ω : A(1, 10)

$p_1: A(l, w) * \rightarrow !(w) F(l)$
 $\quad [\&(a_1) B(l*r_1, w*w_r)] / (180)$
 $\quad [\&(a_2) B(l*r_2, w*w_r)]$

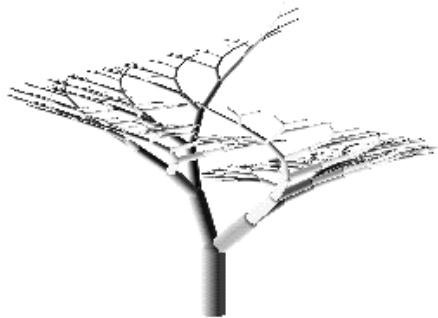
$p_2: B(l, w) * \rightarrow !(w) F(l)$
 $\quad [+(a_1) \$ B(l*r_1, w*w_r)]$
 $\quad [-(a_2) \$ B(l*r_2, w*w_r)]$



$r_1=0.9, r_2=0.7, a_1=5, a_2=65$



$r_1=0.9, r_2=0.7, a_1=10, a_2=60$



$r_1=0.9, r_2=0.8, a_1=20, a_2=50$



$r_1=0.9, r_2=0.8, a_1=35, a_2=35$

♦ Beispiel: Dreifachverzweigung mit Tropismus Kräften.

$d_1 = 94.74$ divergence angle 1

$d_2 = 132.63$ divergence angle 2

$a = 18.95$ branching angle

$l_r = 1.109$ elongation rate

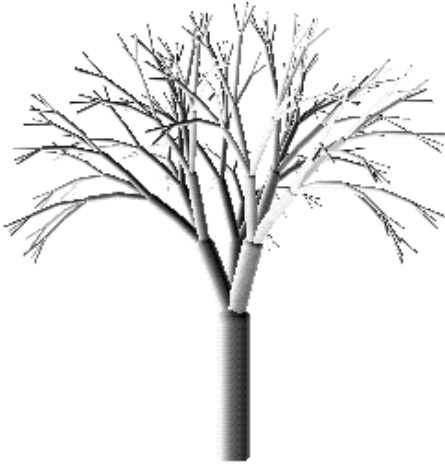
$v_r = 1.732$ width increase rate

$\omega: \quad !(1) F(200) /(45) A$

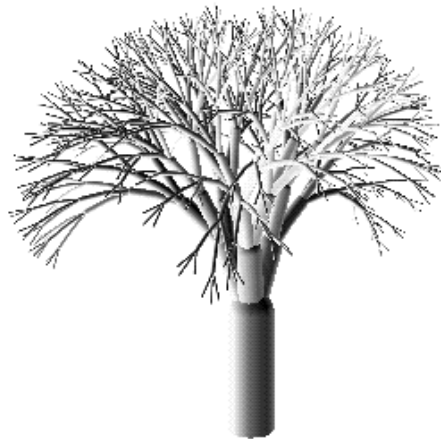
$p_1: A : * \rightarrow \quad !(v_r) F(50)$
 $\quad [\&(a) F(50) A] /(d_1)$
 $\quad [\&(a) F(50) A] /(d_2)$
 $\quad [\&(a) F(50) A]$

$p_2: F(l) : * \rightarrow F(l * l_r)$

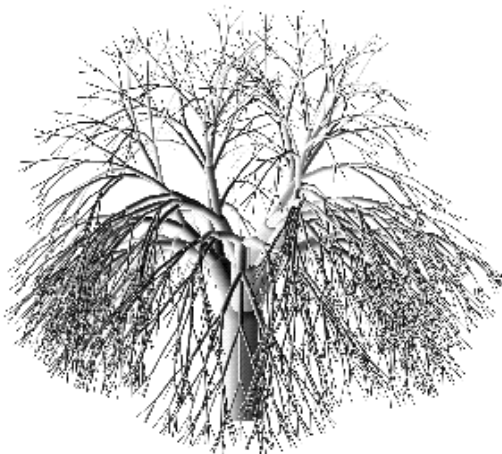
$p_3: !(w) : * \rightarrow !(w * v_r)$



Mit Gravitation



Mit Gravitation



Mit Gravitation und
schwachem Wind



Mit Gravitation und starkem
Wind

Bibliographie

[ABE84] H. Abelson, A.A. diSessa, *Turtle Geometry*, The MIT Press, 1984

[PEIT88] Peitgen Heinz-Otto, Saupe Dietmar, *The Science of Fractal Images*, Springer Verlag, 1988

[PEIT92] Peitgen, Jürgens, Saupe, *Fractals for the Classroom 1*, Springer Verlag 92

[PRUS90] P. Prusinkiewicz, A. Lindenmayer, *The Algorithmic Beauty of Plants* (1990), Springer Verlag

[PRUS93] P. Prusinkiewicz, M.S. Hammel, E. Mjolsness, *Animation of Plant Development*, Computer Graphics Proceedings, SIGGRAPH '93, Annual Conference Series, pp 351, ACM Press

[SCHWEI87] Schweizer Philippe, *Infographie 2*, Presse Polytechnique Romandes, 1987

[STIL87] Stillings et al.: *Linguistics: the Representation of Language*, Chapter 6 in *Cognitive Science: An Introduction*, MIT Press, 1987