HUMBOLDT-UNIVERSITÄT ZU BERLIN
Institut für Informatik
Priv.-Doz. Dr. W. Kössler

Aufgaben zur
"Stochastik für Informatiker"

Für diese Blatt gibt es 16 Punkte. Beachten Sie die Rückseite.

Aufg. 40) (2 P.) Klassifizieren Sie die Zustände der durch die Übergangsmatrizen M_1 und M_2 gegebenen Markov'schen Kette!

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/4 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 2/3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufg. 41) Es sei $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Markov'sche Kette mit den Übergangswahrscheinlichkeiten

$$M = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 3/4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/4 & 1/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

a) (1 P.) Klassifizieren Sie die Zustände!

b) (2 P.) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit $f_1(n)$ erstmalig nach n Schritten in den Zustand 1 zurückzukehren.

c) (2 P.) Berechnen Sie die mittlere Rückkehrzeit in den Zustand 1, d.h.

$$\mu_1 = E(T_1|X_0 = 1), \quad \text{wobei} \quad T_1 = inf\{n \geq 1 : X_n = 1\}!$$

Aufg. 42) (3 P.) Harry's Restaurant wechselt von Jahr zu Jahr zwischen den Zuständen 0 (bankrott), 1 (nahezu bankrott) und 2 (solvent). Die Übergangsmatrix ist

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

a) Berechnen Sie den Erwartungswert für die Anzahl der Jahre bis der Zustand 0 erreicht wird, wenn im Zustand 2 gestartet wird!

b) Harry's reicher Onkel Dagobert kann es nicht ertragen, dass jemand aus seiner Familie bankrott ist und fürchtet einen Imageverlust in der Öffentlichkeit. Jedes mal wenn der Zustand 0 erreicht wird, versetzt er deshalb Harry's Restaurant durch eine kräftige Finanzspritze in den Zustand 2. Wie groß ist nun der Erwartungswert $\mu_{20} = E(T_{20})$, wobei $T_{20} = inf\{n \geq 0 : X_n = 0/X_0 = 2\}$?

Aufg. 43) Es sei

$$P = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.3 & 0.4 \\ 0.2 & 0.7 & 0.1 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \end{pmatrix}$$

die Übergangsmatrix einer Markov'schen Kette mit dem Zustandsraum $S = \{0, 1, 2\}$.

a) (2 P.) Berechnen Sie $P(X_{16} = 2/X_0 = 0)$!

b) (2 P.) Berechnen Sie $P(X_{12} = 2, X_{16} = 2/X_0 = 0)$!

Hinweis: Sie sollten die Lösung nicht per Hand oder mit einem Taschenrechner bestimmen!

c) (2 P.) Berechnen Sie $f_{00}(5)$ und

$$\mu_0 = E(T_0/X_0 = 0), \quad \text{wobei} \quad T_0 = inf\{n \geq 0 : X_n = 0\}!$$