Aufgabe 1: (8 P.) Sei die folgende (unvollständige) Wahrscheinlichkeitstabelle eines zweidimensionalen zufälligen Vektors (X, Y) gegeben.

$X\backslash Y$	1	2	3	4	
1	$\frac{1}{8}$	.	$\frac{1}{8}$	.	.
2	.	$\frac{1}{8}$	.	.	.
3	$\frac{1}{4}$	.	$\frac{1}{8}$	.	$\frac{1}{2}$
4	.	$\frac{1}{8}$	.	.	.
	.	$\frac{3}{8}$	.	.	1

a) Berechnen Sie die restlichen Einträge und tragen Sie diese in die Tabelle ein.

b) Sind X und Y unabhängig? ja/nein
Kreuzen Sie die richtige Antwort an.

c) Berechnen Sie die Erwartungswerte von X und Y.

d) Bestimmen Sie die Kovarianz von X und Y.

$\mathbf{E}(X) =$

$\mathbf{E}(Y) =$

$\mathbf{E}(X \cdot Y) =$

$\mathrm{cov}(X, Y) =$

Aufgabe 2: (4 P.) Entscheiden Sie ob die folgenden Aussagen wahr sein können oder oder immer falsch sind (ohne Begründung). Kreuzen Sie an.

a) $X, Y \sim \mathcal{N}(0, 1) \Rightarrow X + Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$ wahr/falsch

b) $X \sim Exp(1) \quad \Rightarrow P(X > 2|X > 1) = e^{-2}$ wahr/falsch

c) $X \sim Exp(1) \quad \Rightarrow P(X > 2|X > 1) = e^{-1}$ wahr/falsch

d) $X, Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$ und $\rho(X, Y) = 0 \Rightarrow P(X > 0, Y > 0) = P(X > 0) \cdot P(Y > 0)$
wahr/falsch

Aufgabe 3: (5 P.) Finden Sie für folgende Fragen geeignete Modelle. Spezifizieren Sie diese so genau, wie es angegebenen Informationen erlauben.

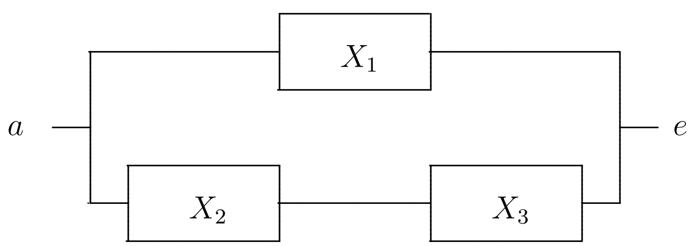
a) Wir nehmen an, in einer Schachpartie wird ein Springerzug mit Wahrscheinlichkeit 0.2 gemacht. Der Einfachheit halber nehmen wir an, eine Schachpartie dauert insgesamt genau 100 Züge. Sei X_1 die zufällige Anzahl der Springerzüge in einer Schachpartie

$$X_1 \sim$$

b) Aus zwei Maschinen werden in einer Zeiteinheit im Mittel 100 Ca^{2+} Ionen bzw. 200 K^+-Ionen emittiert. Seien X_2 und X_3 die zufälligen Anzahlen der in der gegebenen Zeiteinheit emittierten Ca^{2+} bzw. K^+-Ionen.

$$\begin{aligned} X_2 &\sim \\ X_3 &\sim \\ X_2 + X_3 &\sim \end{aligned}$$

Aufgabe 4: (5 P.) Ein (elektronisches) System ζ bestehe aus drei Komponenten, die wie in der Abbildung angeordnet seien. Das System fällt genau dann aus, wenn keine intakte Verbindung zwischen a und e besteht.



Die zufälligen Lebensdauern X_1, X_2, X_3 der drei Komponenten seien unabhängig und exponentialverteilt, jeweils mit Erwartungswert 1, $X_i \sim Exp(1)$.

a) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion der Systemlebensdauer.

$$F_\zeta(x) = P(\zeta < x) =$$

b) Berechnen Sie den Erwartungswert der Systemlebensdauer.

$\mathbf{E}(\zeta) =$

Hinweis: Es gilt, falls, $X > 0$ und F_X stetig: $\mathbf{E}(X) = \int_0^\infty (1 - F_X(t))\, dt$.

Aufgabe 5: (12 P.+2 P.) Sei die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} e^{-(x-\mu)} & \text{falls} \quad x > \mu \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gegeben.

a) Zeigen Sie: $f(x)$ ist Dichte einer Zufallsvariablen X.

b) Bestimmen Sie den Erwartungswert von X.

$\mathbf{E}(X) =$

c) (+2 P.) Zeigen Sie: $\mathbf{E}(\ln(X)) \leq \ln(1+\mu)$

d) Bestimmen Sie die Dichtefunktion $h_Y(y)$ der Zufallsvariablen $Y = \ln(X)$.

e) Erzeugen Sie aus einer im Intervall $(0,1)$ gleichverteilten Zufallszahl, $U \sim R(0,1)$, eine Zufallszahl X mit der Dichte $f(x)$.

f) Seien $Z_1, \ldots, Z_n$ unabhängige Beobachtungen einer Zufallsvariablen mit der Dichte $f(z)$. Geben Sie je eine Momentenschätzung und eine Maximum-Likelihood-Schätzung für den Parameter μ an.

Aufgabe 6: (9 P.+2 P.) Seien

$$M_1 = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad M_2 = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Übergangsmatrizen zweier Markovscher Ketten X_t und Y_t über den Zustandsräumen $S_1 = \{1, 2, 3\}$ bzw. $S_2 = \{1, 2\}$.

a) Klassifizieren Sie die Zustände der durch X_t beschriebenen Markov-Kette (ohne Begründung). Ist die Markov-Kette irreduzibel?

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $p_{11}(2)$ nach genau 2 Schritten von Zustand 1 nach Zustand 1 zurück zu kommen.

$p_{11}(2) =$

c) Bestimmen Sie, falls sie existiert, die stationäre Verteilung der durch die Übergangsmatrix M_2 beschriebenen Markovschen Kette Y_t.

d) Bestimmen Sie die erwartete Anzahl der Schritte von Y_t um erstmals vom Zustand 1 in den Zustand 1 zurück zu kommen.

$\mu_1 =$

e) (+2 P.) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten $f_1(n)$, von Zustand 1 ausgehend, in genau n Schritten erstmalig wieder in den Zustand 1 zurück zu kommen.

$f_1(n) =$

f) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit F_1 irgendwann in den Zustand 1 zurück zu kommen.

$F_1 =$

Aufgabe 7: (7 P.) Sei $\{X_n\}$ eine Folge von normalverteilten Zufallsvariablen, jeweils mit Erwartungswert Null und Varianz $\frac{1}{n}$, $X_n \sim \mathcal{N}(0, \frac{1}{n})$, und die Zufallsvariable X habe eine Einpunktverteilung an der Stelle Null, d.h. $X \equiv 0$.

a) Zeigen Sie $P(|X_n - X| > \epsilon) \leq \frac{1}{n\epsilon^2}$

b) Berechnen Sie

$P(|X_n - X| > \epsilon) =$

Hinweis: Die Verteilungsfunktion einer standardnormalverteilten Zufallsvariablen haben wir mit Φ bezeichnet.

Bei den folgenden 3 Aufgaben kreuzen Sie bitte die richtige Antwort an.

c) Konvergiert die Folge $\{X_n\}$ in Wahrscheinlichkeit? ja/nein

d) Konvergiert die Folge $\{X_n\}$ im quadratischen Mittel? ja/nein

e) Konvergiert die Folge $\{X_n\}$ in Verteilung? ja/nein