10 Transformation von Zufallsvariablen

Sei $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion $F_X(x) = P(X < x)$.

Wir betrachten eine Funktion $g \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ und sei Zufallsvariable $Y : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $Y = g(X)$.

$$Y : \quad \Omega \xrightarrow{X} \mathbb{R} \xleftrightarrow{g} \mathbb{R}.$$

$$Y(\omega) = g(X(\omega)), \forall \omega \in \Omega.$$

Diese zufällige Variable besitzt die Verteilungsfunktion

$$\begin{aligned}
F_Y(y) &= P(Y < y) = P(\{\omega\colon Y(\omega) < y\}) \\
&= P(\{\omega\colon g(X(\omega)) < y\}) \\
&= P(X \in \underbrace{\{x\colon g(x) < y\}}_{\in \mathcal{B}^1}) = P(g(X) < y) \\
&= P(X \in g^{-1}(y))
\end{aligned}$$

Bem.: $\{x\colon g(x) < y\} \in \mathcal{B}^1$ gilt, wenn die Funktion g meßbar ist.

Frage: Wie berechnen wir $F_Y(y)$?

Fall 1: F diskret.

$$\begin{aligned} P(Y=y) &= P(g(X)=y) \\ &= P(x: g(x)=y) \\ &= P(x: x=g^{-1}(y)) \\ &= P(X \in g^{-1}(y)) \\ &= P(g^{-1}(y)) \end{aligned}$$

Bsp. 56 *Sei* $Y = X^2$, *wobei*

$$X = \begin{cases} 1 & \textit{mit Wkt. } \frac{1}{4} \\ 0 & \textit{mit Wkt. } \frac{1}{2} \\ -1 & \textit{mit Wkt. } \frac{1}{4} \end{cases}$$

also $g(x) = x^2, g^{-1}(y) = \sqrt{y}$.

$$\begin{aligned} P(Y = 0) &= P(X = 0) = \frac{1}{2} \\ P(Y = 1) &= P(X \in \sqrt{1}) = P(X = 1 \vee X = -1) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Fall 2: F stetig. Drei Schritte:

1. Finde für jedes y:

$$A_y = \{x : g(x) < y\}.$$

2. Die Verteilungsfunktion von Y ist

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y < y) = P(g(X) < y) \\ &= P(x : g(x) < y) = P(A_y) = \int_{A_y} f_X(x)\,dx \end{aligned}$$

3. Dichte von Y:

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y).$$

Bsp. 57 $X \sim R(0, \frac{\pi}{2})$., *d.h.* X *hat die Dichte*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} & \text{, falls } 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}.$$

Welche Verteilung hat die ZV $Y = \sin(X)$ *?*

1. *Finde für jedes* y, $y \in (0, 1)$

$$\begin{aligned} A_y &= \{x : g(x) < y\} = \{x : \sin(x) < y\} \\ &= \{x : x < \arcsin(y)\} \end{aligned}$$

Offenbar $A_y = \emptyset$ *für* $y \leq 0$ *und* $A_y = \mathbb{R}$ *für* $y \geq 1$

2. *Die Verteilungsfunktion von Y ist*

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y < y) = \int_{A_y} f_X(x)\,dx \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\arcsin(y)} dx = \frac{2}{\pi}\arcsin(y) \end{aligned}$$

3. *Dichte von Y: Für $y \in (0,1)$:*

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy}F_Y(y) = \frac{2}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

$f_Y(y) = 0$ *sonst.*

Bsp. 58 *Sei X stetig und $X \sim F_X$, d.h. X hat die Dichte f_X.*

Welche Verteilung hat die ZV $Y = F_X(X)$ *?*

1. *Finde für jedes y, $y \in (0, 1)$*

$$\begin{aligned} A_y &= \{x : F_X(x) < y\} \\ &= \{x : x < F_X^{-1}(y)\} \end{aligned}$$

Offenbar $A_y = \emptyset$ für $y \leq 0$ und $A_y = \mathbb{R}$ für $y \geq 1$

2. *Die Verteilungsfunktion von Y ist*

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y < y) = P(F_X(X) < y) \\ &= P(X < F_X^{-1}(y)) \\ &= \int_{A_y} f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{F_X^{-1}(y)} f_X(x)\,dx \\ &= F_X(F_X^{-1}(y)) - F_X(-\infty) = y \end{aligned}$$

3. *Dichte von Y:*

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1 & y \in (0,1) \\ 0 & \textit{sonst}. \end{cases}$$

D.h. $Y \sim \mathbb{R}(0,1)$

Bsp. 59 *Sei umgekehrt* $U \sim \mathbb{R}(0, 1)$ *und* F *eine Verteilungsfunktion mit Dichte* f.

Welche Verteilung hat die ZV $Y = F^{-1}(U)$ *?*

1. *Finde für jedes* y

$$\begin{aligned} A_y &= \{u : F^{-1}(u) < y\} \\ &= \{u : u < F(y)\} = (0, F(y)). \end{aligned}$$

2. *Die Verteilungsfunktion von Y ist*

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y < y) = P(F^{-1}(U) < y)) \\ &= P(U < F(y)) \\ &= \int_{A_y} f_U(u)\,du = \int_0^{F(y)} f_U(u)\,du \\ &= \int_0^{F(y)} du = F(y). \end{aligned}$$

Also $Y \sim F$.

3. *Dichte von* Y*:*

$$f_Y(y) = f(y)$$

Wir fassen die Ergebnisse in einem Satz zusammen.

Satz 29 *Es sei X eine, auf dem Intervall $[a, b]$ definierte ($a = -\infty, b = +\infty$ ist erlaubt) Zufallsgröße mit der stetigen Dichtefunktion f. Die Funktion $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sei differenzierbar und es gelte $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in [a, b]$). Dann hat die zufällige Variable $Y = g(X)$ die Dichtefunktion*

$$h(y) = f(g^{-1}(y)) \cdot \left| \frac{dg^{-1}}{dy}(y) \right| = \frac{f(g^{-1}(y))}{|g'(g^{-1}(y))|}.$$

Bem. 14 *Die Voraussetzung $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in [a, b]$ bewirkt, daß die Funktion g auf dem Intervall $[a, b]$ streng monoton ist.*

Beweis: Wir unterscheiden die Fälle $g' > 0$ und $g' < 0$.

Fall 1: Es sei $g'(x) > 0$, für alle $x \in [a, b]$, Da also die Funktion g streng monoton wachsend ist, ist die Menge $A_y = (-\infty, g^{-1}(y))$ ein Intervall und die Dichte von Y ist gegeben durch

$$\frac{d}{dy}F_Y(y) = \frac{d}{dy}(F_X(g^{-1}(y) - F_X(-\infty)).$$

Anwendung der Kettenregel liefert die Behauptung.

Fall 2: Es gilt $g'(x) < 0$, für alle $x \in [a, b]$, Da also die Funktion g streng monoton fallend ist, ist die Menge $A_y = (g^{-1}(y), \infty)$ ein Intervall und die Dichte von Y ist gegeben durch

$$\frac{d}{dy}F_Y(y) = \frac{d}{dy}(F_X(\infty) - F_X(g^{-1}(y)).$$

Anwendung der Kettenregel liefert die Behauptung.

$\square$

Bem. 15 *Beachten Sie, dass in der Formel des Satzes Betragsstriche stehen.*

Die Ableitungsregel für die Umkehrfunktion läßt sich wie folgt herleiten:

$$1 = (g(g^{-1}(y)))' = g'(g^{-1}(y))(g^{-1})'(y).$$

Die folgenden drei Beispiele wurden bereits oben behandelt. Sie folgen jetzt nochmal, diesmal direkte Anwendung des Satzes.

Bsp. 60 *Es sei* $X \sim R(0, \frac{\pi}{2})$*., d.h.* X *hat die Dichte*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} & \text{, falls } 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases} .$$

Wir betrachten die Funktion g*,*

$$y = g(x) = \sin x.$$

Für alle $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$ *gilt:* $0 \leq g(x) < 1$*. Die Umkehrfunktion von* g *ist*

$$g^{-1}(y) = \arcsin y.$$

Wir betrachten eine Zufallsgröße Y *mit* $Y = \sin X$*. Dann gilt* *für die Dichte von Y nach Satz 29:*

$$
\begin{aligned}
h(y) &= f(\arcsin y) \cdot \left| \frac{d \arcsin}{dy}(y) \right| \\
&= f(\arcsin y) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \\
&= \begin{cases} \frac{2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} & \text{, falls } 0 \le y < 1 \\ 0 & \text{, sonst.} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Bsp. 61 *Es sei X eine zufällige Variable mit einer auf einem bestimmten Intervall differenzierbaren Verteilungsfunktion $F(x) = P(X < x) \in [0, 1[$ und Dichte f.*

Die Dichte der Zufallsvariablen $Y = F(X)$ ist mittels Satz 29:

$$
\begin{aligned}
h(y) &= f(F^{-1}(y)) \cdot \frac{dF^{-1}}{dy}(y) \\
&= f(F^{-1}(y)) \cdot \frac{1}{F'(F^{-1}(y))} \\
&= \frac{f(F^{-1}(y))}{f(F^{-1}(y))} = 1
\end{aligned}
$$

Das gilt für alle $y \in [0,1[$*, d.h.:*

$$h(y) = \begin{cases} 1 & \text{, \textit{falls} } 0 \leq y < 1 \\ 0 & \text{, \textit{sonst}} \end{cases} .$$

Folglich gilt: $Y \sim R(0,1)$*!*

Bem.: Wir haben also gezeigt: Wenn $X \sim F$ so ist die transformierte Zufallsvariable

$$Y = F(X) \sim R(0,1)$$

Umgekehrt gilt: Ist $U \sim R(0,1)$ und ist F eine beliebige Verteilungsfunktion, so ist $Y = F^{-1}(U) \sim F$.

Anwendung: Zufallszahlen (vgl. Kapitel **??**).

Bsp. 62 *Es sei* $X: \quad \Omega \to \mathbb{R}$ *mit* $X \sim Exp(\lambda)$, *d.h.* X *besitzt die Verteilungsfunktion*

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda \cdot x}, \qquad x \geq 0.$$

Wegen $U := F(X) \sim R(0,1)$ *gilt für alle* $\omega \in \Omega$*:*

$$U(\omega) = F(X(\omega)).$$

Wir bezeichnen $y := U(\omega)$ *und* $x := X(\omega)$*. Dann gilt:*

$$\begin{aligned} y &= F(x) = 1 - e^{-\lambda \cdot x} \\ e^{-\lambda \cdot x} &= 1 - y \\ x &= -\frac{1}{\lambda} \ln(1-y) \end{aligned}$$

Das ist äquivalent zu:

$$X(\omega) = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - U(\omega)).$$

Folglich gilt: Die Zufallsgröße

$$X = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - U) \sim Exp(\lambda).$$

ist exponentialverteilt mit dem Parameter λ.

Bsp. 63 *Es sei X eine Zufallsgröße mit der Dichtefunktion f. Desweiteren sei g die wie folgt definierte Funktion:*

$$g(x) = ax + b.$$

Wir betrachten nun eine weitere Zufallsgröße Y*,*

$$Y = g(X) = aX + b, \quad a \neq 0.$$

Wir bezeichnen $y := g(x)$*. Dann gilt:*

$$g^{-1}(y) = x = \frac{y-b}{a}.$$

Für die Dichte der Zufallsvariable Y *gilt nach Satz 29:*

$$h(y) \quad = \quad f(g^{-1}(y)) \cdot \left| \frac{dg^{-1}}{dy}(y) \right| = f\left(\frac{y-b}{a}\right) \cdot \frac{1}{|a|}$$

Bem.: Im Fall der Normalverteilung, $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2),\ \sigma > 0$, haben wir dieses Ergebnis implizit bereits in Abschnitt 9.1 (Satz 22) erhalten.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}.$$

Es sei ($a = \frac{1}{\sigma}, b = \frac{\mu}{\sigma}$)

$$Y = \frac{X - \mu}{\sigma} \quad \text{bzw.} \quad X = \sigma Y + \mu.$$

Nach der in diesem Abschnitt hergeleiteten Formel ergibt sich die Dichtefunktion h der Zufallsgröße Y:

$$\begin{aligned} h(y) &= \frac{1}{|a|} f\left(\frac{y-b}{a}\right) = \frac{1}{\left|\frac{1}{\sigma}\right|} f\left(\frac{y+\frac{\mu}{\sigma}}{\frac{1}{\sigma}}\right) = \sigma f(\sigma y + \mu) \\ &= \sigma \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\sigma y + \mu - \mu}{\sigma}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2} \end{aligned}$$

Dichtefkt. einer Normalverteilung mit $\mu = 0$ und $\sigma = 1$!

Das heißt: Eine normalverteilte Zufallsgröße wird in eine standard–normalverteilte Zufallsgröße transformiert, indem der Parameter μ subtrahiert und anschließend durch den Parameter σ dividiert wird. Sei also $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$,

$$\begin{aligned} F(x) &= P(X < x) = P\left(\underbrace{\frac{X-\mu}{\sigma}}_{=Y} < \frac{x-\mu}{\sigma}\right) \\ &= P\left(Y < \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

Es gilt: $Y \sim (0, 1)$. (vgl. auch Satz 22)