Algorithmen und Datenstrukturen
Tutorium II

Michael R. Jung

27. 04. - 02. 05. 2016

Ableitungsregeln

Satz (Produktregel)

Seinen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *differenzierbare Funktionen. Dann ist*

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'.$$

Satz (Kettenregel)

Seinen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *differenzierbare Funktionen. Dann ist*

$$(f(g))' = f'(g) \cdot g'.$$

Aufgabe 1

Leiten Sie folgende Funktionen ab ($c \in R_+$ konstant)!

1. $f(x) := x^x$,
2. $f(x) := x^c \cdot \log(x)$,
3. $h := \frac{f}{g}, \; f, g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$,
4. $f(x) := \log(\log(x))$ für $x > 1$.

Lösungen:

1. $(x^x)' = \left(e^{\ln(x^x)}\right)' = \left(e^{x\ln x}\right)' = e^{x\ln x}\cdot(\ln x + x\frac{1}{x}) = x^x(1+\ln x)$
2. $(x^c \log x)' = cx^{c-1}\log x + x^c\frac{1}{x\ln 2} = x^{c-1}(c\log x + \frac{1}{\ln 2})$
3. $\left(\frac{f}{g}\right)' = (f\cdot(g)^{-1})' = \frac{f'}{g} + f\cdot(-1g^{-2})g' = \frac{f'}{g} - \frac{fg'}{g^2} = \frac{f'g-fg'}{g^2}$
4. $(\log(\log x))' = \frac{1}{\ln 2\log x}\cdot\frac{1}{x\ln 2} = \frac{1}{(\ln 2)^2 x\log x} = \frac{1}{(\ln 2)x\ln x}$

Aufgabe 2

Zeigen oder widerlegen Sie ($1 < c \in R_+$ konstant):

1. $n^n \in \mathcal{O}(2^n)$
2. $\log n \in \mathcal{O}(\sqrt[c]{n})$
3. $\log n \in \mathcal{O}(\sqrt[n]{n})$

Lösungen:

1. $\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{2}\right)^n = \infty \;\Rightarrow n^n \notin \mathcal{O}(2^n)$
2. $\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{\sqrt[c]{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n^{\frac{1}{c}}} \overset{\text{l'Hôp}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n \ln 2}}{\frac{1}{c} n^{\frac{1}{c}-1}} = \frac{c}{\ln 2} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{c}-1+1}} = \frac{c}{\ln 2} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[c]{n}} = 0$

3 Zeige zunächst: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$: Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wähle $n_0 > \frac{2}{\varepsilon^2}$. Dann gilt für alle $n \geq n_0$:

$$
\begin{aligned}
& & 2\varepsilon^{-2} &< n & &\mid \cdot \tfrac{1}{2}\varepsilon^2 \\
&\Rightarrow & 1 &< \frac{n}{2}\varepsilon^2 & &\mid \cdot (n-1) \\
&\Rightarrow & n-1 &< \frac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2 & &\mid +1 \\
&\Rightarrow & n &< 1 + \frac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2 & &
\end{aligned}
$$

Nach binomischem Lehrsatz gilt: $(1+\varepsilon)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \varepsilon^i = 1 + n\varepsilon + \frac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2 + \ldots$

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow & n &< (1+\varepsilon)^n & &\mid \sqrt[n]{(\ )} \\
&\Rightarrow & \sqrt[n]{n} &< 1 + \varepsilon & &\mid -1 \\
&\Rightarrow & \sqrt[n]{n} - 1 &< \varepsilon & &\mid \sqrt[n]{n} > 1 \\
&\Rightarrow & |\sqrt[n]{n} - 1| &< \varepsilon & &
\end{aligned}
$$

Folglich ist also $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Daher gilt also*:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{\sqrt[n]{n}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \log n}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}} = \lim_{n\to\infty} \log n = \infty$$

*Wir rechnen hier mit uneigentlichen Grenzwerten.

Vgl. Konrad Königsberger, *Analysis 1*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 2004, Seite 54f.

Aufgabe 3

Ordnen Sie die folgenden Funktionen aufsteigend nach ihrem asymptotischem Wachstum und zeigen Sie die Korrektheit ihrer gefundenen Reihenfolge!

$$n!,\ 2^n,\ \log(n^2 + 2^n),\ \sqrt{n},\ 2^{\log(n^3)},\ 2^{3\log\frac{n}{2}},\ n^n$$

Lösung: Eine Reihenfolge ist

$$\sqrt{n},\ \log(n^2+2^n),\ 2^{3\log\frac{n}{2}},\ 2^{\log(n^3)},\ 2^n,\ n!,\ n^n.$$

Beweise:

- Seien $c=1, n_0=1$. Dann ist für $n \geq n_0$:
  $\sqrt{n} \leq n = \log 2^n \leq \log(n^2+2^n) = c\log(n^2+2^n)$.
- Seien $c=8, n_0=5$. Dann ist für $n \geq n_0$:
  $\log(n^2+2^n) \leq \log(2^n+2^n) = \log(2^{n+1}) = n+1 \leq 8\left(\frac{n}{2}\right)^3 = c2^{3\log(\frac{n}{2})}$.
- Seien $c=1, n_0=0$. Dann ist für $n \geq n_0$:
  $2^{3\log\frac{n}{2}} = \left(\frac{n}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}n^3 \leq n^3 = c2^{\log(n^3)}$.
- Betrachte $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3}{2^n}$.
  $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3}{2^n} \overset{(\text{l'Hôp})^3}{=} \lim\limits_{n\to\infty} \frac{6}{2^n(\ln 2)^3} = 0.$

- Seien $c = 2, n_0 = 1$. Dann ist für $n \geq n_0$:
  $2^n = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot 2}_{n \text{ Faktoren}} \leq \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot n}_{n \text{ Faktoren}} = 2\underbrace{(1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot n)}_{n \text{ Faktoren}} = cn!$.
- Seien $c = 1, n_0 = 1$. Dann ist für $n \geq n_0$:
  $n! = \underbrace{1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot n}_{n \text{ Faktoren}} \leq \underbrace{n \cdot n \cdot \cdots \cdot n}_{n \text{ Faktoren}} = cn^n$.