3 Bedingte Wahrscheinlichkeit, Unabhängigkeit von Ereignissen

3.1 Einführung

Bsp. 19 (3-maliges Werfen einer Münze)

Menge der Elementarereignisse:

$$\Omega = \{zzz, zzw, zwz, wzz, zww, wzw, wwz, www\}.$$

$|\Omega| = 2^3 = 8 = N$ *Wir definieren zwei Ereignisse:*

A: *Das Wappen fällt genau einmal, d.h.:*

$$A = \{zzw, zwz, wzz\}.$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{N} = \frac{3}{8}.$$

B: *Die Anzahl der Wappenwürfe ist ungerade,d.h.:*

$$B = \{zzw, zwz, wzz, www\}.$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{N} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

Wir nehmen jetzt an, das Ereignis B sei bereits eingetreten. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß unter dieser Bedingung das Ereignis A eintritt? Offenbar $A \subset B$. Bei diesem Experiment ist die Menge der Elementarereignisse die Menge B. Damit gilt $N = 4$. Folglich erhalten wir:

$$P(A, \textit{falls } B \textit{ bereits eingetreten ist}) = P(A/B) = \frac{3}{4}.$$

Def. 9 *Es seien* $A, B \in \mathcal{E}$ *zwei zufällige Ereignisse und es gelte* $P(B) > 0$. *Dann wird*

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

als *<u>bedingte Wahrscheinlichkeit</u>* *von* A *unter der Bedingung* B *bezeichnet.*

Bem.: Oft wird auch die folgende Bezeichnung verwendet:

$$P_B(A) := P(A/B).$$

Bem.: Wir unterscheiden folgende Fälle:

1. $A \supseteq B$:
   Dann gilt: $P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$.
2. $A \subseteq B$:
   Dann gilt: $P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)}$.
3. $A \cap B \neq \emptyset$ (teilweise Überschneidung):
   Dann gilt: $P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$.

Def. 10 *Zwei Ereignisse $A, B \in \mathcal{E}$ heißen <u>unabhängig</u>, wenn gilt:*

$$P(A/B) = P(A).$$

Bem.: Für zwei unabhängige Ereignisse gilt:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Bsp. 20 (Skatblatt) *Skatspiel mit 32 Karten. Daraus wird eine Karte gezogen. (*$N = |\Omega| = 32$*).*
Wir betrachten die beiden folgenden zufälligen Ereignisse:

A: *Ziehen eines Königs.*

$$P(A) = \frac{n(A)}{N} = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}.$$

B: *Ziehen einer Herzkarte.*

$$P(B) = \frac{n(B)}{N} = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}.$$

Sind diese beiden Ereignisse voneinander unabhängig?

Offenbar $P(B) > 0$. Es sei eine Herzkarte gezogen worden (Ereignis B also eingetreten). Wahrscheinlichkeit, daß dann der Herzkönig gezogen wurde:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{32}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{8} = P(A).$$

Folglich sind nach Definition 10 die Ereignisse A und B voneinander unabhängig.

Satz 4 *Es seien* $A, B \in \mathcal{E}$ *zwei Ereignisse, wobei* $P(B) > 0$ *gelte. Dann genügt die bedingte Wahrscheinlichkeit* P_B *den* KOLMOGOROFF*–Axiomen. D.h. das Tripel* $(\Omega, \mathcal{E}, P_B)$ *ist ein Wahrscheinlichkeitsraum.*

Beweis: Wir zeigen stellvertretend Axiom 2. Es gilt:

$$\begin{aligned} P_B(\Omega) &= P(\Omega/B) \\ &= \frac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1 \end{aligned}$$

Die anderen beiden Axiome (vgl. Definition 6) sind ebenfalls erfüllt. □

Satz 5 *Es seien $A, B, C \in \mathcal{E}$ drei Ereignisse. Dann gilt:*

$$P_B(A/C) = P(A/B \cap C).$$

Beweis: Es gilt:

$$\begin{aligned} P_B(A/C) &= \frac{P_B(A \cap C)}{P_B(C)} \\ &= \frac{P(A \cap C/B)}{P(C/B)} \\ &= \frac{P(A \cap B \cap C) \cdot P(B)}{P(B) \cdot P(B \cap C)} \\ &= \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(B \cap C)} \\ &= P(A/B \cap C) \end{aligned}$$

$\square$

Lemma 6 *Es seien* $A, B \in \mathcal{E}$ *zwei unabhängige Ereignisse. Dann sind die Ereignisse* A *und* $\overline{B}$ *ebenfalls unabhängig. Gleiches gilt für die Ereignisse* $\overline{A}$ *und* B *sowie für* $\overline{A}$ *und* $\overline{B}$.

Beweis: Wir zeigen die Aussage am Beispiel der Ereignisse

A und $\overline{B}$. Es gilt:

$$\begin{aligned}
P(A/\overline{B}) &= \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} \\
&= \frac{P(A \setminus (A \cap B))}{1 - P(B)} \quad \text{(Folgerung 2.1))} \\
&= \frac{P(A) - P(A \cap B)}{1 - P(B)} \quad \text{(Folgerung 2.3b))} \\
&= \frac{P(A) - P(A)P(B)}{1 - P(B)} \\
&= \frac{P(A)(1 - P(B))}{1 - P(B)} \\
&= P(A)
\end{aligned}$$

Diese beiden Ereignisse sind folglich unabhängig.

Zusammenfassend gilt

$$
\begin{aligned}
P(A/B) = P(A) \quad &\Longleftrightarrow \quad P(A/\overline{B}) = P(A) \\
&\Longleftrightarrow \quad P(\overline{A}/\overline{B}) = P(\overline{A}) \\
&\Longleftrightarrow \quad P(\overline{A}/B) = P(\overline{A})
\end{aligned}
$$

$\square$

3.2 Satz der Totalen Wahrscheinlichkeit

Def. 11 *Es sei* $(\Omega, \mathcal{E}, P)$ *ein Wahrscheinlichkeitsraum. Eine Folge von Ereignissen*

$$\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \; (A_n \in \mathcal{E}, \forall n \in \mathbb{N})$$

heißt vollständig (oder ausschöpfend), falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \Omega$;
2. $A_i \cap A_j = \emptyset$, *für alle* $i \neq j$.

Satz 7 *Es sei* $A_1, A_2, \ldots$ *eine vollständige Folge von Ereignissen. Weiterhin sei* B *ein beliebiges Ereignis und es gelte* $P(A_i) \neq 0$ *für alle* i *. Dann gilt:*

$$P(B) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B|A_i)P(A_i).$$

Dieser Ausdruck heißt

Formel der totalen Wahrscheinlichkeit.

Beweis: Aus $B = B \cap (\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \bigcup_{i=1}^{\infty}(B \cap A_i)$ folgt (da die $(B \cap A_i)$ ebenfalls unvereinbar sind):

$$\begin{aligned} P(B) &= P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}(B \cap A_i)\right) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} P(B \cap A_i) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} P(B|A_i)P(A_i) \end{aligned}$$

$\square$

Bsp. 21 (Binärkanal)

Bei der Übertragung auf einem binären kanal kommen die Zeichen '0' und '1' im Verhältnis 3:4 vor.

Ein '0' wird mit Wkt. von 0.2 fehlerhaft übertragen

Ein '1' wird mit Wkt. von 0.3 fehlerhaft übertragen

ges.: Wkt. für eine fehlerhafte Übertragung
Wkt., dass ein '0' empfangen wird.

Ereignisse:

S_0: *'0' wird gesendet,* $P(S_0) = \frac{3}{7}$

S_1: *'1' wird gesendet,* $P(S_1) = \frac{4}{7}$

E_0: *'0' wird empfangen*

E_1: *'1' wird empfangen*

$$P(E_1|S_0) = 0.2, \qquad P(E_0|S_1) = 0.3$$

F: Ereignis, das ein Übertragungsfehler vorliegt

$$\begin{aligned} P(F) &= P(E_1, S_0) + P(E_0, S_1) \\ &= P(E_1|S_0) \cdot P(S_0) + P(E_0|S_1) \cdot P(S_1) \\ &= \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{7} + \frac{3}{10} \cdot \frac{4}{7} = \frac{18}{70} \approx 0.2571 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(E_0) &= P(E_0|S_0) \cdot P(S_0) + P(E_0|S_1) \cdot P(S_1) \\ &= \frac{8}{10} \cdot \frac{3}{7} + \frac{3}{10} \cdot \frac{4}{7} = \frac{18}{35} \approx 0.5143 \end{aligned}$$

3.3 Satz von Bayes

Gegeben: $P(A_i)$ und $P(A/A_i)$, ($i \in \mathbb{N}$).

Gesucht: $P(A_i/A)$.

Unter Benutzung der Definition der bedingte Wahrscheinlichkeit und der Formel für die totale Wahrscheinlichkeit erhalten wir:

$$
\begin{aligned}
P(A_i/A) &= \frac{P(A_i \cap A)}{P(A)} \\
&= \frac{P(A_i) \cdot P(A/A_i)}{P(A)} \\
&= \frac{P(A_i) \cdot P(A/A_i)}{\sum_{j=1}^{\infty} (P(A/A_j) \cdot P(A_j))} \quad \text{(Formel der totalen Wkt)}
\end{aligned}
$$

Der Ausdruck

$$
P(A_i/A) = \frac{P(A_i) \cdot P(A/A_i)}{\sum_{j=1}^{\infty} (P(A/A_j) \cdot P(A_j))}
$$

heißt <u>Formel von Bayes</u> (bzw. <u>Theorem von Bayes</u>).

Bsp. 22 (Binärkanal, Fortsetzung)

$$\begin{aligned}
P(S_0|E_0) &= \frac{P(E_0|S_0)P(S_0)}{P(E_0|S_0)P(S_0) + P(E_0|S_1)P(S_1)} \\
&= \frac{\frac{8}{10}\cdot\frac{3}{7}}{\frac{8}{10}\cdot\frac{3}{7} + \frac{3}{10}\cdot\frac{4}{7}} = \frac{24}{24+12} = \frac{2}{3} \\
P(S_1|E_1) &= \frac{P(E_1|S_1)P(S_1)}{P(E_1|S_0)P(S_0) + P(E_1|S_1)P(S_1)} \\
&= \frac{\frac{7}{10}\cdot\frac{4}{7}}{\frac{2}{10}\cdot\frac{3}{7} + \frac{7}{10}\cdot\frac{4}{7}} = \frac{28}{28+6} = \frac{14}{17}
\end{aligned}$$

3.4 Anwendung bedingter Wahrscheinlichkeiten

Bsp. 23 *Betrachtet werden mehrere Kanonen. Für* $i \in \mathbb{N}$ *bezeichne* A_i *das Ereignis, daß Kanone* i *einen Schuß abgibt.* A *sei das Ereignis, daß ein Treffer erzielt wird. Nun kann die Wahrscheinlichkeit* $P(A/A_i)$ *ermittelt werden, also die Wahrscheinlichkeit, daß Kanone* i *einen Treffer erzielt.*

modifiziert als ÜA.

Bsp. 24 Aufbau eines Expertensystems

Vgl. ÜA.

Aufbau der Wissensbasis:

K_i	$P_0(K_i)$	Symptom Nr. 1	$P(S_1/K_i)$	$P(S_1/\overline{K_i})$
		Symptom Nr. 2	$P(S_2/K_i)$	$P(S_2/\overline{K_i})$
		Symptom Nr. 3	$P(S_3/K_i)$	$P(S_3/\overline{K_i})$

K_i – bestimmte Ereignisse (z.B. Krankheiten)

$P_0(K_i)$ – a–priori–Wahrscheinlichkeit für K_i

$P(S/K)$ – Wkt für Symptom S, falls K vorliegt

$P(S/\overline{K})$ – Wkt für Symptom S, falls K nicht vorliegt

"Inferenzmaschine"

$$
\begin{aligned}
P(K|S) &= \frac{P(S|K) \cdot P(K)}{P(S)} \\
P(K|\overline{S}) &= \frac{P(\overline{S}|K) \cdot P(K)}{P(\overline{S})} \\
P(S) &= P(S|K) \cdot P(K) + P(S|\overline{K}) \cdot P(\overline{K}) \\
P(\overline{S}) &= 1 - P(S)
\end{aligned}
$$

Arbeitsweise:

Krankheiten $K_1, \ldots, K_K$

Symptome $S_1, \ldots, S_S$

$I_0 = \{1, \ldots, K\}; \qquad J = \{1, \ldots, S\}$

$l = 0$; $P_0 = P$; $\quad \forall (i, j) \in I_lxJ$:

$$\begin{aligned}
P_l(S_j) &:= P(S_j|K_i) \cdot P_l(K_i) + P(S_j|\overline{K}_i) \cdot P_l(\overline{K}_i) \\
P_l(K_i|S_j) &= \frac{P(S_j|K_i) \cdot P_l(K_i)}{P(S_j)} \\
P_l(K_i|\overline{S}_j) &= \frac{P_l(\overline{S_j}|K_i) \cdot P_l(K_i)}{P_l(\overline{S}_j)}
\end{aligned}$$

a: ($l = 0$: ärztliches Wissen)

$$r(j) := \sum_{i \in I_l} |P_l(K_i|S_j) - P(K_i|\overline{S}_j)| \quad \forall \quad j \in J;$$

$j_l :=$ argmax$_{j\in J} r(j)$ das Symptom mit dem größten $r(j)$.

b: Frage an den Patienten nach Symptom S_{j_l}.

$P(K_i)$ wird aktualisiert (Abbildung).

Dann wieder $\forall (i,j) \in I_l$xJ:

$$\begin{aligned}
P_{l+1}(S_j) &:= P(S_j|K_i)\cdot P_{l+1}(K_i) + P(S_j|\overline{K}_i)\cdot P_{l+1}(\overline{K}_i)\\
P_{l+1}(K_i|S_j) &:= \frac{P(S_j|K_i)\cdot P_{l+1}(K_i)}{P(S_j)}\\
P_{l+1}(K_i|\overline{S}_j) &:= \frac{P(\overline{S_j}|K_i)\cdot P_{l+1}(K_i)}{P(\overline{S}_j)}
\end{aligned}$$

c:

$$m_i := \max_{j \in J} |P_{l+1}(K_i|S_j) - P_{l+1}(K_i|\overline{S}_j)|, \quad \forall i \in I_l$$

$$\begin{aligned} I_{l+1} &= I_l \setminus \{i \in I_l : m_i < c\} \\ J_{l+1} &= J_l \setminus \{j_l\}; \end{aligned}$$

$l := l + 1;$

/* Abbruchbedingung, z.B.

$I_l = I_{l+1}, S_{j_l} = S_{j_{l+1}}, I_{l+1} = \{i\}$ oder $J_{l+1} = \emptyset$ */

goto a;

end.

Bsp. 25 Langzeitverhalten eines Ein–Prozessorsystems mit einer I/O–Einheit

Wir betrachten ein Ein–Prozessorsystem, das auf folgende Weise arbeiten soll: Wenn ein Programm beendet wird, so wird mit Wahrscheinlichkeit p *(*$0 < p < 1$*) die I/O–Einheit aktiviert, und mit Wahrscheinlichkeit* $q = 1 - p$ *erfolgt ein erneuter Programmstart. Nach Beendigung eines I/O–Vorgangs wird immer ein neues Programm gestartet.*

Frage: Mit welcher Wahrscheinlichkeit befindet sich das System im n*–ten Zyklus im Programmzustand?*

Wir legen fest ($n = 1, 2, 3, \ldots$*):*

A_n - *Ereignis, daß im* n*–ten Zyklus ein Programm startet*

$\overline{A_n}$ - *Ereignis, daß im* n*–ten Zyklus die I/O–Einheit aktiviert wird*

gesucht: $P(A_n)$ *. Langzeitverhalten (*$\lim_{n\to\infty} P(A_n)$*).*

$P(A_1) = 1$, denn es wird beim Einschalten des Systems immer mit einem Programm begonnen.

Aus der anfangs angegebenen Beschreibung der Arbeitsweise des Systems folgt:

$$\begin{aligned}
P(A_{n+1}/A_n) &= q = 1-p \\
P(\overline{A_{n+1}}/A_n) &= p \\
P(\overline{A_{n+1}}/\overline{A_n}) &= 0 \\
P(A_{n+1}/\overline{A_n}) &= 1
\end{aligned}$$

Wir bezeichnen $q_n := P(A_n)$. Wir ermitteln die ersten drei

Werte:

$$\begin{aligned}
q_1 &= P(A_1) = 1 \\
q_2 &= P(A_2) \\
&= P(A_2/A_1) \cdot P(A_1) + \underbrace{P(A_2/\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_1})}_{=0} \quad \text{(totale Wkt.)} \\
&= q = 1 - p \\
q_3 &= P(A_3) \\
&= P(A_3/A_2) \cdot P(A_2) + P(A_3/\overline{A_2}) \cdot P(\overline{A_2}) \\
&= q \cdot q + 1 \cdot (1 - q) = (1 - p)^2 + p = 1 - p + p^2
\end{aligned}$$

Vermutung:

$$q_n = P(A_n) = \sum_{i=0}^{n-1} (-p)^i.$$

Beweis: (vollständige Induktion):

IA: Es sei $n = 1$: $\quad q_1 = 1.$

IS: Wir nehmen an, daß die Formel für n gilt. Wir zeigen die

Gültigkeit für $n+1$:

$$\begin{aligned}
q_{n+1} &= P(A_{n+1}) \\
&= P(A_{n+1}/A_n) \cdot P(A_n) + P(A_{n+1}/\overline{A_n}) \cdot P(\overline{A_n}) \\
&= q \cdot q_n + 1 \cdot (1 - q_n) = 1 + (q-1) \cdot q_n \\
&= 1 - p \cdot q_n \\
&= 1 - p \cdot \sum_{i=0}^{n-1} (-p)^i \quad \text{(nach IV)} \\
&= 1 + \sum_{i=1}^{n} (-p)^i = \sum_{i=0}^{n} (-p)^i
\end{aligned}$$

$\square$

Untersuchen wir noch das Langzeitverhalten:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} P(A_n) &= \lim_{n\to\infty} q_n \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} (-p)^i \\ &= \frac{1}{1-(-p)} = \frac{1}{1+p},\end{aligned}$$

geometrische Reihe mit $|-p| < 1$.

Frage: Sind die Ereignisse A_{n+1} und A_n unabhängig? Nach der Formel für die bedingte Wahrscheinlichkeit (vgl. Definition 9) gilt:

$$\begin{aligned} P(A_{n+1} \cap A_n) &= P(A_{n+1}/A_n) \cdot P(A_n) \\ &= q \cdot q_n \end{aligned}$$

Wären die beiden Ereignisse unabhängig, so müßte gelten (vgl. Definition 10):

$$\begin{aligned} P(A_{n+1}/A_n) &= P(A_{n+1}) \\ q &= q_{n+1} \end{aligned}$$

Aber, für $n \geq 2$ gilt $q \neq q_{n+1}$. Also sind die Ereignisse A_n und A_{n+1} nicht unabhängig.

Der gesamte Ablauf läßt sich eindeutig in Matrixform darstellen:

	I/O	A
I/O	0	1
A	p	$1-p$

Weitere Anwendungen

Bsp. 26 (Zuverlässigkeitstheorie) *Wir betrachten ein Reihen-System mit 2 Bauteilen, die unabhängig voneinander ausfallen,*

p_i: *Ausfallwkt. für Bauteil* i

Fall: System fällt (innerhalb eines best. Zeitraumes) aus. Wie groß ist Wkt., dass genau das erste Bauteil ausgefallen ist?

A_i: Ereignis, dass Bauteil i ausfällt.

geg.: $P(A_i) = p_i, i = 1, 2$

ges.: $P(A_1 \cap \overline{A}_2 | A_1 \cup A_2)$?

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap \overline{A}_2 | A_1 \cup A_2) &= \frac{P((A_1 \cap \overline{A}_2) \cap (A_1 \cup A_2))}{P(A_1 \cup A_2)} \\ &= \frac{P(A_1 \cap \overline{A}_2)}{P(A_1 \cup A_2)} \quad \text{Distr.gesetz} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{P(A_1) \cdot P(\overline{A}_2)}{P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)} \quad \text{UA, Subtraktivität} \\ &= \frac{p_1(1 - p_2)}{p_1 + p_2 - p_1 p_2} \end{aligned}$$

Analog

$$P(A_2 \cap \overline{A}_1 | A_1 \cup A_2) = \frac{p_2(1-p_1)}{p_1 + p_2 - p_1 p_2}$$

Wkt. für Ausfall beider Bauteile: ÜA

Bsp. 27 (Münzwurf-Spiel) *A und B spielen: Münze wird abwechselnd geworfen. Es gewinnt, wer zuerst Blatt hat.*

B: Ereignis, dass bei einem Wurf Blatt kommt

Z: Ereignis, dass bei einem Wurf Zahl kommt

E: Ereignis, dass A gewinnt

F: Ereignis, dass B gewinnt

G: Spiel endet nicht.

$$\begin{aligned}
P(E) &= P(B) + P(ZZB) + P(ZZZZB) + \cdots \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{4^i} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
P(F) &= P(ZB) + P(ZZZB) + P(ZZZZZB) + \cdots \\
&= \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} \\
&= \frac{1}{4}\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{4^i} = \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

oder (unter Anwendung der bedingten Wktn.)

$$
\begin{aligned}
P(F) &= P(F|B) \cdot P(B) + P(F|Z) \cdot P(Z) \\
&= 0 \cdot \frac{1}{2} + P(E) \cdot \frac{1}{2} \quad \text{\textit{2. wird 1. Spieler}} \\
P(E) &= P(E|B) \cdot P(B) + P(E|Z) \cdot P(Z) \\
&= 1 \cdot \frac{1}{2} + P(F) \cdot \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

lineares Gleichungssystem lösen $\rightarrow$ *obiges Ergebnis.*

Bsp. 28 (Ruin des Spielers) *Irrfahrt auf der Geraden mit 2 absorbierenden Zuständen,* a *und* $a+b$

a: *Startkapital Spieler A*
b: *Startkapital Spieler B*

E_k: *Ereignis, dass der Spieler, der* k *Euro besitzt, ruiniert wird.*

$$p_k = P(E_k)$$

A_{-1}: *Ereignis, im nächsten Schritt ein Euro zu verlieren.*

A_{+1}: *Ereignis, im nächsten Schritt ein Euro zu gewinnen.*

$$
\begin{aligned}
p_k &= P(E_k|A_{-1}) \cdot P(A_{-1}) + P(E_k|A_{+1}) \cdot P(A_{+1}) \quad \text{totale Wkt.}\\
&= \frac{1}{2}(p_{k-1} + p_{k+1})
\end{aligned}
$$

Daraus folgt:

$$
\begin{aligned}
2p_k &= p_{k+1} + p_{k-1}\\
p_{k+1} - p_k &= p_k - p_{k-1} =: d
\end{aligned}
$$

Offenbar: $p_0 = 1, \quad p_{a+b} = 0$

$$\begin{aligned}
p_k &= \underbrace{p_k - p_{k-1}}_{=d} + p_{k-1} - + \cdots + \underbrace{p_1 - p_0}_{=d} + p_0 \\
&= kd + 1 \\
p_{a+b} &= (a+b)d + 1 = 0 \Rightarrow d = -\frac{1}{a+b} \\
p_k &= 1 - \frac{k}{a+b} \\
p_a &= 1 - \frac{a}{a+b} = \frac{b}{a+b} \\
p_b &= \frac{a}{a+b}
\end{aligned}$$