28022018

Aufgabe 1: (8 P.) Sei die folgende (unvollständige) Wahrscheinlichkeitstabelle eines zweidimensionalen Vektors (X, Y) gegeben.

$X \backslash Y$	-1	0	1	$\sqrt{2.5}$	
-1	0.2	.	0.1	.	0.3
0	.	0.1	.	0.2	.
1	.	.	0.2	.	.
2	.	0.1	.	.	.
	.	0.3	.	.	1

a) Berechnen Sie die restlichen Einträge.
b) Berechnen Sie den Erwartungswert von X und die Varianzen von X und Y.
c) Bestimmen Sie den Korrelationskoeffizienten $\rho(X, Y)$.
d) Sind X und Y unabhängig?

Hinweis: Alle Teilaufgaben können in jeweils 1-2 Minuten erledigt sein. Wenn Sie einen Taschenrechner benötigen, dann rechnen Sie zuviel.
Lösungen zu Aufgabe 1a) können Sie direkt auf dem Aufgabenblatt eintragen.

Aufgabe 2: (6 P.) Sei $X_1, X_2, \ldots$ eine Folge von Zufallsvariablen mit

$$X_n : \quad \begin{pmatrix} -n & 0 & n \\ \frac{1}{n} & 1 - \frac{2}{n} & \frac{1}{n} \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie Erwartungswert und Varianz von X_n.
b) Zeigen Sie, dass X_n in Wahrscheinlichkeit gegen 0 konvergiert.
c) Zeigen Sie, X_n konvergiert nicht im quadratischen Mittel.

Aufgabe 3: (11 P.) Ein Computerprogramm mit 50 Seiten Programmcode habe im Mittel zwei Fehler pro Seite.

a) Finden Sie ein geeignetes Modell für die zufällige Anzahl X_i der Fehler pro Seite.

   $X_i \sim$

b) Berechnen Sie, unter Modell von Aufgabe 3a die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig gewählte Seite keinen Fehler enthält.
c) Finden Sie ein geeignetes Modell für die zufällige Gesamtanzahl X der Fehler im Programm.

   $X \sim$

d) Wir nehmen an, die zufälligen Fehlerzahlen pro Seite sind unabhängig voneinander. Approximieren Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Gesamtanzahl der Fehler im Programm kleiner als 80 ist.
e) Finden Sie ein geeignetes Modell für die zufällige Anzahl Y der Seiten bis (endlich) eine Seite ohne Fehler vorliegt.

   $Y \sim$

Hinweise: $\Phi(2) \approx 0.9772$, $e^{-2} \approx 0.135, e^2 \approx 7.39$.
Lösungen zu Aufgaben 3a, 3c, 3e können Sie direkt auf dem Aufgabenblatt eintragen.

Aufgabe 4: (9 P.) Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = c \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & |x| \geq 4 \\ \frac{1}{16}, & x \in (-4, 4) \end{cases}$$

a) Bestimmen Sie den Faktor c so dass $f(x)$ Dichtefunktion einer Zufallsvariablen X ist.
b) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion von X.
c) Sei eine gleichverteilte Zufallszahl $U \sim R(0,1)$ gegeben. Erzeugen Sie eine Zufallszahl X mit der Dichte $f(x)$.
d) Berechnen Sie die Dichte von $Y = e^X$.

Aufgabe 5: (7 P.) Gegeben sei die Funktion zweier Veränderlicher

$$f(x) = c \cdot x^2 y^2, \qquad x, y \in (0, 1)$$

a) Bestimmen Sie den Faktor c so dass $f(x, y)$ Dichtefunktion einer zweidimensionalen Zufallsvariablen (X, Y) ist.
b) Bestimmen Sie die Randdichten von X und Y.
c) Berechnen Sie die Erwartungswerte und die Varianzen von X und Y. Kürzen Sie die Brüche soweit wie möglich.
d) Bestimmen Sie den Korrelationskoeffizienten von X und Y.

Aufgabe 6: (9 P.+5 P.) Es sei

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

Übergangsmatrix einer homogenen Markov-Kette über dem Zustandsraum $S = \{1, 2, 3\}$.

a) Klassifizieren Sie die Zustände der durch M beschriebenen Markov-Kette (ohne Begründung). Ist die Markov-Kette irreduzibel?
b) Bestimmen Sie, falls sie existiert, die stationäre Verteilung von M.
c) Bestimmen Sie die erwartete Anzahl der Schritte um vom Zustand 1 in den Zustand 1 zurück zu kommen.
d) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten $f_1(1), f_1(2), f_1(3)$, von Zustand 1 ausgehend, in genau $1, 2$ bzw. 3 Schritten erstmalig wieder in den Zustand 1 zurück zu kommen.
e) (+4 P.) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit $f_1(n)$, von Zustand 1 ausgehend, in genau n Schritten erstmalig wieder in den Zustand 1 zurück zu kommen.
f) (+1 P.) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit F_1 irgendwann in den Zustand 1 zurück zu kommen.