Einführung in die Theoretische Informatik
Tutorium VII

Michael R. Jung

27. 11. - 02. 12. 2015

Aufgabe 1

Wandeln Sie G in eine Grammatik G' in CNF um, wobei $L(G') = L(G) \setminus \{\varepsilon\}$. Prüfen Sie mit dem CYK-Algorithmus, ob die Wörter $abbaab, aabbab$ in $L(G)$ liegen.

$$
\begin{aligned}
G &= (\{S, X\}, \{a, b\}, P, S) \text{ mit} \\
P &= \{ \\
&\qquad S \rightarrow SS|X, \\
&\qquad X \rightarrow aXb|\varepsilon \\
&\qquad \}
\end{aligned}
$$

1. ε-Produktionen entfernen.

$$P' = \{S \to SS|X, X \to aXb|ab\}$$

2. Variablenumbenennung $S \to X$ entfernen.

$$P'' = \{S \to SS|aXb|ab, X \to aXb|ab\}$$

3. Hilfsvariablen für Terminale einführen.

$$P''' = \{S \to SS|AXB|AB, X \to AXB|AB \\ A \to a, B \to b\}$$

4. Rechte Seiten, die zu lang sind, behandeln.

$$P'''' = \{S \to SS|AX'|AB, X \to AX'|AB \\ X' \to XB, A \to a, B \to b\}$$

Damit ist $G' = (\{S, X, A, B, X'\}, \{a, b\}, P'''', S)$ wie gefordert.
Nun müssen wir noch die beiden Wörter überprüfen.

	a	b	b	a	a	b
	A	B	B	A	A	B
	S, X	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	S, X	
	X'	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$		
	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$			
	$\varnothing$	$\varnothing$				
$S \notin$	$\varnothing$					

	a	a	b	b	a	b
	A	A	B	B	A	B
	$\emptyset$	S, X	$\emptyset$	$\emptyset$	S, X	
	$\emptyset$	X'	$\emptyset$	$\emptyset$		
	S, X	$\emptyset$	$\emptyset$			
	$\emptyset$	$\emptyset$				
$S \in$	S					

Aufgabe 2

Zeigen Sie mit dem Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen, dass die Sprache $L = \{ww | w \in \{0,1\}^*\}$ nicht kontextfrei ist.

Sei $l \in \mathbb{N}$. Betrachte $z = 0^l 1^l 0^l 1^l \in L$. Sei $z = uvwxy$ mit $vx \neq \varepsilon$ und $|vwx| \leq l$.

Fall 1: $|vx| \equiv_2 1. \Rightarrow |uv^2wx^2y| \equiv_2 1. \Rightarrow uv^2wx^2y \notin L.$

Fall 2: $|vx| \equiv_2 0.$

Fall 2.1: Wenn v und x beide in der ersten Hälfte von z liegen, so beginnt die zweite Hälfte von uv^2wx^2y mit einer 1. $\lightning$

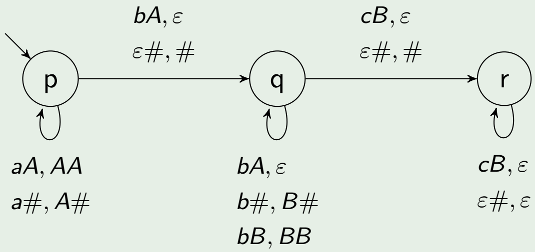
Fall 2.2: Wenn v und x beide in der zweiten Hälfte von z liegen, so endet die erste Hälfte von uv^2wx^2y mit einer 0. $\lightning$

Fall 2.3: Hier geht vwx über die Mitte von z. Nun wäre aber aber $uv^0wx^0y = uwy = 0^l 1^i 0^j 1^l$, wobei gilt: $i < l$ oder $j < l$. $\lightning$

Aufgabe 3

Geben Sie für die Wörter $w_1 = a^3bc, w_2 = a^3b^5c, w_3 = a^3b^5c^2$ alle möglichen Rechnungen von M an. Welche Sprache erkennt der folgende PDA M? Zeigen Sie die Korrektheit Ihrer Behauptung.

M :



w_1 :

$(p, a^3bc, \#) \vdash (q, a^3bc, \#) \vdash (r, a^3bc, \#) \vdash (r, a^3bc, \varepsilon)$

$(p, a^3bc, \#) \vdash (p, a^2bc, A\#) \vdash (p, abc, AA\#) \vdash (p, bc, AAA\#) \vdash (q, c, AA\#)$

w_2 :

$(p, a^3b^5c, \#) \vdash^3 (r, a^3b^5c, \varepsilon)$

$(p, a^3b^5c, \#) \vdash^3 (p, b^5c, A^3\#) \vdash^3 (q, b^2c, \#) \vdash^2 (r, b^2c, \varepsilon)$

$(p, a^3b^5c, \#) \vdash^6 (q, b^2c, \#) \vdash (q, bc, B\#) \vdash (q, c, BB\#) \vdash (r, \varepsilon, B\#)$

w_3 :

$(p, a^3b^5c^2, \#) \vdash^3 (r, a^3b^5c^2, \varepsilon)$

$(p, a^3b^5c^2, \#) \vdash^6 (q, b^2c^2, \#) \vdash^2 (r, b^2c^2, \varepsilon)$

$(p, a^3b^5c^2, \#) \vdash^8 (q, c^2, BB\#) \vdash (r, c, B\#) \vdash (r, \varepsilon, \#) \vdash (r, \varepsilon, \varepsilon)$

$$L(M) = \{a^n b^m c^k | 0 \leq m = n + k\} := L$$

$L(M) \supseteq L$:

Sei $w = a^n b^m c^k$ mit $0 \leq m = n + k$. Sei $n' = \begin{cases} n & \text{falls } n > 0 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$,
k' analog. Dann gibt es folgende Rechnung von M:
$(p, a^n b^m c^k, \#) \vdash^n (p, b^m c^k, A^n\#) \vdash^{n'} (q, b^{m-n(=k)} c^k, \#) \vdash^k$
$(q, c^k, B^k\#) \vdash^{k'} (r, \varepsilon, \#) \vdash (r\varepsilon, \varepsilon)$ □

$L(M) \subseteq L$:

Betrachten wir eine akzeptierende Rechnung von M:
Da $\#$ vom Keller gelöscht werden muss, endet eine solche Rechnung in r.
Desweiteren ist leicht zu erkennen, dass as nur in p gelesen werden können, dass wir nach dem Lesen des ersten bs in q landen, dass wir weitere bs nur dort lesen können und dass wir nach dem Lesen des ersten cs in r landen. Folglich ist die korrekte Reihenfolge der Buchstaben gesichert. Wir müssen also nur noch die Korrektheit der Anzahlen überprüfen, d.h. $L(M) \subseteq \{a^n b^m c^k | n, m, k \in \mathbb{N}\}$.

$L(M) \subseteq L$ (Forts.):

Sei $w = a^n b^m c^k \in L(M)$.
Für jedes gelesene a am Anfang, legen wir ein A auf den Keller.
Diese können wir nur mit einer gleichen Anzahl bs löschen, da nur zum Löschen von As nur die Regeln $pbA \to q\varepsilon$ und $qbA \to q\varepsilon$ existieren, d.h. $(p, w, \#) \vdash^* (q, b^{m-n}c^k, \#)$ und dies ist die einzige Möglichkeit zum Lesen von as.
Alle weiteren bs legen ein B auf den Keller, d.h. $(q, b^{m-n}c^k, \#) \vdash^* (q, c^k, B^{m-n}\#)$ und dies ist die einzige Möglichkeit zum Lesen von weiteren bs.

$L(M) \subseteq L$ (Forts.):

Ein B kann nur durch Lesen eines cs gelöscht werden $(qcB \to r\varepsilon, rcB \to r\varepsilon)$, d.h. $(q, c^k, B^{m-n}\#) \vdash^* (r, c^{k-(m-n)}, \#)$. Hier können nun keine weiteren cs gelesen werden, sondern nur noch die Raute ohne ein weiteres gelesenes Zeichen gelöscht werden, d.h. $(r, c^{k-(m-n)}, \#) \vdash (r, c^{k-(m-n)}, \varepsilon)$. Da der Keller nun aber leer ist, gilt also

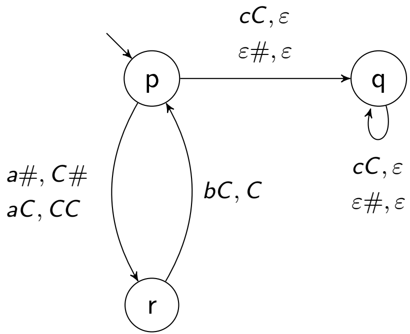
$k - (m - n) = 0 \Leftrightarrow k + n - m = 0 \Leftrightarrow m = k + n.$ $\square$

Aufgabe 4

Geben Sie einen PDA M für die Sprache $L := \{(ab)^n c^n | n \in \mathbb{N}\}$ an. Entwerfen Sie außerdem eine Grammatik G für L und wandeln Sie diese in einen PDA M' um.

Lösung: PDA

M :



$$G = (\{S\}, \{a, b, c\}, \{S \to \varepsilon | abSc\}, S)$$

$$M' = (\{q\}, \{a, b, c\}, \{a, b, c, S\}, \delta, q, S)$$

$$\begin{aligned} \delta : qaa &\to q & \qquad q\varepsilon S &\to q \\ qbb &\to q & q\varepsilon S &\to qabSc \\ qcc &\to q \end{aligned}$$