

## Übungsblatt 4

Abgabe bis zum 22. Mai 2012

### Aufgabe 12

6 Punkte

Bestimmen Sie die minimale Anzahl an Vergleichen, die ein vergleichsbasierter Algorithmus im besten Fall benötigt, um

- (a) eine Folge von  $n$  Zahlen zu sortieren, (mündlich)
- (b) den Median einer Folge von  $n$  Zahlen zu finden, (2 Punkte)
- (c) das Maximum einer Folge von  $n$  Zahlen zu finden, (2 Punkte)
- (d) das Maximum und das Minimum einer Folge von  $n$  Zahlen zu finden. (2 Punkte)

### Aufgabe 13

5 Punkte

Lösen Sie die folgenden Rekursionsgleichungen, indem Sie möglichst enge untere und obere asymptotische Schranken für die Lösungsfunktionen angeben (evtl. in Abhängigkeit vom Anfangswert  $T(1) = a$ ).

- (a)  $T(n) = 3T(n/2) + 4T(n/16) + 5n^k$ ,  $k \in \{1, 2, 3\}$ , (mündlich)
- (b)  $T(n) = bT(n - c)$ ,  $b \geq 0$ ,  $c \geq 1$ , (mündlich)
- (c)  $T(n) = bT(cn) + dn + e$ ,  $b, d \geq 0$ ,  $0 < c < 1$ . (5 Punkte)

### Aufgabe 14

mündlich

- (a) Geben Sie den Rekursionsbaum von **QuickSort** für die Eingabefolge  $(3, 1, 5, 2, 4)$  an.

- (b) Wie viele Vergleiche benötigt **QuickSort**, um die Eingabefolge  $(3, 1, 5, 2, 4)$  zu sortieren?
- (c) Geben Sie den Fragebaum  $B$  von **QuickSort** für die Sortierung einer Folge von 4 Zahlen an. Wieviele Blätter und Knoten hat  $B$ ? Was ist die maximale und minimale Blatttiefe von  $B$ ?
- (d) Bestimmen Sie für  $n = 1, \dots, 10$  die Fragekomplexität von **QuickSort** im besten, schlechtesten und durchschnittlichen Fall für eine Permutation der Zahlen  $1, \dots, n$ . Vergleichen Sie diese Werte jeweils mit der unteren Schranke  $\lceil \log_2(n!) \rceil$  für den schlechtesten Fall.
- (e) Bestimmen Sie für alle Paare  $1 \leq i < j \leq 5$  das erste von **QuickSort** beim Sortieren der Eingabefolge  $(3, 1, 5, 2, 4)$  im Intervall  $I_{ij} = \{i, \dots, j\}$  gewählte Pivotelement.

### Aufgabe 15

mündlich, optional

Zeigen Sie, dass **QuickSort** im Durchschnitt  $V(n) = (2 \ln 2) \log_2(n!) - \Theta(n)$  Vergleiche benötigt, um eine Folge von  $n$  paarweise verschiedenen Zahlen zu sortieren.

*Hinweis:* Für die *harmonische Reihe*  $H_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}$  gilt  $\ln(n+1) \leq H_n \leq \ln n + 1$  und  $H_n - \ln n - \gamma \sim 1/(2n)$ , wobei  $\gamma \approx 0,57721$  die Eulersche Konstante ist.

### Aufgabe 16

mündlich

Der Algorithmus **RandomQuickSort** ist eine randomisierte Variante von **QuickSort**, bei der nicht das letzte Element des zu sortierenden Arrays sondern ein zufälliges Element als Pivot-Element gewählt wird.

- (a) Bestimmen Sie die (erwartete) Anzahl von Vergleichen, die **RandomQuickSort** im besten, mittleren und schlechtesten Fall vornimmt, um eine Folge von  $n$  paarweise verschiedenen Zahlen zu sortieren.

*Hinweis:* Zeigen Sie, dass sich **RandomQuickSort** bei jeder Eingabefolge verhält wie **QuickSort** bei einer zufälligen Permutation dieser Folge.

- (b) Welche Erwartungswerte ergeben sich für  $n = 1, 2, 3, 4$  im schlechtesten und im besten Fall, wenn die Folgenglieder mehrfach vorkommen können?

### Aufgabe 17

*mündlich*

Die *Tiefe*  $t(v)$  eines Knotens in einem Baum mit Wurzel  $w$  sei die Länge des Pfades von  $w$  zu  $v$ . Sei  $B$  ein Binärbaum mit  $n$  Blättern. Zeigen Sie:

- (a) Die maximale Blatttiefe von  $B$  beträgt mindestens  $\lceil \log_2 n \rceil$ .
- \* (b) Die mittlere Blatttiefe von  $B$  beträgt mindestens  $\log_2 n$ . (*optional*)
- (c) Ein vergleichendes Sortierverfahren benötigt im Durchschnitt mindestens  $\log_2(n!)$  Vergleiche, um eine zufällige Permutation der Zahlen  $1, \dots, n$  zu sortieren.
- (d) Auch randomisierte vergleichende Sortierverfahren benötigen hierzu im schlechtesten Fall mindestens  $\lceil \log_2(n!) \rceil$  und im Durchschnitt mindestens  $\log_2(n!)$  Vergleiche.