

15 Grundlagen der Simulation

15.1 Einführung

Komplexe Problemstellungen, die einer analytischen Behandlung nur sehr schwer oder gar nicht zugänglich sind

- Lösung von diskreten (oder analytischen) Optimierungsaufgaben, z.B. Travelling Salesman Problem
- Berechnung von Integralen
- Untersuchung des Verhaltens von Algorithmen, z.B. Sortier- und Suchverfahren
- Theorie oft nur asymptotisch. Verhalten im Endlichen?
- “Wer nix kapiert, der simuliert”.

Stochastische Optimierungsverfahren

- Mutation und Selektion
- Simulated Annealing
- Genetische Algorithmen

Allen diesen Verfahren ist gemeinsam, daß Zustandsübergänge zufällig geschehen und zwischenzeitlich auch mit gewissen (kleinen) Wahrscheinlichkeiten auch schlechtere Lösungen akzeptiert werden.

Vorteil: “Optimum” wird in Polynomialzeit gefunden.

Nachteil: “Optimum” wird nur mit hoher Wkt. gefunden.

Grundlage aller Simulationverfahren sind gleichverteilte Zufallsgrößen $X \sim \mathbb{R}(0, 1)$,

$$P(X < x) = \int_0^x dt = x,$$

d.h. X hat die Dichtefunktion:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Das Kernproblem der Simulation ist deshalb die Erzeugung von Folgen unabhängiger gleichverteilter Zufallsgrößen X_i .

Bez.: Zufallszahlen.

15.2 Erzeugung von Zufallszahlen

15.2.1 Exakte Methoden von Hand

Methode 1: Es werden zufällig, gleichverteilt, die Zahlen $0, 1, \dots, 9$ erzeugt.

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 8 & 9 \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \dots & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}.$$

Realisierung:

1. Es werden Karten mit den Zahlen 0 bis 9 beschriftet. Für jede Zahl ist dabei die Anzahl der Karten gleich. Nun zieht man zufällig Karten und legt sie wieder

zurück. Die sich ergebende Folge von Ziffern schreibt man auf.

2. Es können die bereits bekannten Urnen- bzw. Glücksradmethoden verwendet werden.

Wir erhalten in jedem Falle eine Folge von Ziffern. Wir schreiben sie in eine Tabelle der folgenden Form:

$$\left| \begin{array}{cccccc} 3 & 8 & 7 & 0 & 9 & 1 & \dots \\ \hline 2 & 4 & 9 & 1 & 3 & 2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array} \right|$$

Nun wählen wir zufällig Fünferblocks (es können auch Blocks von mehr Zahlen sein) aus und betrachten diese als Dezimalstellen, d.h. wir erhalten beispielsweise die

Zahl 0,87091. Auf diese Weise erhalten wir
Zufallszahlen auf dem Intervall $[0, 1[$.

Methode 2: Wir erzeugen zufällig die Ziffern 0 und 1,
beispielsweise mittels Münzwurf. Dann erhalten wir eine
Zufallsgröße

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten eine Folge $d_1 d_2 d_3 \dots d_n \dots$ von Nullen und
Einsen. Dann ermitteln wir:

$$z := \sum_{i=1}^n d_i \cdot 2^{-i} \leq 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Für die so erhaltene Zahl z gilt: $0 \leq z < 1$.

Methode 3: (4–Würfel–Spezialwürfeln)

Wir beschriften vier Würfel nach folgender Vorschrift:

1. Würfel: 0, 1, 2, 3, 4, 5

2. Würfel: 0, 6, 12, 18, 24, 30

3. Würfel: 0, 36, 72, 108, 144, 180

4. Würfel: 0, 216, 432, 648, 864, 1080

Wir werfen diese Würfel gleichzeitig und bilden die Summe der Augen. Das ergibt eine Zahl k , für die gilt: $0 \leq k \leq 1295$. Die Zufallsgröße $X := \frac{k}{1295}$ ist dann annähernd gleichverteilt über dem Intervall $[0, 1[$.

In elektronischen Geräten (Bauelementen) fließen auch im Ruhezustand Ströme (weißes Rauschen bzw. „white noise“),

deren Spannungen zeitlich zufällig schwanken. Nun kann man einen bestimmten Schwellwert der Spannung festlegen und innerhalb von Zeitintervallen gleicher Länge zählen, wie oft dieser kritische Spannungswert überschritten wird. Beispielsweise läßt sich bei jedem Überschreiten des Wertes ein Impuls auslösen. Diese Impulse können dann gezählt werden. Im Falle einer geraden Anzahl von Impulsen wird als Zufallsziffer eine 1 realisiert, andernfalls eine 0. Aus der resultierenden 0–1–Folge erhält man nach obigem Muster eine Zufallszahl.

15.2.2 Kongruenzmethoden

Die bisher betrachteten Verfahren sind alle sehr aufwendig und deshalb praktisch schwer anwendbar. Aus diesem Grunde spielen in der Simulation nur die mathematischen Methoden (Algorithmen) zur Erzeugung von Zufallszahlen eine Rolle. Die mit diesen Methoden generierten Zufallszahlen (gewissermaßen ein Ersatz für Zufallszahlen) werden auch als Pseudozufallszahlen bezeichnet. Algorithmen, die Pseudozufallszahlen erzeugen, werden auch Zufallszahlengeneratoren genannt.

Die multiplikative Kongruenzmethode

Wir geben folgende Startwerte vor: $m, a, z_0 \in \mathbb{Z}^+$. Wir definieren die Folge

$$z_{i+1} := a \cdot z_i \pmod{m}.$$

Offenbar:

$$a \cdot z_i = k \cdot m + z_{i+1}; \quad 0 \leq z_{i+1} < m \quad (k \in \mathbb{N}, i = 1, 2, \dots).$$

$$u_i = \frac{z_i}{m}, \quad (i = 1, 2, \dots)$$

ist eine Folge von Pseudozufallszahlen zwischen 0 und 1.

Frage: Sind diese u_i annähernd eine Folge unabhängiger, auf dem Intervall $[0, 1[$ gleichverteilter Zufallszahlen?

Frage: Geeignete Wahl der Zahlen a , m und z_0 .

Bsp. 105

- *RANDU (IBM)*: $m = 2^{31}$, $a = 2^{16} + 3$;
- *RANDA (PRIME)*: $m = 2^{31} - 1$, $a = 16807$;
- *SIMULA (CDC)*: $m = 2^{59}$, $a = 5^{11}$.
- *SAS*: $m = 2^{31} - 1$, $a = 397204094$.

Verallgemeinerung: Die lineare Kongruenzmethode

Wir geben wieder Werte vor: $m, a, r, z_0 \in \mathbb{Z}^+$ und definieren die Folge

$$z_{i+1} = (a \cdot z_i + r) \pmod{m}$$

und die Folge von Zufallszahlen ist

$$u_i := \frac{z_i}{m} \quad (i \in \mathbb{N}).$$

Bsp. 106 Turbo-Pascal: $z_{n+1} = 134775813z_n + 1 \pmod{2^{32}}$

Die mehrfache lineare Kongruenzmethode Diese Methode stellt eine Erweiterung der linearen Kongruenzmethode dar.

Als Startwerte geben wir hier vor:

$m, a_1, \dots, a_k, r, z_0, \dots, z_{(k-1)} \in \mathbb{Z}^+$. Wir definieren die Folge für $n > (k - 1)$

$$z_n = \left(\sum_{l=1}^k a_l \cdot z_{n-l} + r \right) \pmod{m}.$$

Die Zufallszahlenfolge ist dann wieder

$$u_n := \frac{z_n}{m}.$$

15.2.3 Eigenschaften von Pseudozufallszahlen

Wünschenswerte Eigenschaften von Zufallszahlen

- Einfacher Algorithmus, wenig Rechenzeit.
- möglichst viele verschiedene Zufallszahlen sollen erzeugbar sein
 - ⇒ lange Periode.
 - ⇒ m möglichst groß (etwa in der Nähe der oberen Grenze des INTEGER-Bereichs)
- k -Tupel $(U_1, \dots, U_k) \sim R(0, 1)^k$, $k \leq 10$
 - ⇒ Test auf Gleichverteilung.

- “Unabhängigkeit”

Test auf Autokorrelation

Plot der Punkte $(U_i, U_{i+k}), k = 1, 2, \dots$

es sollten keine Muster zu erkennen sein.

Bsp. 107 Wir wählen $m = 2^4$, $a = 11$, $z_0 = 3$. Wir berechnen die ersten Werte der Folge:

$$z_1 = 11 \cdot 3 \pmod{16} = 1$$

$$z_2 = 11 \cdot 1 \pmod{16} = 11$$

$$z_3 = 11 \cdot 11 \pmod{16} = 9$$

$$z_4 = 11 \cdot 9 \pmod{16} = 3$$

Dann gilt natürlich: $z_5 = z_1$ und die Folge wiederholt sich.

In diesem Beispiel ist also die Periodenlänge statt gleich 16 (wie theoretisch möglich) nur gleich 4. Das zeigt deutlich, wie die Wahl der Parameter die Qualität der ermittelten Pseudozufallszahlen beeinflusst.

Satz 60 Wenn $m = 2^k$, $a \bmod 8 \in \{3, 5\}$, z_0 ungerade und $r = 0$ sind, so hat die multiplikative Kongruenzmethode die maximal mögliche Periodenlänge 2^{k-2} .

In allen anderen Fällen gilt, daß die Periodenlänge kleiner als 2^{k-2} ist.

Satz 61 Die lineare Kongruenzmethode besitzt genau dann die volle Periodenlänge m , falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. $\text{ggT}(r, m) = 1$ ($\text{ggT}(0, m) := m$);
2. $a \bmod p = 1$, für alle Primfaktoren p von m ;
3. $a \bmod 4 = 1$, falls m ein Vielfaches von 4 ist.

Ziel: Gleichverteilung dieser Pseudozufallszahlen in $[0, 1[$.

Aber: Bilden wir Paare (u_1, u_2) , (u_3, u_4) , (u_5, u_6) , usw.

aufeinanderfolgender Zufallszahlen und tragen sie in das Einheitsquadrat ein. Es entsteht ein (zweidimensionales) Scatterplot von Punkten. Die Pseudozufallszahlen sind evtl. dann akzeptabel, wenn sich hier eine gleichmäßige Verteilung ergibt und keine Struktur erkennbar ist.

Entstehen dagegen (Linien)muster, so ist der Zufallszahlengenerator schlecht.

Diese Darstellung kann auch für k -Tupel definiert werden. Dann haben wir entsprechend Punkte im k -dimensionalen Raum.

Es sei $\{z_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Werten, die mit der multiplikativen Kongruenzmethode mit $m = 2^t$, $a = 5 \pmod{8}$ und $z_0 = 1 \pmod{4}$ ermittelt wurden, d.h.:

$$z_{i+1} = a \cdot z_i \pmod{2^t}.$$

$$u_i = \frac{z_i}{2^t}.$$

Wir bilden nun k -Tupel von aufeinanderfolgenden Pseudozufallszahlen:

$$\mathbf{u}_{(k)} = (u_l, \dots, u_{l+k-1}) = \left(\frac{z_l}{2^t}, \dots, \frac{z_{l+k-1}}{2^t} \right).$$

Für diese k -Tupel von Pseudozufallszahlen gilt:

$$\mathbf{u}_{(k)} \in \left(\frac{1}{4} \cdot b_1 + G \right) \cap [0, 1]^k.$$

Dabei ist:

$$G = \left\{ \sum_{i=1}^k q_i \cdot \mathbf{b}_i : q_1, \dots, q_k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\mathbf{b}_1 = \frac{1}{2^{t-2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ \vdots \\ a^{k-1} \end{pmatrix}, \mathbf{b}_2 = \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{b}_k = \mathbf{e}_k.$$

Das ist ein k -dimensionales Gitter von Zufallszahlen.

Bem: Sei u_0 die erste Zufallszahl. Die ersten k Zufallszahlen haben die Form

$$u_0 \cdot ((1, a, \dots, a^{k-1})(\text{mod } m))/m = u_0 \cdot \frac{\mathbf{b}_1}{4} + g,$$

wobei $g \in G$ ein geeigneter Vektor ist, so daß die $u_l, l = 1, \dots, k$, auch im Intervall $(0, 1)$ liegen.

Anstelle der ersten kann mit einer beliebigen Zufallszahl begonnen werden.

Bsp. 108 (RANDU)

$$m = 2^{31}, \quad a = 2^{16} + 3, \quad r = 0$$

$$\begin{aligned} X_{i+2} &= (2^{16} + 3)X_{i+1} + c_1 2^{31} \\ &= (2^{16} + 3)^2 X_i + c_1 2^{31} (2^{16} + 3) + c_2 2^{31} \\ &= (6 \cdot 2^{16} + 9)X_i + 2^{31} (2X_i + (2^{16} + 3)c_1 + c_2) \\ &= 6(2^{16} + 3)X_i - 9X_i + c_3 2^{31} \\ &= 6X_{i+1} - 9X_i + c_4 2^{31} \end{aligned}$$

$$c_i \in \mathbb{Z}, i = 1, \dots, 4.$$

Daraus folgt:

$$U_{i+2} - 6U_{i+1} + 9U_i \in \mathbb{Z}.$$

Beispielmuster (SAS)

```
/sasuser/Stochastik/ZufallszahlenMuster.sas
```

15.3 Statistische Tests von Pseudozufallszahlen

Def. 52 Ein Test ist eine Entscheidungsvorschrift, die über die Akzeptanz genau einer von zwei alternativen Hypothesen entscheidet.

Bsp. 109 (Analogie zur Qualitätskontrolle) Ein Käufer soll anhand einer Stichprobe entscheiden, ob er einen Warenbestand kauft oder nicht. Wir haben zwei Hypothesen, die Null- und die Alternativhypothese:

H_0 : Die Ware ist in Ordnung,

z.B. der Ausschußanteil p ist kleiner oder gleich 2%.

H_a : Die Ware ist schlecht, d.h. $p > 2\%$.

Der Kunde führt nun bei n Produkten eine Kontrolle durch (Stichproben) und bewertet das jeweilige Ergebnis seiner Probe durch die ‘Beobachtungen’ x_1, \dots, x_n , wobei:

$$x_i = \begin{cases} 0 & , \text{ falls das Produkt } i \text{ gut ist,} \\ 1 & , \text{ falls das Produkt } i \text{ schlecht ist.} \end{cases}$$

Dann ist $z = \sum_{i=1}^n x_i$ die Anzahl der fehlerhaften Produkte, die der Kunde gefunden hat. Nun wird vor dem Test ein kritischer Wert z_α festgelegt

- Ist $z > z_\alpha$, so wird die Hypothese H_0 abgelehnt;
- Ist $z \leq z_\alpha$, so wird die Hypothese H_0 für richtig befunden.

In diesem Zusammenhang sind zwei (bedingte) Wahrscheinlichkeiten wichtig:

1. $P(Z > z_\alpha | H \text{ ist wahr})$ – die Wahrscheinlichkeit also, daß der Käufer die Ware für schlecht befindet und ablehnt, obwohl sie doch in Ordnung ist. Diese Wahrscheinlichkeit spiegelt das „Risiko des Produzenten“ wider.
2. $P(Z \leq z_\alpha | H \text{ ist falsch})$ – die Wahrscheinlichkeit also, daß der Käufer die Ware nimmt, obwohl ihre Qualität stark zu wünschen übrig läßt. Diese Wahrscheinlichkeit spiegelt das „Risiko des Käufers“ wider.

Die Entscheidung für H_A oder für H_0 wird anhand einer Teststatistik

$$Z = Z(x_1, \dots, x_n)$$

gefällt. Zeigt der Wert von Z in einem vorher bestimmten Bereich K , dem sogen. Ablehnungsbereich oder kritischen Bereich, dann wird H_0 abgelehnt, anderenfalls wird H_0 nicht abgelehnt.

Bei jeder dieser Entscheidungen kann man Fehlentscheidungen treffen:

Entscheidung für H_A obwohl H_0 richtig ist: Fehler 1.Art

Entscheidung für H_0 obwohl H_A richtig ist: Fehler 2.Art

	Entscheidung für H_0	Entscheidung für H_A
H_0 richtig	richtig, Sicher- heitswkt. $1 - \alpha$	Fehler 1. Art Fehlerwkt. α .
H_A richtig	Fehler 2.Art Fehlerwkt. $1-\beta$	richtig, Güte β

Bem.: Entscheidung für H_0 heißt nicht notwendig, dass H_0 richtig ist.

Der Parameter α wird dabei auf $P(Z > Z_\alpha | H \text{ ist wahr})$ gesetzt und meist vorgegeben. Übliche Werte für α sind 0,01 oder 0,05. Gesucht ist eine Testvorschrift, die zur Minimierung des „Risikos des Käufers“ führt.

Anwendung auf Pseudozufallszahlen

zu testen:

- Gleichverteilung der Pseudozufallszahlen über dem Intervall $[0, 1[$;
- Unabhängigkeit der Pseudozufallszahlen.

15.3.1 Test auf Gleichverteilung

Der χ^2 -Anpassungs-Test

Def. 53 Y_1, \dots, Y_k seien unabhängig, identisch verteilte Zufallszahlen mit $Y_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Dann heißt die Zufallsvariable Y mit

$$Y = \sum_{i=1}^k Y_i^2$$

χ^2 -verteilt mit k Freiheitsgraden.

Bez. 7 $Y \sim \chi_k^2$.

Es seien jetzt X_i ($i = 1, \dots, n$) beliebige unabhängig und identisch verteilte Zufallsgrößen

$$\begin{aligned} B &= [0, 1) \\ A_j &= \left[\frac{j-1}{k}, \frac{j}{k} \right) \quad n \geq 5k \\ p_j &= P(X \in A_j) = \frac{1}{k} \end{aligned}$$

Wir testen

$$\begin{aligned} H_0 : \quad p_j &= \frac{1}{k} \quad j = 1, \dots, k \\ H_A : \quad p_j &\neq \frac{1}{k} \quad \text{für ein } j \end{aligned}$$

Wir definieren

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^k \frac{(n_j - np_j)^2}{np_j} \quad n_j = \#\{X_i : X_i \in A_j\}$$

Wenn H_0 zutrifft, gilt für große n dann approximativ,

$$\chi^2 \sim \chi_{k-1}^2.$$

Wenn H_0 richtig ist, gilt wegen dem schwachen Gesetz großer Zahlen (siehe Seite 496): $n_j \approx n \cdot p_j$

Offenbar, $0 \leq \chi^2$.

Wenn $\chi^2 \leq c_\alpha$ wollen wir Hypothese H_0 annehmen, wenn $\chi^2 > c_\alpha$ lehnen wir diese ab.

c_α wird wie folgt festgelegt:

$$P(\chi^2 > c_\alpha | H_0 \text{ richtig}) = \alpha$$

ist die Wahrscheinlichkeit (bzw. das Risiko) dafür, dass trotz “guter” Verteilung (Gleichverteilung) der Zufallszahlen wir die Hypothese H_0 ablehnen, d.h. die Nicht-Gleichverteilung annehmen.

ZufallszahlenMusterUebung.sas

Auf der empirischen Verteilungsfunktion beruhende Tests (allgemein)

Erinnerung (empirische Verteilungsfunktion):

Seien X_1, \dots, X_n unabh. Beobachtungen,

$X_{(1)} \leq \dots \leq X_{(n)}$ die geordneten Beob. Die Funktion

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & x < X_{(1)} \\ \frac{i}{n} & X_{(i)} \leq x < X_{(i+1)} \\ 1 & X_{(n)} \leq x \end{cases} \quad i = 1 \dots n$$

heißt empirische Verteilungsfunktion.

Satz v. Glivento-Cantelli: $F_n(x) \rightarrow F(x)$.

*Bitte keinen Schreck bekommen, die folgenden drei Folien sind nur für den interessierten Leser.

Kolmogorov-Smirnov-Test

$$\begin{aligned} D &= \sup_x |F_n(x) - F_0(x)| \\ &= \max \left(\max_i \left(\frac{i}{n} - U_{(i)} \right), \max_i \left(U_{(i)} - \frac{i-1}{n} \right) \right) \end{aligned}$$

Anderson-Darling-Test

$$\begin{aligned} A^2 &= n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(F_n(x) - F_0(x))^2}{F_0(x)(1 - F_0(x))} dF_0(x) \\ &= -n - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (2i-1) (\ln U_{(i)} + \ln(1 - U_{(n+1-i)})) \end{aligned}$$

Cramer-von Mises-Test

$$\begin{aligned} W^2 &= n \int_{-\infty}^{\infty} (F_n(x) - F_0(x))^2 dF_0(x) \\ &= \frac{1}{12n} + \sum_{i=1}^n \left(U_{(i)} - \frac{2i-1}{2n} \right)^2 \end{aligned}$$

$$U_{(i)} = F_0(X_{(i)}) \quad X_{(1)} \leq \dots \leq X_{(n)}$$

hier: $F_0(x) = x$.

Modifikationen für endliche Stichproben

$$D: D \cdot (\sqrt{n} - 0.01 + 0.85/\sqrt{n})$$

$$A^2: AD^2 \cdot (1.0 + 0.75/n + 2.25/n^2)$$

$$W^2: CM^2 \cdot (1.0 + 0.5/n)$$

Kritische Werte

W^2 : D'Agostino, Stephens (1986), S. 123.

A^2 : Crawford Moss u.a. (1990)

Der Kolmogorov–Smirnov–Test Erinnerung:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_x |F_n(x) - x| = 0$$

Satz 62 (KOLMOGOROV–SMIRNOV) *Es gilt:*

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} P(\sqrt{n} \cdot D_n < x) &= \begin{cases} 1 + 2 \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \cdot e^{-2 \cdot i^2 \cdot x^2}, & x > 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \\ &=: Q(x) \end{aligned}$$

Bem. 24 $Q(x)$ ist die Verteilungsfunktion der Kolmogorov-Verteilung (Kolmogorov, 1933).

Praktische Durchführung

1. Die Pseudozufallszahlen werden der Größe nach geordnet. Wir ermitteln also eine Permutation $u_{(1)}, \dots, u_{(n)}$ der Zahlen, für die gilt:

$$u_{(1)} < u_{(2)} < \dots < u_{(n)}.$$

(Voraussetzung ist dabei natürlich, daß die Periode des verwendeten Zufallszahlengenerators nicht kleiner ist als n , d.h. daß alle Zahlen verschieden voneinander sind.)

2. Wir bestimmen die empirische Verteilungsfunktion

$$F_n(x) = \frac{\#\{u_i : u_i < x, 0 \leq x < 1\}}{n}.$$

3. Wir ermitteln die Zahl

$$D_n := \sup_x |F_n(x) - x| = \max \left\{ \max_{1 \leq i \leq n} a_i, \max_{1 \leq i \leq n} b_i \right\},$$

wobei für alle $i = 1, \dots, n$ gilt:

$$a_i := \left| u_{(i)} - \frac{i}{n} \right|, \quad b_i := \left| u_{(i)} - \frac{i-1}{n} \right|.$$

4. Mit einem vorgegebenen Schwellwert c_α führen wir nun folgenden Test durch:

$$\sqrt{n} \cdot D_n > c_\alpha \implies \text{Ablehnung der Hypothese } H$$

$$\sqrt{n} \cdot D_n \leq c_\alpha \implies \text{Annahme der Hypothese } H$$

Dabei ist

$$\alpha = P(H \text{ abgelehnt} | H_0) = P(\sqrt{n} \cdot D_n > c_\alpha | H_0).$$

Daraus folgt, daß gilt:

$$Q(c_\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(\sqrt{n} \cdot D_n < c_\alpha) = 1 - \alpha.$$

Die folgende Tabelle zeigt für vorgegebene Parameter α den jeweiligen Wert von c_α :

α	c_α (gerundet)
0.01	1.63
0.05	1.36
0.1	1.22

15.3.2 Test auf Unabhängigkeit

Der Run-Test

Def. 54 *Jeder Teilabschnitt einer Folge unabhängiger, identisch verteilter Zufallszahlen, in dem die Zufallszahlen in aufsteigend geordnet sind, heißt Run.*

Bsp. 110 *Wir teilen eine Folge in Runs ein:*

<i>Folge von Zufallszahlen</i>	2	1	2	3	2	4	1	7	8	9	0
<i>Run</i>	I.	II.			III.		IV.			V.	
<i>Länge des Runs</i>	1	3			2		4			1	

Satz 63 *Es sei u_1, \dots, u_n eine Folge unabhängiger Zufallsgrößen mit $u_i \sim U(0, 1)$ ($i = 1, \dots, n$). Dann gilt für die zufällige Länge R eines Runs:*

$$P(R = r) = \frac{r}{(r+1)!}.$$

Wir beschreiben R also durch:

$$R : \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & r & \dots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots & \frac{r}{(r+1)!} & \dots \end{pmatrix}.$$

Beweis: Wegen der Unabhängigkeit und der identischen Verteilung genügt es, die ersten $r + 1$ Zufallsvariablen zu betrachten. Es gilt:

$$\begin{aligned} P(R = r) &= P(U_1 \leq \dots \leq U_r > U_{r+1}) \\ &= P(U_1 \leq \dots \leq U_r) - P(U_1 \leq \dots \leq U_r \leq U_{r+1}) \\ &= \frac{1}{r!} - \frac{1}{(r+1)!} = \frac{r}{(r+1)!} \end{aligned}$$

□

Bem. 25 *Es gilt:*

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty} P(R = i) &= \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{i!} - \frac{1}{(i+1)!} \right) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!} - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(i+1)!} \\ &= \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} - 1 \right) - \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(i+1)!} - 1 \right) \\ &= (e - 1) - (e - 1 - 1) = 1.\end{aligned}$$

Es seien nun u_1, \dots, u_n Pseudozufallszahlen. Wir testen

H_0 : u_1, \dots, u_n sind unabhängig gegen

H_1 : u_1, \dots, u_n sind abhängig.

R_1, \dots, R_m sei die Folge der Längen der auftretenden Runs. Da Pseudozufallszahlen durch einen deterministischen Algorithmus berechnet werden, sind diese Längen nicht unabhängig. Deshalb streichen wir nach jedem Run die nächste Zufallszahl. Es entstehen die Größen R_1^*, \dots, R_m^* . Formal sieht das folgendermaßen aus:

Seien die S_i die Stellen an denen ein Run zuende ist,

$$\begin{aligned}
 S_1 &= \inf\{n \in \mathbb{N}: u_{n+1} < u_n\} \\
 S_2 &= \inf\{n \in \mathbb{N}: n > S_1 + 1, u_{n+1} < u_n\} \\
 &\vdots \\
 S_{k+1} &= \inf\{n \in \mathbb{N}: n > S_k + 1, u_{n+1} < u_n\}
 \end{aligned}$$

Dann definieren wir:

$$\begin{aligned} R_1^* &:= S_1 \\ R_2^* &:= S_2 - S_1 - 1 \\ &\vdots \\ R_{k+1}^* &:= S_{k+1} - S_k - 1 \end{aligned}$$

Wenn nun die Hypothese H_0 gilt, dann ist:

$$P(R^* = r) = \frac{r}{(r+1)!},$$

und die R_i^* ($i = 1, \dots, m$) sind unabhängig.

Run-Test: Anpassungstest auf diese Verteilung

Teilen \mathbf{Z}^+ in disjunkte Teilintervalle auf:

$$[i_1 + 1, i_2], [i_2 + 1, i_3], \dots, [i_k + 1, \infty)$$

$$0 = i_1 < i_2 < \dots < i_k < \infty \quad k \text{ Intervalle}$$

$$p_j^* = \sum_{l=i_j+1}^{i_{j+1}} P(R^* = l) = P(i_j + 1 \leq R^* \leq i_{j+1})$$

$$n_j = \#_{i=1, \dots, m} \{R_i^* : i_j + 1 \leq R_i^* \leq i_{j+1}\}$$

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^k \frac{(n_j - mp_j^*)^2}{mp_j^*} \sim \chi_{k-1}^2$$

Falls H_0 richtig ist, d.h. unabhängige, gleichverteilte

Zufallszahlen liegen vor, dann gilt:

$$n_j \approx mp_j^*.$$

Falls $\chi^2 >$ kritischer Wert, lehnen wir die Unabhängigkeitshypothese ab.

Bem. 26 *Gesamtumfang der zu erzeugenden Zufallszahlen sollte ≥ 4000 sein.*

Wir haben hier einen Anpassungstest auf eine gegebene diskrete Verteilung gemacht.

χ^2 -Anpassungstests (auf eine stetige Verteilung, hier Gleichverteilung) sollten, u.a. wegen der Willkür der Klasseneinteilung mit Vorsicht betrachtet werden.

Autokorrelationstest

Sei U_1, \dots, U_n eine Folge von zufälligen Variablen. Für alle m können wir nun bilden:

$$\rho_m(k) = \frac{\text{COV}(U_m, U_{m+k})}{\sigma_{U_m} \sigma_{U_{m+k}}}$$

wobei $1 \leq k \leq \frac{n}{2}$ Wenn U_1, \dots, U_n identisch verteilt so $\sigma_{U_j} = \sigma \quad \forall j$ und

$$\text{COV}(U_m, U_{m+k}) = \text{COV}(U_1, U_{k+1})$$

Autokorrelation k -ter Ordnung

$$\sigma_m(k) = \rho(k) = \frac{E(U_m \cdot U_{m+k}) - (EU_m)^2}{\sigma^2}$$

$\forall m, \quad k = 1, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor.$

Sei u_1, \dots, u_n eine Folge von Realisierungen.

$$\hat{\rho}(k) = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u_i \cdot u_{i+k} - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u_i\right)^2}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u_i^2 - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u_i\right)^2}$$

ist die *empirische Autokorrelation* k -ter Ordnung.

Bem. 27 $\rho(k)$ ist die *Pearson-Korrelation* zwischen U_i und U_{i+k} .

Offenbar, $\rho(k) = 0 \quad \forall k \geq 1$, wenn die Zufallszahlen keine Autokorrelation besitzen. Für die Realisierungen u_1, \dots, u_n sollte dann gelten: $\hat{\rho}(k) \approx 0$.

Ersetzen wir die

U_i durch ihre Ränge R_1, \dots, R_n und die
 U_{i+k} durch ihre Ränge S_1, \dots, S_n

dann erhalten wir den

Spearman-Rang-Korrelationskoeffizient r_S . Es
gilt asymptotisch

$$r_S \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{n-1}\right).$$

Die Nullhypothese

H_0 : keine Autokorrelation

wird also abgelehnt, wenn

$$\sqrt{n-1}|r_S| \geq z_{1-\alpha/2}$$

($z_{1-\alpha/2}$: $1 - \alpha/2$ -Quantil der Standard-Normalverteilung,
 $z_{0.975} = 1.96$.)

15.4 Erzeugung spezieller Verteilungen

Erzeugung diskreter Zufallsvariablen Ziel ist es, eine diskrete zufällige Variable X zu erzeugen:

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_m \\ p_1 & p_2 & \dots & p_m \end{pmatrix}.$$

Zerlegen das Intervall $[0, 1]$ in Teilintervalle I_j ,

$$I_j = \left[\sum_{k=0}^{j-1} p_k, \sum_{k=0}^j p_k \right], \quad (p_0 = 0)$$

Sei u eine Pseudozufallszahl. Wir setzen

$$X = x_j \quad \text{falls} \quad u \in I_j$$

Erzeugung stetiger Zufallsvariablen

Es sei $U \sim R(0, 1)$ eine gleichverteilte Pseudozufallszahl mit Dichtefunktion:

$$h(u) = \begin{cases} 1 & , \text{ falls } 0 \leq u < 1; \\ 0 & , \text{ sonst.} \end{cases}$$

Wir betrachten die Transformation

$$X := \varphi(U),$$

wobei φ monoton wachsend sei. Die Zufallsgröße X ist ebenfalls stetig, und für ihre Dichte gilt (nach der Transformationsformel für Dichten (vgl. Abschnitt 10, Satz

29):

$$f_X(x) = h(\varphi^{-1}(x)) \cdot \left| \frac{d\varphi^{-1}(x)}{dx} \right|.$$

Wir wählen nun $\varphi := F^{-1}$. Dann erhalten wir:

$$f_X(x) = h(F(x)) \cdot \frac{dF(x)}{dx} = f(x).$$

Damit besitzt die Zufallsgröße $X = F^{-1}(U)$ die gewünschte Verteilungsfunktion.

15.4.1 Erzeugung einer normalverteilten Zufallsvariablen

Ziel: $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ erzeugen,

$$F(x) := \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Erzeugung einer solchen Zufallsgröße:

- Quantilmethode (siehe oben)
- Zentraler Grenzwertsatz
- Box-Müller Transformation
- Akzeptanzmethode (s.u.)

Quantilmethode

$U \sim R(0, 1)$. $X := \Phi^{-1}(u) \sim \mathcal{N}(0, 1)$, denn

$$f_X(x) = h(\Phi(x)) \cdot \frac{d\Phi(x)}{dx} = \frac{d\Phi(x)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Problem: Berechnung von $\Phi^{-1}(u)$ ist aufwendig.

Ziel: $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ erzeugen,

$$Y := \mu + \sigma \cdot \Phi^{-1}(U) \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2).$$

Zentraler Grenzwertsatz (vgl. Satz 56, Seite 534).

$U_1, \dots, U_n \sim R(0, 1)$ unabhängig. Erwartungswert und Varianz sind

$$\mu := EU_i = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$$

$$\sigma^2 := E \left(U_i - \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{12}$$

Nach dem zentralen Grenzwertsatz gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\frac{\sum_{i=1}^n U_i - n \cdot \mu}{\sqrt{n} \cdot \sigma} < x \right) = \Phi(x).$$

Einsetzen:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\frac{\sum_{i=1}^n U_i - \frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{12}}} < x \right) = \Phi(x).$$

Definieren wir also eine Zufallsgröße

$$X := \frac{\sum_{i=1}^n U_i - \frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{12}}},$$

so ist diese für hinreichend großes n angenähert standardnormalverteilt.

Bsp. 111 *Es sei $n = 12$. Wir erhalten dann folgende Zufallsgröße X :*

$$X = \sum_{i=1}^{12} U_i - 6.$$

Diese Approximation ist in der Regel ausreichend. Man braucht jedoch 12 Pseudozufallszahlen, um eine standardnormalverteilte Zufallsgröße zu erhalten.

Der Aufwand bei dieser Methode ist also ziemlich hoch.

Satz 64 (BOX–MÜLLER–Transformation) *Seien*
 $U, V \sim R(0, 1)$ *unabhängig. Dann sind die Zufallsgrößen*

$$X = \sqrt{-2 \cdot \ln U} \cdot \cos(2\pi V)$$

$$Y = \sqrt{-2 \cdot \ln U} \cdot \sin(2\pi V)$$

unabhängig und standardnormalverteilt, $X, Y \sim N(0, 1)$.

Beweis: vgl. Beispiel 72, Seite 430.

□

15.4.2 Erzeugung exponentialverteilter Zufallsvariablen

Es sei $U \sim R(0, 1)$ eine Pseudozufallszahl. Erzeugt werden soll eine Zufallsgröße $X \sim EX(\lambda)$ mit der Verteilungsfunktion:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda \cdot x} & , \text{ falls } x \geq 0; \\ 0 & , \text{ sonst.} \end{cases}$$

Dazu wird folgende Transformation verwendet (vgl. Beispiel 62, Seite 377):

$$X := F^{-1}(U) = -\frac{1}{\lambda} \cdot \ln(1 - u) \geq 0.$$

15.4.3 Erzeugung einer binomialverteilten Zufallsvariable

Variante 1: Seien $X_i \sim Bi(1, p)$. Dann ist $X = \sum_{i=1}^n X_i$ binomialverteilt mit Parametern (n, p) .

Variante 2: (Intervallmethode)

Zerlegen das Intervall $(0, 1)$ in disjunkte Teilintervalle der Länge

$$p_k = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

der Einzelwahrscheinlichkeiten, etwa

$$\begin{aligned}(0, 1) &= \bigcup_{i=0}^n I_i \\ &= (0, p_0] \cup (p_0, p_0 + p_1] \cup (p_0 + p_1, p_0 + p_1 + p_2] \cup \dots \\ &\quad \cup (1 - \sum_{i=0}^{n-1} p_i, 1)\end{aligned}$$

Sei $U \sim R(0, 1)$.

$$X = i \quad \text{falls} \quad U \in I_i.$$

15.4.4 Erzeugung einer POISSON–Verteilten Zufallsvariable

Es ist jetzt eine POISSON–verteilte Zufallsgröße X zu erzeugen, d.h.

$$P(X = i) = \frac{\lambda^i}{i!} \cdot e^{-\lambda} \quad (i = 0, 1, 2, \dots).$$

Variante 1: Intervallmethode

Variante 2: (Über die Exponentialverteilung)

Satz 65

Satz 65 Es seien Y_1, \dots, Y_k unabhängige

exponentialverteilte Zufallsgrößen und $Y^{(k)} := \sum_{i=1}^k Y_i$, Dann gilt für die Dichte der Zufallsvariable $Y^{(k)}$:

$$f_{Y^{(k)}}(y) = \begin{cases} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \cdot y^{k-1} \cdot e^{-\lambda \cdot y} & , \text{ falls } y \geq 0; \\ 0 & , \text{ sonst.} \end{cases}$$

Diese Funktion ist die Dichte der sogen. ERLANG-Verteilung mit Parametern (k, λ) .

Beweis: Wir beweisen die Aussage mittels vollständiger Induktion. Es sei $y \geq 0$.

IA: Da $Y^{(1)} = Y_1$ exponentialverteilt,

$$f_{Y^{(1)}}(y) = \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot y}.$$

IV: Es sei die Aussage für k gültig.

IS: Wir zeigen sie für $k + 1$. Es gilt:

$$Y^{(k+1)} = Y^{(k)} + Y_{k+1}.$$

Nun besitzt Y_{k+1} als exponentialverteilte Zufallsgröße dieselbe Dichtefunktion wie die zufällige Variable $Y^{(1)}$.
Folglich können wir die Funktion $f_{Y^{(k+1)}}$ mittels Faltung der Dichtefunktionen $f_{Y^{(k)}}$ und $f_{Y^{(1)}}$ darstellen. Daher erhalten wir:

$$\begin{aligned}
f_{Y^{(k+1)}}(y) &= \int_0^{\infty} f_{Y^{(k)}}(x) \cdot f_{Y^{(1)}}(y-x) dx \\
&= \int_0^y \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \cdot x^{k-1} \cdot e^{-\lambda \cdot x} \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot (y-x)} dx \\
&= \int_0^y \frac{\lambda^{k+1}}{(k-1)!} \cdot x^{k-1} \cdot e^{-\lambda \cdot y} dx \\
&= \frac{\lambda^{k+1}}{(k-1)!} \cdot e^{-\lambda \cdot y} \cdot \int_0^y x^{k-1} dx \\
&= \frac{\lambda^{k+1}}{k!} \cdot y^k \cdot e^{-\lambda \cdot y}
\end{aligned}$$



Satz 66 Sind Y_i ($i \in \mathbb{N}$) unabhängige, exponentialverteilte Zufallsgrößen ($Y_i \sim \text{EX}(\lambda)$, $i \in \mathbb{N}$), so ist die wie folgt definierte Zufallsvariable Y POISSON–verteilt mit Parameter λ :

$$Y := \inf \left\{ k : \sum_{i=1}^{k+1} Y_i > 1 \right\} \sim \text{Poi}(\lambda).$$

Es gilt also:

$$P(Y = i) = \frac{\lambda^i}{i!} \cdot e^{-\lambda} \quad (i = 1, 2, \dots).$$

Beweis: Es gilt:

$$\begin{aligned} P(Y = k) &= P\left(\sum_{i=1}^k Y_i \leq 1, \sum_{i=1}^{k+1} Y_i > 1\right) \\ &= P\left(\sum_{i=1}^k Y_i \leq 1, Y_{k+1} > 1 - \sum_{i=1}^k Y_i\right) \\ &= \int_0^1 P(Y_{k+1} > 1 - T | T = t) f_T(t) dt \\ &= \int_0^1 P(Y_{k+1} > 1 - t) f_T(t) dt \\ &= \int_0^1 e^{-\lambda(1-t)} \cdot \frac{\lambda^k}{(k-1)!} t^{k-1} e^{-\lambda t} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= e^{-\lambda} \lambda^k \int_0^1 \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} dt \\ &= e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \end{aligned}$$

wobei $T = Y^{(k)} = \sum_{i=1}^k Y_i$ Erlang-verteilt ist.

□

15.4.5 Erzeugung einer geometrisch verteilten Zufallsvariable

Variante 1: Zur Erzeugung einer geometrisch verteilten Zufallsvariablen $X \sim Geo(p)$ seien $Y_i \sim Bi(1, p)$ Bernoulli verteilte Zufallsvariablen und

$$X = \min\{n : Y_n = 1\}$$

Variante 2: Sei $Y \sim Exp(\lambda)$, d.h. $F(y) = 1 - e^{-\lambda y}$. Die Zufallsvariable $\lfloor Y \rfloor$ ist geometrisch verteilt mit $p = 1 - e^{-\lambda}$.

Beweis: Es gilt:

$$\begin{aligned}P(\lfloor Y \rfloor = k) &= P(k \leq Y < k + 1) \\&= F(k + 1) - F(k) \\&= (1 - e^{-\lambda(k+1)}) - (1 - e^{-\lambda k}) \\&= e^{-\lambda k}(1 - e^{-\lambda}) = (1 - p)^k p\end{aligned}$$

□

15.4.6 Kompositionsmethode

Sei F eine Linearkombination von mehreren Verteilungsfunktionen F_i ,

$$F = \sum_{i=1}^k \epsilon_i F_i, \quad \sum_{i=1}^k \epsilon_i = 1.$$

Algorithmus:

Erzeuge gleichverteilte Zufallszahl U ,
falls $U \in [\sum_{j=1}^{i-1} \epsilon_j, \sum_{j=1}^i \epsilon_j)$ simuliere aus F_i .

Es folgen zwei Beispiele.

Kontaminierte Normalverteilung

$$F(x) = (1 - \epsilon)\Phi\left(\frac{x - \mu_1}{\sigma_1}\right) + \epsilon\Phi\left(\frac{x - \mu_2}{\sigma_2}\right)$$

Doppelexponential (Laplace)

$$X_1 \sim \exp(\lambda)$$

$$X = \begin{cases} X_1 & \text{falls } U \leq \frac{1}{2} \\ -X_1 & \text{falls } U > \frac{1}{2} \end{cases}$$

15.4.7 Verwerfungsmethode (Accept-Reject Sampling)

F habe Dichte f , aber die Zufallszahlen seien schwierig direkt zu erzeugen.

Erzeugung von Zufallszahlen mit der Dichte g sei “leicht”.

$$M := \sup_x \frac{f(x)}{g(x)} < \infty$$

Algorithmus:

1. Simuliere $U \sim R(0, 1)$
2. Simuliere $Y \sim g$
3. Akzeptiere $X = Y$, falls $U \leq \frac{1}{M} \frac{f(Y)}{g(Y)}$
sonst gehe nach 1. (neuer Versuch)

$$\begin{aligned}
P(Y \text{ akzeptiert}) &= P\left(U \leq \frac{1}{M} \frac{f(Y)}{g(Y)}\right) \\
&= \int P\left(U \leq \frac{1}{M} \frac{f(Y)}{g(Y)} \mid Y = y\right) g(y) dy \\
&= \int \frac{1}{M} \frac{f(y)}{g(y)} \cdot g(y) dy = \frac{1}{M}.
\end{aligned}$$

(Integration über den Definitionsbereich von Y)

Im Mittel müssen also M Zufallszahlen Y erzeugt werden.

Die Methode ist korrekt, denn:

$$\begin{aligned} P(X \leq x | Y \text{ akzeptiert}) &= \int_{-\infty}^x P(Y = y | Y \text{ akzeptiert}) g(y) dy \\ &= \int_{-\infty}^x \frac{P(Y \text{ akzeptiert}, Y = y)}{P(Y \text{ akzeptiert})} g(y) dy \\ &= \int \frac{P\left(U \leq \frac{1}{M} \frac{f(y)}{g(y)}\right)}{P(Y \text{ akzeptiert})} g(y) dy \\ &= M \int_{-\infty}^x \frac{1}{M} \frac{f(y)}{g(y)} g(y) dy \\ &= F(x). \end{aligned}$$

Bsp. 112

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \quad (\text{Normal})$$

$$g(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|} \quad (\text{Doppelexp})$$

$$\begin{aligned} \sup_x \frac{f(x)}{g(x)} &= \sup_x \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-x^2/2+|x|} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sup_x e^{(-x^2+2|x|-1+1)/2} \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{1/2} \sup_{x, x \geq 0} e^{-(x-1)^2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{1/2} \approx 1.315. \end{aligned}$$

Verwerfungsmethode .sas

15.4.8 Erzeugung von korrelierten Zufallsgrößen

Es seien X und Y zwei unabhängige, standardisierte Zufallsgrößen ($X, Y \sim (0, 1)$). Wir definieren zwei weitere Zufallsgrößen X^* und Y^* wie folgt:

$$X^* := X$$

$$Y^* := \varrho \cdot X + \sqrt{1 - \varrho^2} \cdot Y \quad (\varrho \in [0, 1])$$

Beh.: ϱ ist der gewünschte Korrelationskoeffizient zwischen X^* und Y^* (s. Abschnitt Korrelation).

Ist $\varrho = 1$, dann gilt $Y^* = X^* = X$, d.h. die beiden Zufallsgrößen sind identisch. Wird $\varrho = 0$ gewählt, so sind beide Zufallsvariablen unabhängig.

15.4.9 Das Buffonsche Nadelproblem (1777)

In der Ebene seien zwei parallele Geraden im Abstand a gezogen.

Auf die Ebene wird zufällig eine Nadel der Länge l , ($l \leq a$) geworfen.

Frage: Wie groß ist die Wkt., daß die Nadel eine der Geraden schneidet?

Was heißt Nadel zufällig werfen?

X : Abstand des Nadelmittelpunkts von der nächstgelegenen Geraden, $0 \leq X \leq \frac{a}{2}$.

ϕ : Winkel zwischen Nadel und Geraden, $0 < \phi \leq \pi$.

Nadel zufällig werfen:

$$X \sim R\left(0, \frac{a}{2}\right), \quad \phi \sim R(0, \pi).$$

Wann schneidet die Nadel eine Parallele? gdw.

$$X \leq \frac{l}{2} \sin \phi$$

gdw. der Punkt (ϕ, X) unterhalb des Sinusbogens liegt.

$$\begin{aligned} P &= \frac{\text{Fläche unterhalb des Sinusbogens}}{\text{Fläche des Rechtecks } [0, \pi] \times [0, \frac{a}{2}]} \\ &= \frac{\int_0^\pi \frac{l}{2} \sin \phi \, d\phi}{\pi \cdot \frac{a}{2}} \\ &= \frac{2l}{\pi a} \end{aligned}$$

Insbesondere: $a = 2l$:

$$P = \frac{1}{\pi}.$$

Schätzung für π :

$$\hat{\pi} = \frac{\#\text{Würfe}}{\#\text{Treffer}}$$

15.4.10 Simulation einer Markoff'schen Kette

gegeben: Zustandsraum: $S = \{1, 2, \dots\}$

Anfangsverteilung: $\{p_j^0\}_{j=1,2,\dots}$, $(p_0^0 = 0)$

Übergangsmatrix:

$$\left(p_{ij} \right)_{\substack{i=1,2,\dots \\ j=1,2,\dots}}$$

1. Schritt: Erzeuge eine Pseudozufallszahl U_0 . Falls

$$\sum_{k=0}^{i-1} p_k^0 \leq U_0 < \sum_{k=0}^i p_k^0$$

so starte im Zustand "i".

n -ter Schritt: Im $n - 1$ ten Schritt sei der Zustand “i” erreicht worden. Erzeuge eine Pseudozufallszahl U_n . Falls

$$\sum_{k=0}^{j-1} p_{ik} \leq U_n < \sum_{k=0}^j p_{ik}$$

so gehe in den Zustand “j”.

15.4.11 *Simulation von auf der n -dimensionalen Kugeloberfläche gleichverteilten Zufallsvariablen

Satz 67 Seien $X_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$, *i.i.d.* $i = 1, \dots, n$, und

$$Y_i = \frac{X_i}{R}, \quad i = 1, \dots, n,$$

wobei

$$R^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2.$$

Dann gilt

$$Y_i \sim R(K_n^O(0, 1)),$$

wobei $K_n^O(0, 1)$ die Oberfläche der n -dimensionalen Einheitskugel ist.

Beweis: Wir betrachten die Transformation

$$G : \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow K_{n-1}(0, 1) \times \mathbb{R}^+$$

wobei $K_{n-1}(0, 1)$ die $n - 1$ dimensionale Einheitsvollkugel ist.

$$\begin{aligned} y_2 &= \frac{x_2}{r} \\ &\dots \\ y_n &= \frac{x_n}{r} \\ r &= r \end{aligned}$$

Diese Abbildung ist injektiv und es gilt für G^{-1} :

$$\begin{aligned} x_2 &= r \cdot y_2 \\ &\dots \\ x_n &= r \cdot y_n \\ r &= r \end{aligned}$$

Die Jacobi-Matrix ist

$$J := \frac{\partial G^{-1}(y_2, \dots, y_n, r)}{\partial (y_2, \dots, y_n, r)} = \begin{pmatrix} r & 0 & \dots & 0 & y_2 \\ 0 & r & \dots & 0 & y_3 \\ & & \dots & & \\ 0 & 0 & \dots & r & y_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Also: $\det J = r^{n-1}$.

Die gemeinsame Dichte von $(\mathbf{Y}, R) = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n, R)$ ist dann

$$f_{\mathbf{Y}, R}(y_1, \dots, y_n, r)$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{cases} f_{\mathbf{X},R}(ry_1, G^{-1}(y_2, \dots, y_n, r)) \cdot \det J, & y_1^2 = 1 - \sum_{j=2}^n y_j^2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \prod_{j=1}^n e^{-\frac{r^2 y_j^2}{2}} \cdot r^{n-1}, & y_n^2 = 1 - \sum_{j=1}^{n-1} y_j^2 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{r^2}{2}} \cdot r^{n-1} & \text{falls } y_n^2 = 1 - \sum_{j=1}^{n-1} y_j^2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}
\end{aligned}$$

Die Zufallsvektoren (Y_1, \dots, Y_n) und R sind also unabhängig

und wegen

$$\begin{aligned} \frac{e^{-\frac{r^2}{2}} \cdot r^{n-1}}{(2\pi)^{n/2}} &= \frac{r^{n-1} e^{-\frac{r^2}{2}}}{2^{\frac{n}{2}-1} \Gamma(\frac{n}{2})} \cdot \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{2\pi^{\frac{n}{2}}} \\ &= f_{\chi_n}(r) \cdot \frac{1}{A_{K_n^O(0,1)}} \end{aligned}$$

ist

$$R \sim \chi_n \quad \text{und} \quad \mathbf{Y} \sim R(K_n^O(0,1))$$

mit der Dichte

$$\frac{1}{A_{K_n^O(0,1)}}$$

wobei

$$A_{K_n^O(0,1)} = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$$

die Fläche der n -dimensionalen Einheitskugel ist.



Bem.: Die Fläche der n -dimensionalen Kugeloberfläche ist,
vgl. Fichtenholz 3, S.389,

$$A_{K_n^O(0,r)} = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} r^{n-1}$$

$$n = 2: \quad 2\pi r$$

$$n = 3: \quad 4\pi r^2 \quad \left(\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \right)$$

$$n = 4: \quad 4\pi^2 r^3$$