

5 Zufallsvariablen (allgemein)

5.1 Grundbegriffe

Def. 12 *Es seien $(\Omega_1, \mathcal{E}_1, P_1)$ und $(\Omega_2, \mathcal{E}_2, P_2)$ Wahrscheinlichkeitsräume. Eine Abbildung*

$$X : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$$

heißt \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 -meßbar, falls für alle Ereignisse $A \in \mathcal{E}_2$ gilt:

$$X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega_1 : X(\omega) \in A\} \in \mathcal{E}_1.$$

Bem.: Oftmals wird die Menge \mathcal{B}^1 der BOREL-Mengen als Ereignisfeld \mathcal{E}_2 betrachtet.

Def. 13 *Es sei (Ω, \mathcal{E}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum. Eine \mathcal{E} - \mathcal{B}^1 -meßbare Abbildung X von Ω in \mathbb{R} heißt (reellwertige) zufällige Variable oder Zufallsgröße.*

Bem.: $(\mathbb{R}, \mathcal{B}^1, P')$ bildet hier den zweiten Wahrscheinlichkeitsraum, wobei P' eine Abbildung von \mathcal{B}^1 in \mathbb{R} ist, die den KOLMOGOROFF-Axiomen genügt.

Wir betrachten den Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{E}, P) .

$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$. sei eine zufällige (reellwertige) Variable.

Den zweiten Wahrscheinlichkeitsraum bezeichnen wir mit $(\mathbb{R}, \mathcal{B}^1, P_X)$. Es sei $B \in \mathcal{B}^1$ ein zufälliges Ereignis, für das gilt:

$$B =] - \infty, x[,$$

wobei x eine beliebige, fest gewählte reelle Zahl ist. Mit $\{X < x\}$ bezeichnen wir das zufällige Ereignis, für das gilt:

$$\{X < x\} := \{\omega \in \Omega : X(\omega) < x\}.$$

Dann gilt für die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses:

$$\begin{aligned} P(X < x) &= P(\{\omega : X(\omega) < x\}) = P(\{\omega : X(\omega) \in B\}) \\ &= P(X^{-1}(B)) =: P_X(B) \end{aligned}$$

Für alle zufälligen Ereignisse $B \in \mathcal{B}^1$ bezeichnen wir also:

$$\underline{P_X(B) := P(X^{-1}(B))}.$$

Def. 14 *Es sei $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ eine zufällige Variable, (Ω, \mathcal{E}, P) und $(\mathbb{R}, \mathcal{B}^1, P_X)$ seien Wahrscheinlichkeitsräume.*

Dann heißt die Funktion

$$F_X(x) := P(X < x) = P_X (] - \infty, x[)$$

Verteilungsfunktion von X .

Bem.: Der Einfachheit halber werden wir die Funktion F_X einfach nur mit F bezeichnen.

Bem.: Manchmal wird die Verteilungsfunktion auch durch

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

definiert (bei SAS z.B.)

Diskrete Zufallsvariablen

Eine diskrete Zufallsgröße X nimmt höchstens abzählbar viele verschiedene Werte mit positiver Wahrscheinlichkeit an. Das heißt, X ist eine Abbildung der folgenden Form:

$$X: \Omega \longrightarrow \{x_i: i \in \mathbb{N}\} =: W \subset \mathbb{R}.$$

Wir notieren das in der Form:

$$X: \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n & \dots \end{pmatrix}$$

Dabei sind die $x_i \in \mathbb{R}$ die Werte, die die Zufallsgröße annehmen kann. Die p_i sind die Wahrscheinlichkeiten, mit

denen diese Werte angenommen werden. Es gilt:

$$p_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1, \quad p_i = P(X = x_i).$$

Wenn wir Mengen A_i definieren durch

$$A_i := \{\omega : X(\omega) = x_i\}, \quad \forall i \in \mathbb{N},$$

so gilt offenbar:

$$A_i \cap A_j = \emptyset, \quad \forall i, j \in \mathbb{N}, i \neq j.$$

Allgemein gilt dann:

$$P(X = x) = \begin{cases} p_i, & \text{falls } x = x_i \\ 0, & \text{falls } x \neq x_i \end{cases} \quad \forall x_i \in W, i \in \mathbb{N}.$$

Das bedeutet für die Verteilungsfunktion:

$$\begin{aligned} F(x) &= P(X < x) = P\left(\bigcup_{i: x_i < x} A_i\right) \\ &= \sum_{i: x_i < x} P(A_i) = \sum_{i: x_i < x} p_i \end{aligned}$$

D.h.: Eine diskrete Zufallsgröße, die die Werte $\{x_i : i \in \mathbb{N}\}$ annimmt, wobei $x_1 < x_2 < x_3 < \dots$ gilt, hat die folgende Verteilungsfunktion:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x \leq x_1 \\ \sum_{i: x_i < x} p_i, & \text{falls } x_1 < x \end{cases}$$

Betrachten wir eine Menge $B \in \mathcal{B}^1$, so können wir feststellen:

$$P_X(B) = P(\{\omega : X(\omega) \in B\}) = \sum_{i: x_i \in B} p_i.$$

Bsp. 31 *Es sei*

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \end{pmatrix}$$

Die Zufallsvariable X heißt diskret gleichverteilt auf der Menge $\{x_1, \dots, x_n\}$.

Bsp. 32 Sei X eine diskrete Zufallsgröße,

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & n \\ p_0 & p_1 & \dots & p_n \end{pmatrix}$$

mit

$$P(X = i) = p_i = \binom{n}{i} p^i \cdot (1-p)^{n-i} > 0, \quad \text{mit } 0 < p < 1.$$

Bez. 1 Die Zufallsvariable X heißt binomialverteilt, bez.:
 $X \sim B(p, n)$ oder $X \sim Bi(p, n)$.

Wir haben oben gesehen, daß

$$\sum_{i=0}^n p_i = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} = (p + 1 - p)^n = 1.$$

Bsp. 33 Es sei X eine diskrete Zufallsgröße,

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & n & \dots \\ p_0 & p_1 & \dots & p_n & \dots \end{pmatrix}$$

mit

$$P(X = n) = p_n = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}, \quad \lambda > 0.$$

Bez. 2 Die Zufallsvariable X heißt POISSON-verteilt, bez.:
 $X \sim Poi(\lambda)$.

Wir haben oben gesehen, daß

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!}}_{=e^{\lambda}} = 1$$

Stetige Zufallsvariablen

Def. 15 Eine Funktion $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt Dichtefunktion, falls sie die folgenden Eigenschaften hat:

1. Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $f(x) \geq 0$.

2. Es gilt: $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 1$.

Def. 16 Eine zufällige Variable X heißt stetig, falls eine Dichtefunktion f existiert, so daß gilt:

$$P(X < x) = F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt.$$

Falls die Funktion f stetig ist, gilt: $F'(x) = f(x)$.

Bem.: Für die Wahrscheinlichkeit $P(X = x)$ gilt

$$P(X = x) = \int_x^x f(t) dt = 0,$$

sogar wenn X den Wert x tatsächlich annehmen kann! Das heißt jedoch nichts anderes, als daß gilt:

$$P(X \leq x) = P(X < x).$$

Außerdem gilt:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(t) dt.$$

Veranschaulichung: Es sei X eine stetige Zufallsgröße. Wir teilen den Wertebereich von X in Intervalle I_j ein und beobachten für jeden der Versuche X_i , in welches der Intervalle I_j der Wert X_i ($i = 1, \dots, n$) fällt. Es sei $n_j = \#\{X_i \in I_j\}$. Die Länge eines Intervalls I_j bezeichnen wir mit $\Delta(I_j) = \Delta_j$. Desweiteren sei $\Delta_0 = \max_j \{\Delta_j\}$. Wir definieren nun folgende Funktion:

$$f_{emp.}(x) = \frac{\frac{n_j}{n}}{\Delta_j}, \quad \forall x \in I_j.$$

Dann gilt:

$$f(x) = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta_0 \rightarrow 0}} f_{emp.}(x).$$

Dichtefunktion_allg.sas

Bsp. 34 *Es sei die Zufallsvariable X auf dem Intervall $[0, 1[$ definiert mit der Verteilungsfunktion*

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x < 0 \\ x, & \text{falls } 0 \leq x < 1 \\ 1, & \text{falls } x \geq 1 \end{cases} .$$

Bez. 3 *Die Zufallsvariable X heißt auf dem Intervall $[0, 1[$ gleichverteilt,
bez. $X \sim R(0, 1)$ oder $X \sim U(0, 1)$.*

Die Dichtefunktion ist die Funktion f ;

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x < 0 \\ 1, & \text{falls } 0 \leq x < 1 \\ 0, & \text{falls } x \geq 1 \end{cases} .$$

Ist X gleichverteilt auf dem Intervall $[a, b[$, $X \sim R(a, b)$, so hat X die Dichtefunktion:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x < a \\ \frac{1}{b-a}, & \text{falls } a \leq x < b \\ 0, & \text{falls } x \geq b \end{cases} .$$

Für $0 \leq a < b < 1$ gilt:

$$\begin{aligned} P(\{\omega : X(\omega) \in [a, b]\}) &= P(a \leq X \leq b) \\ &= \int_a^b f(x) dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b dx = 1 \end{aligned}$$

Bsp. 35 Die Zufallsvariable X habe die Verteilungsfunktion

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda \cdot x}, & \text{falls } x \geq 0 \\ 0, & \text{falls } x < 0 \end{cases} .$$

Bez. 4 Die Zufallsvariable X heißt exponentialverteilt, bez.

$$X \sim \text{Exp}(\lambda).$$

Die Dichtefunktion ist

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x}, & \text{falls } x \geq 0 \\ 0, & \text{falls } x < 0 \end{cases} .$$

Weiterhin gilt:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1.$$

Bsp. 36 *Sei die Zufallsvariable*

$$X : (\Omega, \mathcal{E}, P) \rightarrow (\mathbb{R}^1, \mathcal{B}^1, P_X)$$

der Meßfehler bei Messung einer physikalischen Konstanten.

*Der W.raum (Ω, \mathcal{E}, P) ist ein Modell eines im Hintergrund wirkenden Zufallsmechanismus, der nicht näher beschrieben werden kann,
Fehler im Meßinstrument
zufällige äußere Einflüsse.*

Er enthält alle nicht näher bestimmbareren zufälligen Effekte.

Zur Beschreibung dient der Bildraum

$$(\mathbb{R}^1, \mathcal{B}^1, P_X).$$

Oft kann man annehmen,

$$P_X(B) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_B e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt.$$

Die Zufallsvariable X mit der Verteilungsfunktion

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt.$$

heißt normalverteilt mit den Parametern (μ, σ^2) ,

bez. $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Die zugehörige Dichtefunktion hat die Form:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \quad \sigma > 0.$$

Ist $f(x)$ wirklich eine Dichtefunktion?

Offensichtlich ist $f(x) \geq 0$ für alle Zahlen $x \in \mathbb{R}$ und $\sigma > 0$. Es bleibt zu untersuchen, ob gilt:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1.$$

Wir bezeichnen

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx =: I.$$

Wir betrachten zunächst:

$$\begin{aligned} I^2 &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx \right)^2 \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma^2} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)^2} dy \right) \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx \right) e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)^2} dy \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)^2} dx dy \end{aligned}$$

Wir führen nun eine Substitution durch:

$$s := \frac{x-\mu}{\sigma} \quad t := \frac{y-\mu}{\sigma}.$$

Dann gilt:

$$x = s\sigma + \mu \quad y = t\sigma + \mu,$$

$$dx = \sigma ds \quad dy = \sigma dt.$$

Wir erhalten damit:

$$\begin{aligned} I^2 &= \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}s^2} e^{-\frac{1}{2}t^2} \sigma^2 ds dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(s^2+t^2)} ds dt \end{aligned}$$

*Wir führen eine weitere Substitution durch,
Polarkoordinaten:*

$$s = r \cos \varphi \quad t = r \sin \varphi.$$

Dann gilt allgemein nach der Substitutionsregel:

$$\int \int g(s, t) ds dt = \int \int g(r, \varphi) \det J dr d\varphi,$$

$$\begin{aligned}\det J = |J| &= \begin{vmatrix} \frac{\partial s}{\partial r} & \frac{\partial s}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial t}{\partial r} & \frac{\partial t}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} \\ &= r \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi \\ &= r(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = r\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi)} r \, dr \, d\varphi \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}r^2} r \, dr \, d\varphi \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[-e^{-\frac{r^2}{2}} \right]_0^{\infty} d\varphi \quad (\text{durch Differentiation leicht nachvollziehbar!}) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{1}{2\pi} 2\pi = 1
\end{aligned}$$

$\implies I = 1$, d.h. f ist eine Dichtefunktion.

Zusammenfassung (Zufallsvariable, Grundbegriffe).

Eine (meßbare) Abbildung

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

heißt Zufallsvariable.

Jedem Element ω des Stichprobenraumes Ω wird eine reelle Zahl zugeordnet.

Def.: Die Zufallsvariable X heißt diskret, wenn X nur endlich viele oder abzählbar unendlich viele Werte x_i annehmen kann. Jeder dieser Werte kann mit einer gewissen Wkt. $p_i = P(X = x_i)$ auftreten.

Bsp.: - geografische Lage (N,O,S,W)

- Länge einer Warteschlange

- Anzahl der erreichten Punkte in der Klausur.

Def.: Die Zufallsvariable X heißt stetig, falls X beliebige Werte in einem Intervall (a, b) , $[a, b]$, $(a, b]$, (a, b) , $(-\infty, a)$, (b, ∞) , $(-\infty, a]$, $[b, \infty)$, $(-\infty, \infty)$ annehmen kann.

Bem.: Jeder einzelne Wert $x_i \in (a, b)$ (oder in einem der anderen Intervalle) hat die Wkt. Null.

Die Verteilungsfunktion F wird dann durch die sogen. Dichtefunktion f beschrieben,

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

5.2 Allgemeine Eigenschaften einer Verteilungsfunktion

Satz 8 *Es sei X eine zufällige Variable mit der Verteilungsfunktion*

$$F(x) = P(X < x) = P(\{\omega : X(\omega) < x\}) = P_X([\!-\infty, x[).$$

Dann gelten die folgenden Aussagen:

- 1. Die Funktion $F(x)$ ist monoton wachsend.*
- 2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$.*
- 3. Die Funktion $F(x)$ ist linksseitig stetig. Es gilt also:*
$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} F(x) = F(x_0).$$

$$4. P(a \leq X < b) = F(b) - F(a).$$

Beweis:

1. Es sei $x_1 < x_2 < x$. Wir definieren zwei Mengen:

$$A := \{\omega : X(\omega) < x_1\},$$

$$B := \{\omega : X(\omega) < x_2\}.$$

Dann gilt:

$$F(x_1) = P(\{\omega : X(\omega) < x_1\}) = P(A),$$

$$F(x_2) = P(\{\omega : X(\omega) < x_2\}) = P(B).$$

Wegen $A \subseteq B$ folgt: $P(A) \leq P(B)$, d.h.

$$F(x_1) \leq F(x_2),$$

d.h. die Funktion $F(x)$ monoton wachsend.

2. Sei (x_n) eine monoton fallende Folge mit $x_n \rightarrow -\infty$.
Sei (y_n) eine monoton wachsende Folge mit $y_n \rightarrow \infty$.

Wir definieren:

$$A_n := \{\omega : X(\omega) < x_n\},$$

$$B_n := \{\omega : X(\omega) < y_n\}.$$

Für die Folgen (A_n) und (B_n) gilt:

(A_n) ist monoton fallend ($A_n \supseteq A_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$),

(B_n) monoton wachsend ($B_n \subseteq B_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$).

Offensichtlich gilt:

$$F(x_n) = P(A_n), \quad F(y_n) = P(B_n).$$

Wegen der Stetigkeit der Wkt. von oben und unten ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = P(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n) = P(X < -\infty) = 0.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(B_n) = P(\lim_{n \rightarrow \infty} B_n) = P(X < +\infty) = 1.$$

Das bedeutet jedoch nichts anderes als:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(y_n) = 1.$$

(Das können wir schlußfolgern, da Grenzwerte von Funktionen von der Wahl der Folgen unabhängig sind.)

3. Wir definieren eine Menge

$$A = \{\omega : X(\omega) < x_0\}$$

und eine Folge von Mengen

$$A_n = \{\omega : X(\omega) < x_n\},$$

wobei (x_n) eine monotone Folge ist, die von links gegen x_0 konvergiert ($x_n \longrightarrow x_0 - 0$). Offenbar ist die Folge (A_n) monoton wachsend ($A_n \subseteq A_{n+1}$). Außerdem gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A.$$

Dann können wir schlußfolgern:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} P(X < x_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) \\ &= P(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n) \\ &= P(A) = P(X < x_0) \\ &= F(x_0)\end{aligned}$$

Das bedeutet aber:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} F(x) = F(x_0).$$

4. Es gilt:

$$\begin{aligned}P(a \leq X < b) &= P(\{X < b\} \setminus \{X < a\}) \\&= P(X < b) - P(X < a) \\&\quad \text{(Subtraktivität (vgl. Folgerung 2))} \\&= F(b) - F(a)\end{aligned}$$

□