Mittel und Varianz von W.verteilungen

- Erwartungswert einer Zufallsvariablen Y
  $E[Y] = \sum_{i=1}^{n} y_i P(Y = y_i)$, wobei $y_1, \ldots y_n$, die möglichen Werte von Y
- Varianz einer Zufallsvariablen Y
  $Var[Y] = E[(Y - E[Y])^2]$
  erwarteter quadratischer Fehler, wenn ein Y benutzt wird, um $E[Y]$ zu schätzen
- Standardabweichung einer Zufallsvariablen Y
  $\sigma_Y = \sqrt[2]{Var[Y]}$

Bayesian Techniques

Inference and learning with probabilities

- Bayes Theorem and useful probability formulae
- Maximum likelihood , maximum a posteriori hypotheses
- Analysis of learning rules in the light of ML, MAP
- Algorithms
  - Bayes optimal classifer
  - Bayes naive classifier, example
  - Bayes net learning

Unsicheres Wissen

Grundannahmen der klassischen Logik:

- Satz p wahr oder falsch
- man weiß ob p wahr/falsch

Grundannahmen der (subjektiven) Wahrscheinlichkeitstheorie

- Satz p wahr oder falsch (ontologisch)
- Grad der Überzeugung (degree of belief) eines Agenten, daß p gilt
- Wert zwischen 0 und 1

Wahrscheinlichkeit (zusammen mit Nutzen) notwendig für rationales Handeln

unsicheres Wissen: Beispiel Diagnose

Symptom(Zahnweh) $\Rightarrow$ Krankheit(Karies)

falsch, weil es andere Gründe für Zahnweh geben kann:
Symptom(Zahnweh) $\Rightarrow$ Krankheit(Karies) $\vee \ldots \vee$ (vollst Liste)

impraktikabel, Liste bel. verlängerbar, Medizin nicht abgeschlossen, keine Unterscheidung plausibler/implausibler Kandidaten

$\Rightarrow$ Verwendung von Wahrscheinlichkeiten:
bedingte Wahrscheinlichkeit von Karies bei Zahnweh ist 0,8:

P(Karies | Zahnweh) = 0,8

Zahnweh hier die **Evidenz**, Zufügen neuer Evidenz kann W. (nichtmonoton) ändern, alle Evidenz grundsätzlich berücksichtigen

a priori Wahrscheinlichkeit P(Karies) ist W. ohne jede Evidenz

Bedingte Wahrscheinlichkeit

- .P(A | B): Wahrscheinlichkeit von A, falls alles, was wir wissen, B ist
- für Zufallsvariable X, Y bezeichnet P(X | Y) die 2-dim Tabelle mit Einträgen P(X = x_i | Y = y_j) an Stelle i,j
- Definition: $\boxed{P(A \mid B) = \frac{P(A\&B)}{P(B)}}$, $falls P(B) > 0$
- Produktregel:
  $P(A\&B) = P(A \mid B)P(B)$ oder
  $P(A\&B) = P(B \mid A)P(A)$

Bayes Theorem

Produktregel: $P(A\&B) = P(A \mid B) \cdot P(B)$
. $P(A\&B) = P(B \mid A) \cdot P(A)$

Bayes Regel: $\boxed{P(A \mid B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}}$

Beispiel: Hat der Patient mit Nackensteife Meningitis?

$P(M \mid S) = \frac{0.5 \cdot 1/50000}{1/20} = 0.0002$

Verallgemeinerung: $P(A \mid B, E) = \frac{P(B|A,E) \cdot P(A|E)}{P(B|E)}$

A Priori Wahrscheinlichkeit

Wahrscheinlichkeit einer Proposition ohne Vorliegen von Evidenz

häufig in Form

P(Wetter = Sonne) = 0.7

P(Wetter = Regen) = 0.2

P(Wetter = Wolken) = 0.08

P(Wetter = Schnee) = 0.02

Wetter ist Zufallsvariable mit Wertebereich

Notation P(Wetter) = (0.7, 0.2, 0.08, 0.02) auch Wahrscheinlichkeitsverteilung

Wahrscheinlichkeits-Axiome

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

$$P(true) = 1, P(false) = 0$$

$$P(A \vee B) = P(A) + P(B) - P(a \wedge B)$$

function POLYTREE-ASK(X, E) **returns** $\mathbf{P}(X|E)$, a distribution over X given evidence E
  inputs: X, a random variable
    E, a set of random variables with known values

  SUPPORT-EXCEPT(X, $\{\}$, E)

---

function SUPPORT-EXCEPT(X, V, E) **returns** $\mathbf{P}(X|E_{X\setminus V})$, a distribution over X
  given all evidence except that reachable via V

  if $X \in E$ **then return** observed point distribution for X
  else
    calculate $\mathbf{P}(E^-_{X\setminus V}|X)$ = EVIDENCE-EXCEPT(X, V, E)
    $\mathbf{U} \leftarrow$ PARENTS[X]
    if $\mathbf{U}$ is empty **then return** NORMALIZE($\mathbf{P}(E^-_{X\setminus V}|X)\ \mathbf{P}(X)$)
    else
      for each U_i **in** U
        calculate and store $\mathbf{P}(U_i|E_{U_i\setminus X})$ = SUPPORT-EXCEPT(U_i, $\{X\}$, E)
      return NORMALIZE$\left(\mathbf{P}(E^-_{X\setminus V}|X) \sum_{\mathbf{u}} \mathbf{P}(X|\mathbf{u}) \prod_i \mathbf{P}(U_i|E_{u_i\setminus X})\right)$

---

function EVIDENCE-EXCEPT(X, V, E) **returns** $\mathbf{P}(E^-_{X\setminus V}|X)$, probability of downstream evidence
  (except evidence reachable via V) for each value of X

  $\mathbf{Y} \leftarrow$ CHILDREN[X] $-$ V
  if $\mathbf{Y}$ is empty **then return** a vector of 1s   /* *No downstream evidence—true for all X!* */
  else
    for each Y_i **in** $\mathbf{Y}$ **do**
      if $Y_i \notin E$ **then** calculate $\mathbf{P}(E^-_{Y_i}|Y_i)$ = EVIDENCE-EXCEPT(Y_i, $\{\}$, E)
      $\mathbf{Z}_i \leftarrow$ PARENTS[Y_i] $- X - E$; $\mathbf{Z}'_i \leftarrow$ (PARENTS[Y_i] $- X) \cap E$
      for each Z_{ij} **in** $\mathbf{Z}_i$
        calculate $\mathbf{P}(Z_{ij}|E_{Z_{ij}\setminus Y_i})$ = SUPPORT-EXCEPT(Z_{ij}, $\{Y_i\}$, E)
    return $\prod_i \Big[$ **if** $Y_i \in E$ **then** $\sum_{\mathbf{z}_i} \mathbf{P}(y_i|X, \mathbf{z}_i, \mathbf{z}'_i) \prod_j P(z_{ij}|E_{Z_{ij}\setminus Y_i})$
      else $\sum_{y_i} P(E^-_{Y_i}|y_i) \sum_{\mathbf{z}_i} \mathbf{P}(y_i|X, \mathbf{z}_i, \mathbf{z}'_i) \prod_j P(z_{ij}|E_{Z_{ij}\setminus Y_i}) \Big]$

Algorithmus: Update BN