

Einführung in die Theoretische Informatik

Tutorium IV

Michael R. Jung

07. - 11. 11. 2015



Aufgabe 1

Zeigen Sie dass die Teilbarkeitsrelation $|$ auf $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ eine Halbordnung ist. (Schreibweise $x|y \Leftrightarrow \exists z \in \mathbb{N} : xz = y$)

Beweis.

Reflexivität: $x|x$ klar, denn $1x = x$.

Antisymmetrie: Seien $x, y \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ mit $x|y$ und $y|x$.

Dann existieren $m, n \in \mathbb{N}$ mit $xn = y$ und $ym = x$. Dann gilt:
 $xnm = x$, folglich $n = m = 1$ und somit $x = y$.

Transitivität: Seien $x, y, z \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ mit $x|y$ und $y|z$.

Dann existieren $m, n \in \mathbb{N}$ mit $xn = y$ und $ym = z$. Dann gilt:
 $xnm = z$, folglich $x|z$.



Aufgabe 2

Geben sie die minimalen, kleinsten, maximalen und größten Elemente von $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ bezüglich $|$ an.

	minimale	Minimum	maximale	Maximum
$\mathbb{N} \setminus \{0\}$	$\{1\}$	1	\emptyset	\emptyset
$\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$	\mathbb{P}	\emptyset	\emptyset	\emptyset

$\mathbb{P} := \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ist eine Primzahl}\}$

Es gibt keine maximalen Elemente, da für alle $x \in \mathbb{N}$ gilt: $x \mid 2x$.

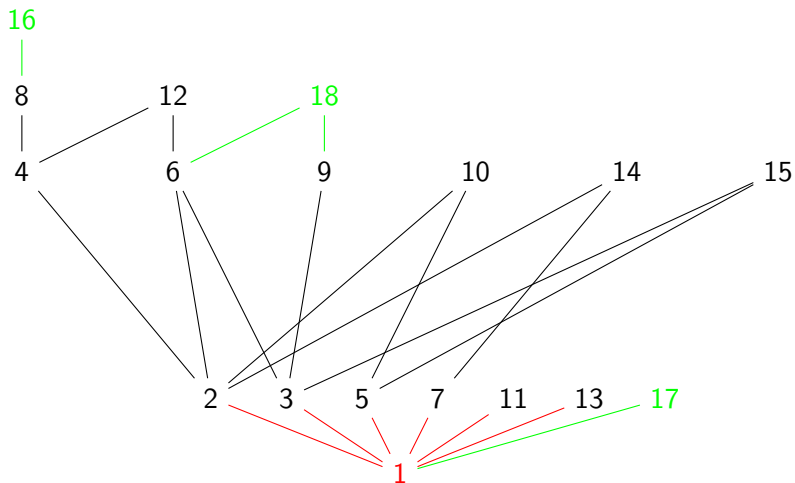


Aufgabe 3

Stellen Sie $|$ auf $M := \{i \in \mathbb{N} \mid 2 \leq i \leq 15\}$ mit einem Hasse-Diagramm dar. Geben Sie alle unteren und oberen Schranken sowie Infimum und Supremum in $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ für $|$ auf M an.



Hasse-Diagramm:



Lösung:

untere Schranken	$\{1\}$
Infimum	1
obere Schranken	$\{360360 \cdot k \mid k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$
Supremum	360360

$$\text{kgV}(M) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 = 360360$$



Aufgabe 4

- 1 Geben Sie einen Ordnungshomomorphismus von $(\mathbb{N} \setminus \{0\}, |)$ auf (\mathbb{N}, \leq) an.
- 2 Kann es zwischen diesen beiden Halbordnungen einen Isomorphismus geben? **NEIN**
- 3 Geben Sie eine Menge $M \subseteq \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und einen Ordnungsisomorphismus zwischen (\mathbb{N}, \leq) und $(M, |)$ an.



Lösungen:

- 1 $\text{id}_{\mathbb{N} \setminus \{0\}}$.
- 2 Nein, denn unter jeder bijektiven Abbildung f würden zwar $f(2)$ und $f(3)$ bzgl. \leq in einer Richtung in Beziehung stehen, 2 und 3 tun dies bzgl. $|$ allerdings nicht.
- 3 $M := \{2^i \mid i \in \mathbb{N}\}$ und $h : \mathbb{N} \rightarrow M$ mit $n \mapsto 2^n$.



Aufgabe 5

Beweisen oder widerlegen Sie jeweils: Folgende Relationen sind Äquivalenzrelationen.

- 1 Grundmenge \mathbb{R} , $a \sim_1 b :\Leftrightarrow a \cdot b \geq 0$ **NEIN**
- 2 Grundmenge $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, $a \sim_2 b :\Leftrightarrow a \cdot b > 0$ **JA**
- 3 Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Grundmenge \mathbb{R} ,
 $a \sim_3 b :\Leftrightarrow f(a) = f(b)$. **JA**
- 4 Sei $M := \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ Grundmenge,
 $(a, b) \sim_4 (c, d) :\Leftrightarrow ad = bc$ **JA**



- 1 nicht transitiv, da $1 \sim_1 0$ und $0 \sim_1 -1$ aber nicht $1 \sim_1 -1$.
- 2
 - Reflexivität: Klar, da für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt: $x^2 > 0$.
 - Symmetrie: Klar, da Multiplikation auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ kommutativ, also $xy > 0 \Leftrightarrow yx > 0$.
 - Transitivität: Seien $x, y, z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $x \sim_2 y, y \sim_2 z$. Dann $xy > 0, yz > 0 \Rightarrow xyyz > 0 \stackrel{y^2 > 0}{\Rightarrow} xz > \frac{0}{y^2} \Rightarrow xz > 0 \Rightarrow x \sim_2 z$.
- 3
 - Reflexivität: Klar, da $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = f(x)$.
 - Symmetrie: Klar, da $\forall x, y \in \mathbb{R} : f(x) = f(y) \Leftrightarrow f(y) = f(x)$.
 - Transitivität: Klar, da $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : f(x) = f(y) \wedge f(y) = f(z) \Rightarrow f(x) = f(z)$.



- 4
- Reflexivität: Klar, da $\forall (a, b) \in M : ab = ab$.
 - Symmetrie: Klar, da $\forall (a, b), (c, d) \in M : ad = bc \Leftrightarrow cb = da$.
 - Transitivität: Seien $(a, b), (c, d), (e, f) \in M$ mit $(a, b) \sim_4 (c, d) \wedge (c, d) \sim_4 (e, f)$. Dann $ad = bc \wedge cf = de \Rightarrow adcf = bcde \Rightarrow af = be \Rightarrow (a, b) \sim_4 (e, f)$

Bemerkung: $M / \sim_4 \cong \mathbb{Q}$, da $(a, b) \sim_4 (c, d) \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Repräsentantensystem für \sim_4 :

$$\{(a, b) \in M \mid b > 0 \wedge \forall (c, d) \sim_4 (a, b) : |d| \geq b\}$$

(Nenner positiv und möglichst klein)



Aufgabe 6

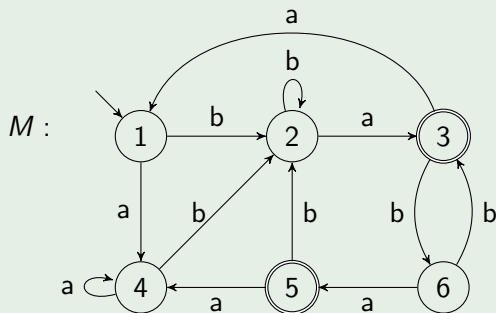
Geben Sie zwei verschiedene Verfeinerungen von \equiv_2 auf \mathbb{N} an.

Lösung: z.B. \equiv_4, \equiv_6 .



Aufgabe 7

Minimieren Sie folgenden DFA M .

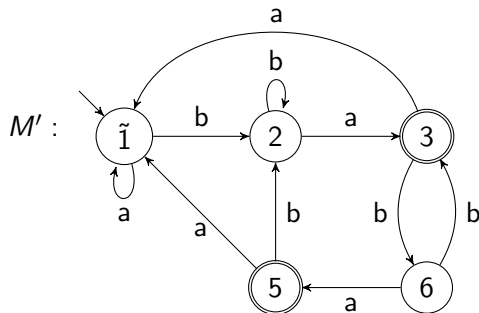


2	<i>a</i>					
3	ε	ε				
4		<i>a</i>	ε			
5	ε	ε	<i>bb</i>	ε		
6	<i>a/b</i>	<i>b</i>	ε	<i>a/b</i>	ε	
	1	2	3	4	5	

Bemerkung: An Position (i, j) steht ein Wort, so dass man aus i in einen Endzustand kommt und aus j nicht oder andersherum.

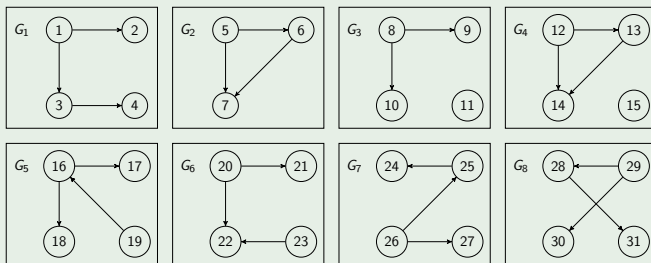


Es ergibt sich also folgender DFA M' .



Aufgabe 8

Welche der folgenden Digraphen sind zu G_1 isomorph? Begründen Sie Ihre negative Antwort oder geben Sie ggf. einen Isomorphismus an.



Lösung:

- $G_1 \cong G_1, f_1 = \text{id}_{\{1,2,3,4\}}$.
- $G_1 \not\cong G_2, |V(G_1)| > |V(G_2)|$.
- $G_1 \not\cong G_3, |E(G_1)| > |E(G_2)|$.
- $G_1 \not\cong G_4, G_4$ nicht zusammenhängend.
- $G_1 \not\cong G_5, 16$ ist zu 3 Kanten inzident, aber kein Knoten in G_1 hat diese Eigenschaft.
- $G_1 \not\cong G_6, \text{deg}^-(22) = 2$, aber kein Knoten in G_1 hat diese Eigenschaft.
- $G_1 \cong G_7, f_7(1) = 26, f_7(2) = 27, f_7(3) = 25, f_7(4) = 24$.
- $G_1 \cong G_8, f_8(1) = 29, f_8(2) = 30, f_8(3) = 28, f_8(4) = 31$.

