16 Markoff'sche Ketten

Beispiele

Irrfahrten (auf der Geraden, der Ebene, im Raum)

Ruin des Spielers

Markov Chain Monte Carlo (z.B. Simulated Annealing)

Fragestellungen

Rückkehrwktn., Absorptionswktn.

Erste Rückkehr

Stationäre Verteilungen

16.1 Definitionen und einfache Zusammenhänge

$\{X_t\}_{t\in T}$: Famile von Zufallsgrößen.

T: total geordnete Menge (mit kleinstem Element t_0).

T endlich, o.B.d.A. $T = \{0, 1, 2, \ldots, k\}$ oder

T abzählber, o.B.d.A. $T \in \{0, 1, 2, \ldots\} = \mathbb{N}$

Wir betrachten ein System, das aus einem Anfangszustand für $t = t_0$ schrittweise übergeht in Zustände für $t = t_1, t = t_2, \ldots$.

Menge der Zustände: Zustandsraum S,

$S = \{1, 2, \ldots, m\}$ oder $S = \mathbb{N}$ oder $S = \mathbb{Z}$.

Für jedes t wird der (aktuelle) Zustand durch eine Zufallsvariable X_t beschrieben,

$$P(X_t \in S) = 1, \qquad F_t(x) := P(X_t < x)$$

Def. 55 *Es sei T, $T \subseteq \mathbb{Z}^+$, eine abzählbare Menge und S, $S \subseteq \mathbb{Z}$ (Zustandsraum) eine höchstens abzählbare Menge. Die Elemente von S nennen wir <u>Zustände</u>. Es sei nun $\{X_t\}_{t \in T}$ eine Familie von zufälligen Größen, für die gelte:*

$$P(X_t \in S) = 1, \quad \forall t \in T.$$

Diese Familie von Zufallsgrößen heißt <u>MARKOFF'sche Kette</u>, falls gilt:

$$P(X_{t+1} = j \,|\, X_t = i, X_{t-1} = i_{t-1}, \ldots, X_0 = i_0) = P(X_{t+1} = j \,|\, X_t = i) =: p_{ij}^{(t)}.$$

Die Anfangsverteilung der MARKOFF'schen Kette bezeichnen wir mit $p_i^{(0)} = P(X_0 = i)$.

Bem.: Wir stellen uns also vor, daß wir, beginnend im Zustand i_0, über die Zustände $i_1, \ldots, i_{t-1}$ in den Zustand i gelangt sind und nun in einen weiteren Zustand übergehen wollen. Eine Familie von Zufallsgrößen ist eine MARKOFF'sche Kette, wenn für den Übergang in diesen Zustand nur der unmittelbar vorangegangene Zustand, also der Zustand i, relevant ist. (Markoff-Eigenschaft)

Def. 56 *Eine* MARKOFF*'sche Kette heißt* <u>*homogen*</u>*, wenn für alle* $i, j \in S$ *und für alle* $t \in T$ *gilt, daß* $p_{ij}^{(t)} = p_{ij}$*, d.h. wenn die Übergangswahrscheinlichkeiten unabhängig vom jeweiligen Schritt* t *sind.*

p_{ij} *heißt Übergangswahrscheinlichkeit vom Zustand* i *in den Zustand* j*.*

Def. 57 *Die Matrix* $\mathbf{M} = (p_{ij})_{i,j\in S}$,

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & \cdots \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & \cdots \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix},$$

heißt Übergangsmatrix der MARKOFF*'schen Kette, falls folgendes gilt:*

$$p_{ij} \geq 0, \qquad \forall i,j \in S \text{ und } \sum_{j\in S} p_{ij} = 1 \quad \forall i \in S,$$

d.h. die Wahrscheinlichkeit, in irgendeinen nächsten Zustand j *zu gelangen, ist Eins.*

Wir werden in diesem Kapitel ausschließlich homogene MARKOFF'sche Ketten betrachten.

Es sei $\{X_t\}_{t \in T}$ eine solche homogene MARKOFF'sche Kette. Wir definieren:

$$p_{ij}(n) := P(X_{m+n} = j | X_m = i).$$

Das ist die Wahrscheinlichkeit, daß man nach n Schritten aus dem Zustand i in den Zustand j gelangt. Da die Kette homogen ist, gilt:

$$p_{ij}(n) = P(X_n = j | X_0 = i).$$

Wie kann nun die Matrix für die Wahrscheinlichkeiten $p_{ij}(n)$ aus der „Ein–Schritt–Übergangsmatrix“ berechnet werden?

Annahme: Anfangszustand und Übergangswahrscheinlichkeiten p_{ij} bekannt.

Es gilt:

$$\begin{aligned} p_{ij}(0) &= \begin{cases} 1 & \text{, falls } i = j; \\ 0 & \text{, sonst.} \end{cases} \\ p_{ij}(1) &= p_{ij}. \end{aligned}$$

Untersuchen wir die Wahrscheinlichkeit $p_{ij}(2)$:

$$\begin{aligned} p_{ij}(2) &= P(X_2 = j | X_0 = i) \\ &= \sum_{k \in S} P(X_2 = j, X_1 = k | X_0 = i) \end{aligned}$$

Wir wenden die Formel der totalen Wahrscheinlichkeit (vgl. Seite 108) an, und zwar mit

- $A_i := \{X_1 = i\}$, für alle $i \in S$, denn: $\bigcup_{i\in S} A_i = \Omega$ und $A_i \cap A_j = \emptyset$, für alle $i, j \in S$ mit $i \neq j$;
- $A := \{X_2 = j\}$.

Dann erhalten wir:

$$\begin{aligned} p_{ij}(2) &= \sum_{k\in S} P(X_2 = j|\, X_1 = k, X_0 = i) \cdot P(X_1 = k|\, X_0 = i) \\ &= \sum_{k\in S} P(X_2 = j|\, X_1 = k) \cdot P(X_1 = k|\, X_0 = i) \\ &= \sum_{k\in S} p_{kj} \cdot p_{ik} = (\mathbf{M}^2)_{ij} \end{aligned}$$

Allgemein gilt die Rekursion von Chapman–Kolmogorov

$$
\begin{aligned}
\mathbf{M}_n &= \mathbf{M}^n \\
p_{ij}(n) &= \sum_{k \in S} p_{ik}(n-m) \cdot p_{kj}(m) \\
&= \sum_{k \in S} p_{ik}(n-1) \cdot p_{kj}, \quad (m=1).
\end{aligned}
$$

Folg. 9

$$
P(X_n = j) = \sum_k p_{kj}(n) \cdot p_k^0.
$$

Beweis: Es gilt:

$$\begin{aligned} P(X_n = j) &= \sum_k P(X_n = j, X_0 = k) \\ &= \sum_k P(X_n = j | X_0 = k) \cdot P(X_0 = k) \\ &= \sum_k p_{kj}(n) \cdot p_k^0. \end{aligned}$$

$\square$

$p_j = P(X_n = j), \quad \mathbf{p}^T = (p_1, p_2, \ldots)$

$$\mathbf{p} = \mathbf{M}^{n^T} \cdot \mathbf{p}^0, \qquad \mathbf{p}^T = \mathbf{p}^{0^T} \cdot \mathbf{M}^n$$

Bsp. 113 (Ein-Prozessorsystem)
mit einer I/O–Einheit, *vgl. Bsp. 25*

$S = \{1, 2\}$

1*: Programmstatus, in dem sich das System befindet, wenn es ein Programm abarbeitet (Prozessor aktiv)*

2*: I/O–Status, der dann angenommen wird, wenn die I/O–Einheit aktiviert wird.*

Für jeden Schritt n*, den das System macht, definieren wir eine Zufallsgröße* X_n*, die die Elemente der Menge* S *als Werte annehmen kann, je nachdem, in welchem Zustand sich das System in diesem Schritt befindet. Dann haben wir für die Übergangswahrscheinlichkeiten:*

$$X_n = 1 \implies X_{n+1} = 1, \text{ mit Wahrscheinlichkeit } q = 1 - p$$
$$X_n = 1 \implies X_{n+1} = 2, \text{ mit Wahrscheinlichkeit } p$$
$$X_n = 2 \implies X_{n+1} = 1, \text{ mit Wahrscheinlichkeit } 1$$
$$X_n = 2 \implies X_{n+1} = 2, \text{ mit Wahrscheinlichkeit } 0$$

Übergangsmatrix:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Anfangsverteilung $p_i^{(0)} = P(X_0 = i)$ müssen wir festlegen. Sie ist, entsprechend der Arbeitsweise des Systems, wie folgt definiert:

- $p_1^{(0)} = 1$, d.h. die erste Aktion ist mit Wahrscheinlichkeit Eins die Ausführung eines Programms;
- $p_2^{(0)} = 0$, d.h. die erste Aktion ist mit Wahrscheinlichkeit Null die Aktivierung der I/O–Einheit.

$$\mathbf{M}_2 = \begin{pmatrix} (1-p)^2 + p & p(1-p) \\ 1-p & p \end{pmatrix}$$

16.2 Klassifikation der Zustände

Def. 58 *Ein Zustand j heißt vom Zustand i aus erreichbar, wenn es eine Zahl n gibt, so daß gilt: $p_{ij}(n) > 0$.*
Bez.: $i \longrightarrow j$.

Def. 59 *Zwei Zustände i und j kommunizieren, wenn gilt: $i \longrightarrow j$ und $j \longrightarrow i$. Wir schreiben dann: $i \longleftrightarrow j$.*

Die Relation „$\longleftrightarrow$" ist eine Äquivalenzrelation:

1. Sie ist **reflexiv**. Es gilt: $i \longleftrightarrow i$ wegen $p_{ii}(0) = 1$.

2. Sie ist **symmetrisch**.

   $i \longleftrightarrow j$ gdw. $j \longleftrightarrow i$.

3. Sie ist **transitiv**.

Es gelte $i \longleftrightarrow j$ und $j \longleftrightarrow k$. D.h. es existieren Zahlen $m, n \geq 0$, so daß gilt:

$$p_{ij}(m) > 0, \quad p_{jk}(n) > 0.$$

Dann folgt aus der Chapman–Kolmogorov Rekursion

$$\begin{aligned} p_{ik}(m+n) &= \sum_{l \in S} p_{il}(m) \cdot p_{lk}(n) \\ &\geq p_{ij}(m) \cdot p_{jk}(n) > 0 \end{aligned}$$

Nach $m+n$ Schritten erreicht man folglich vom Zustand i aus den Zustand k. Es gilt also: $i \longrightarrow k$. Mit Hilfe der Symmetrieeigenschaft der Relation „$\longleftrightarrow$", angewendet auf die Voraussetzung, folgt $k \longrightarrow i$ gilt.

Folg. 10 *Es sei S der Zustandsraum einer* MARKOFF*'schen Kette. Es gibt eine Zerlegung von S in Äquivalenzklassen bzgl. der Relation „$\longleftrightarrow$".*

Die kommunizierenden Zustände lassen sich weiter unterteilen.

Def. 60 *Gibt es für einen Zustand i einen Zustand j und eine Zahl $n \geq 0$, so daß*

$$p_{ij}(n) > 0, \text{ aber } p_{ji}(m) = 0, \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

gilt, so heißt i <u>unwesentlicher</u> oder auch <u>vorübergehender Zustand</u>.
Andernfalls heißt i <u>wesentlicher</u> <u>Zustand</u>.

Bsp. 114 *Wir betrachten den Zustandsraum* $S = \{1, 2, 3, 4\}$*. Eine* MARKOFF*'sche Kette auf diesem Zustandsraum habe die folgende Übergangsmatrix* M*:*

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Die Zustände 1 *und* 2 *sind hier unwesentliche Zustände. Für den Zustand* 1 *existiert der Zustand* 3*, für den gilt, daß* $p_{13}(1) = \frac{1}{2} > 0$ *ist. Eine Zahl* m*, für die* $p_{31}(m) > 0$ *gilt, läßt sich jedoch nicht finden. Vergleichen wir die Zustände* 2 *und* 4*, kommen wir zu einem ähnlichen Ergebnis.*

Die Zustände 3 *und* 4 *sind dagegen wesentlich.*

An der Matrix $\mathbf{M}$ *läßt sich das in diesem Fall alles ablesen.*

Die Elemente des Zustandsraumes sind in diesem Beispiel bereits so sortiert, daß die unwesentlichen Zustände vorn stehen. Wir sehen, daß in der Matrix in den ersten beiden Spalten im unteren Bereich nur noch Nullen stehen. Man sollte sich folgendes klarmachen: Diese Nullen zeigen, daß man aus den durch die Zeilennummern der Nullen bezeichneten Zuständen nicht mehr in die Zustände, die durch die betreffenden Spaltennummern gekennzeichnet werden, zurückkehren kann.

Verallgemeinerung: Durch eine geeignete Numerierung der Zustände kann die Übergangsmatrix M einer MARKOFF'schen Kette wie in der

Abbildung (s. Tafel)

dargestellt werden.

Dabei sind die s_i die Zustandsklassen, in die der Zustandsraum S bzgl. der Äquivalenzrelation „$\longleftrightarrow$“ zerlegt werden kann. s_0 ist die Klasse der unwesentlichen Zustände, die s_i $(i \geq 1)$ sind die Klassen der wesentlichen Zustände. Die schraffierten Felder sind Teilmatrizen der Matrix M, die mit Übergangswahrscheinlichkeiten bestzt sind. Man sieht auch, daß Übergänge nur innerhalb einer Zustandsklasse möglich sind.

Def. 61 *Besteht eine Äquivalenzklasse s_i bzgl. „$\longleftrightarrow$“ nur aus einem einzigen Zustand ($s_i = \{j_i\}$), so heißt dieser Zustand <u>absorbierender Zustand</u>.*

Def. 62 *Eine* MARKOFF*'sche Kette heißt <u>irreduzibel</u> oder <u>unzerlegbar</u>, wenn der Zustandsraum S aus genau einer Klasse wesentlicher Zustände besteht.*

Bsp. 115 $S = \{1, 2\}$, *Übergangsmatrix:*

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{M}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = M_n \quad \forall n \geq 1.$$

$\{X_t\}$ *ist reduzibel!* *Zustand 1 ist absorbierend!!*
$\{1\}$ *ist die einzige Äquivalenzklasse.*

Bsp. 116 $S = \{1, 2, 3\}$, *Übergangsmatrix:*

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{M}_2 = \mathbf{M}^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{3}{8} & \frac{19}{48} & \frac{11}{48} \\ \frac{1}{6} & \frac{11}{36} & \frac{19}{36} \end{pmatrix}$$

$p_{ij}(2) > 0 \quad \forall i, j \in S$.

$\{X_t\}$ *ist irreduzibel! Offensichtlich kommunizieren hier alle drei Zustände miteinander.*

16.3 Rekurrente und transiente Zustände

Für alle $n \in \mathbb{N}$ bezeichnen wir mit

$$f_i(n) = P(X_n = i, X_{n-1} \neq i, \ldots, X_1 \neq i, X_0 = i)$$

die Wahrscheinlichkeit, daß nach n Schritten erstmalig wieder der Zustand i erreicht wird. Es gilt:

$$f_i(0) = 0 \text{ und } f_i(1) = p_{ii}.$$

Sei i fest und seien $\quad \forall k = 1, \ldots, n$

$$B_k = \{X_k = i, X_\nu \neq i \quad \forall \nu = 1, \ldots, k-1 | X_0 = i\}$$

$B_{n+1} = \{$System befand sich während der ersten n Schritte nie im Zustand $i\}$.

Offenbar

$$\bigcup_{l=1}^{n+1} B_l = \Omega, \qquad B_l \cap B_{l'} = \emptyset \quad (l \neq l').$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} p_{ii}(n) &= P(X_n = i | X_0 = i) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} P(X_n = i | B_k) \cdot P(B_k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} f_i(k) p_{ii}(n-k) + P(X_n = i | B_{n+1}) \cdot P(B_{n+1}) \end{aligned}$$

Wegen $P(X_n = i | B_{n+1}) = 0$ folgt

$$p_{ii}(n) = \sum_{k=1}^{n} f_i(k) \cdot p_{ii}(n-k) \qquad (n \geq 1).$$

Damit läßt sich $f_i(k)$ rekursiv berechnen:

$$\begin{aligned}
f_i(0) &= 0, \qquad f_i(1) = p_{ii} \\
p_{ii}(2) &= f_i(1) \cdot p_{ii}(1) + f_i(2) \cdot p_{ii}(0) \\
&= p_{ii}^2 + f_i(2) \\
f_i(2) &= p_{ii}(2) - p_{ii}^2 \\
\Big(p_{ii}(2) &= \sum_k p_{ik} p_{ki} \geq p_{ii}^2\Big).
\end{aligned}$$

Wirbezeichnen mit

$$F_i := \sum_{j=1}^{\infty} f_i(j)$$

die Wkt., daß man irgendwann in den Zustand i zurückkehrt.

Def. 63 *Ein Zustand $i \in S$ heißt rekurrent, wenn $F_i = 1$ gilt. Ist dagegen $F_i < 1$, so heißt er transient.*

Bemerkung: Wir werden in der Vorlesung einige der folgenden Beweise weglassen.

Satz 68 *Zustand i rekurrent $\Rightarrow$ er wird unendlich oft erreicht mit Wkt. 1.*

Zustand i transient $\Rightarrow$ er kann höchstens endlich oft erreicht werden.

Beweis: Sei $r_i(k)$ die Wkt., dass die MK mindestens k mal nach i zurückkehrt.

$$\begin{aligned}
r_i(k) &= \sum_{n=1}^{\infty} P(k\text{-}1 \text{ mal zurück} \mid \text{erstmals nach } n \text{ Schritten zurück}) \cdot \\
&\qquad P(\text{nach } n \text{ Schritten das erste Mal nach } i \text{ zurück}) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} f_i(n) r_i(k-1) \\
&= r_i(k-1) \sum_{n=1}^{\infty} f_i(n) \\
&= r_i(k-1) F_i \\
\Rightarrow r_i(k) &= F_i^k
\end{aligned}$$

Ist i rekurrent, also $F_i = 1$, dann ist $r_i(k) = 1 \quad \forall k \in \mathbb{N}$.

Sei i transient, d.h. $F_i < 1$.

Sei Z_i die Anzahl der Besuche in i.

$$P(Z_i = k) = F_i^k(1 - F_i)$$

geometrische Verteilung mit Parameter $(1 - F_i)$.

$$\mathbf{E}Z_i = \frac{1}{1 - F_i} < \infty$$

Satz 69 *Ein Zustand i ist genau dann rekurrent, wenn gilt:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}(n) = \infty.$$

Er ist genau dann transient, wenn $\sum\limits_{n=0}^{\infty} p_{ii}(n) < \infty$ *ist.*

Beweis: (für einen anderen Beweis siehe z.B. Mathar/Pfeifer, Satz 3.2.1).

Erinnerung:

$$p_{ii}(n) = \sum_{k=1}^{n} f_i(k) \cdot p_{ii}(n-k) \qquad (n \geq 1)$$

Multiplizieren diese Gleichung mit z^n und summieren über n:

$$
\begin{aligned}
P_i(z) &:= \sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}(n) z^n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} z^n \Bigl(\sum_{k=1}^{n} f_i(k) \cdot p_{ii}(n-k) \Bigr) \\
&= \quad z f_i(1) \cdot p_{ii}(1-1) \\
&\quad + z^2 \bigl(f_i(1) \cdot p_{ii}(2-1) + f_i(2) \cdot p_{ii}(2-2) \bigr) \\
&\quad + z^3 \bigl(f_i(1) \cdot p_{ii}(3-1) + f_i(2) \cdot p_{ii}(3-2) + f_i(3) \cdot p_{ii}(3-3) \bigr) \\
&\quad + \ldots \\
&\quad + z^n \bigl(f_i(1) \cdot p_{ii}(n-1) + \ldots + f_i(n) \cdot p_{ii}(0) \\
&\quad + \ldots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= \quad & z f_i(1)\left(1+\sum_{\nu=1}^{\infty} z^{\nu} p_{ii}(\nu)\right) \\
& +z^2 f_i(2)\left(1+\sum_{\nu=1}^{\infty} z^{\nu} p_{ii}(\nu)\right) \\
& +\ldots \\
& +z^n f_i(n)\left(1+\sum_{\nu=1}^{\infty} z^{\nu} p_{ii}(\nu)\right) \\
& +\ldots \\
= \quad & \sum_{\nu=1}^{\infty} z^{\nu} f_i(\nu) \cdot \big(1+P_i(z)\big) \\
= \quad & F_i(z) \cdot \big(1+P_i(z)\big)
\end{aligned}
$$

wobei

$$F_i(z) := \sum_{\nu=1}^{\infty} z^\nu f_i(\nu).$$

Die Fkt. $F_i(z)$ und $P_i(z)$ sind analytisch für $|z| < 1$.

$$F_i(z) = \frac{P_i(z)}{1 + P_i(z)}, \quad P_i(z) = \frac{F_i(z)}{1 - F_i(z)}$$

$$\lim_{z \to 1} F_i(z) = F_i(1) = F_i = \sum_{\nu=1}^{\infty} f_i(\nu)$$

ist die Wkt. für eine Rückkehr nach i. Sei

$$\lim_{z \to 1} P_i(z) = P_i = \sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}(n) = \infty$$

Daraus folgt

$$F_i = \lim_{z \to 1} \frac{P_i(z)}{1 + P_i(z)} = 1,$$

d.h. i ist rekurrent.

Sei umgekehrt $F_i = 1$. Dann folgt

$$P_i = \lim_{z \to 1} P_i(z) = \frac{1}{1 - \lim_{z \to 1} F_i(z)} = \infty.$$

Der zweite Teil des Satzes ist die Kontraposition des ersten Teils. $\square$

Folg. 11 *Sei i transient. dann*

$$F_i = \frac{P_i}{1 + P_i} < 1.$$

Diese beiden Aussagen können zum Beweis des folgenden Lemmas verwendet werden.

Lemma 70 *Ist ein Zustand i rekurrent (transient) und kommuniziert er mit einem Zustand j ($i \longleftrightarrow j$), so ist auch der Zustand j rekurrent (transient).*

Beweis: 1. Sei $i \longleftrightarrow j$. Dann existieren $m, k > 0$: $p_{ij}(k) > 0$ und $p_{ji}(m) > 0$. Für alle $n \in \mathbf{N}$ gilt:

$$\begin{aligned} p_{jj}(m+n+k) &= \sum_l \Big(\sum_{k'} p_{jk'}(m) p_{k'l}(n)\Big) p_{lj}(k) \\ &= \sum_l p_{jl}(m+n) p_{lj}(k) \\ &\geq p_{ji}(m) p_{ii}(n) p_{ij}(k) \qquad (l = i). \end{aligned}$$

Daraus folgt (da i rekurrent)

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}(m+n+k) \geq p_{ji}(m)p_{ij}(k) \sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}(n) = \infty.$$

2. Sei $i \longleftrightarrow j$. und i transient. Ang, j wäre rekurrent, dann wäre nach 1. auch i rekurrent. Wid.

$\square$

Folg. 12 *Eine irreduzible* MARKOFF*'sche Kette mit endlich vielen Zuständen hat nur rekurrente Zustände.*

Beweis: Mindestens ein Zustand muß rekurrent sein. Da alle Zustände miteinander kommunizieren, sind alle Zustände rekurrent. $\square$

Bsp. 117 (Random walk, eindim. Fall) *Der Zustandsraum ist $S = \mathbb{Z}$. Die Übergangswahrscheinlichkeiten sind*

$$\begin{aligned} p_{i,i+1} &:= p \\ p_{i,i-1} &:= 1-p \\ p_{ij} &:= 0, \qquad \textit{falls } |i-j| \neq 1. \end{aligned}$$

D.h. Übergänge zwischen Zuständen, die einen Abstand ungleich Eins zueinander haben, sind nicht möglich. Die

Übergangsmatrix $\mathbf{M}$ hat folgende Gestalt:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \dots & 0 & p & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 1-p & 0 & p & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 1-p & 0 & p & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 1-p & 0 & \dots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Offenbar kommunizieren alle Zustände miteinander. Ist somit ein Zustand rekurrent, so sind es alle. Und umgekehrt.

Es genügt also zu untersuchen:

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{00}(n).$$

Dazu siehe den Abschnitt Irrfahrten!

$\sum_{n=1}^{\infty} p_{00}(n) = \infty$, wenn $p = \frac{1}{2}$.

Bsp. 118 (Random walk, zwei- und dreidim. Fall) *Im zweidimensionalen Fall haben wir in jedem Zustand vier mögliche Übergänge, denen die Wahrscheinlichkeiten* p_1, p_2, p_3 *und* p_4 *zugeordnet werden. DieZustände sind rekurrent, wenn* $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = \frac{1}{4}$ *gilt.*

Im dreidimensionalen Fall sind in jedem Punkt im dreidimensionalen ganzzahligen Gitter sechs Übergänge möglich. Auch wenn $p_1 = \ldots = p_6 = \frac{1}{6}$*, so sind alle Zustände transient.*

Dazu siehe den Abschnitt Irrfahrten!

(die folgenden drei Seiten können überlesen werden.)

Sei jetzt der Zustand i Startzustand (fest) und

$Y_1 = \#$ Schritte bis zur ersten Rückkehr nach i

$Y_2 = \#$ Schritte bis zur zweiten Rückkehr

$Y_k = \#$ Schritte bis zur k-ten Rückkehr

$$P(Y_1 < \infty) = F_i$$

$$Y_1 = \infty \Longrightarrow Y_2 = \infty, \text{d.h.} \quad \{Y_1 = \infty\} \subseteq \{Y_2 = \infty\}$$

$$\Longrightarrow P(Y_2 < \infty | Y_1 < \infty) = F_i$$

$$\begin{aligned} P(Y_2 < \infty) &= P(Y_2 < \infty | Y_1 < \infty) \cdot P(Y_1 < \infty) \\ &= F_i^2 \\ P(Y_k < \infty) &= F_i^k \end{aligned}$$

Sei jetzt $F_i < 1. \Longrightarrow$

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(Y_k < \infty) = \sum_{k=1}^{\infty} F_i^k < \infty$$

Folg. 13 *i transient $\Longrightarrow$ nach unendlich vielen Schritten tritt i höchstens endlich oft mit Wkt. 1 ein.*

Beweis: Nach dem Lemma von Borel-Cantelli gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) < \infty \Longrightarrow P(\limsup A_n) = 0.$$

Mit $A_k = \{Y_k < \infty\}$, $\quad B_n = \bigcup_{k \geq n} A_k \downarrow$ folgt

$$0 = P(\limsup A_n) = P(\lim B_n) = \lim P(B_n) = P(B)$$

$$\begin{aligned} B &= \{\text{unendlich viele der } A_k, k = 1, 2, \ldots, \text{treten ein}\} \\ \overline{B} &= \{\text{endlich viele der} A_k, k = 1, 2, \ldots, \text{treten ein}\} \end{aligned}$$

$$P(\overline{B}) = 1$$

$\square$

Folg. 14 *Sei jetzt i rekurrent, d.h. $F_i = 1$. $\Longrightarrow$ i wird unendlich oft erreicht.*

Beweis: Für beliebiges k gilt: $P(Y_k < \infty) = 1$.

$Y = \#$ der Rückkehren nach i bei unendlich vielen Schritten.

$$\{Y_k < \infty\} \Leftrightarrow \{Y \geq k\}$$

$$P(Y = \infty) = \lim_{k \to \infty} P(Y \geq k) = \lim_{k \to \infty} P(Y_k < \infty) = 1.$$

$\square$

16.4 Grenzverteilungen

Def. 64 *Ein Zustand i heißt periodisch mit der Periode d, falls d größter gemeinsamer Teiler aller der Zahlen $n \in \mathbb{Z}^+$ ist, für die $p_{ii}(n) > 0$ gilt. Ist $d = 1$, so heißt der Zustand i aperiodisch. Falls für alle Zahlen $n \in \mathbb{Z}^+$ $p_{ii}(n) = 0$ gilt, so setzen wir $d := \infty$.*

Satz 71 *Es sei $i \in S$ ein periodischer Zustand mit Periode d. Desweiteren kommuniziere er mit einem weiteren Zustand j ($i \longleftrightarrow j$). Dann hat auch der Zustand j die Periode d.*

Beweis: Nach Voraussetzung ist i periodischer Zustand mit Periode d. Folglich lassen sich alle Zahlen k mit $p_{ii}(k) > 0$

durch $k = k_0 \cdot d$, für eine Zahl k_0, darstellen. Da die Zustände i und j miteinander kommunizieren, existieren weitere Zahlen n und m, so daß gilt:

$$p_{ij}(n) > 0 \text{ und } p_{ji}(m) > 0.$$

Daraus folgt mit Hilfe der Rekursion von CHAPMAN–KOLMOGOROFF:

$$\begin{aligned} p_{ii}(n+m) &= \sum_{l \in S} p_{il}(n) \cdot p_{li}(m) \\ &\geq p_{ij}(n) \cdot p_{ji}(m) \\ &> 0 \end{aligned}$$

Folglich ist d Teiler der Summe $n + m$.

Es gelte nun $p_{jj}(r) > 0$ für ein gewisses r. Dann gilt:

$$\begin{aligned} p_{ii}(n+m+r) &= \sum_{l,s \in S} p_{il}(n) \cdot p_{ls}(r) \cdot p_{si}(m) \\ &\geq p_{ij}(n) \cdot p_{jj}(r) \cdot p_{ji}(m) \\ &> 0 \end{aligned}$$

Wir stellen also fest:

$$\left.\begin{array}{r} d \text{ teilt } m+n+r \\ d \text{ teilt } m+n \end{array}\right\} d \text{ teilt } r.$$

Folglich ist der Zustand j periodisch mit Periode d', wobei gilt: $d' \leq d$.

Da die Relation „$\longleftrightarrow$“ symmetrisch ist, gilt auch: $j \longleftrightarrow i$.

Mit der gleichen Beweisführung wie oben können wir dann zeigen, daß gilt: $d \leq d'$. Daraus folgt: Die Zustände i und j haben die gleiche Periodenlänge. $\square$

Es sei nun i ein Zustand aus dem Zustandsraum S. Wir betrachten die folgende Zufallsgröße:

$$Y : \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n & \ldots \\ f_i(1) & f_i(2) & \ldots & f_i(n) & \ldots \end{pmatrix}.$$

Wir definieren die mittlere Rückkehrzeit in den Zustand i:

$$\mu_i := \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot f_i(n) = \mathbf{E}Y.$$

Def. 65 *Es sei i ein Zustand aus dem Zustandsraum S. Der Zustand i heißt positiv rekurrent, falls $\mu_i < \infty$ gilt. Ist dagegen $\mu_i = \infty$, so nennen wir den Zustand i Null–rekurrent.*

Es gelten für einen beliebigen Zustand i die folgenden Zusammenhänge (ohne Beweis):

- $\mu_i < \infty$ genau dann, wenn $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ii}(n) > 0$;
- $\mu_i = \infty$ genau dann, wenn $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ii}(n) = 0$.
- Ist der Zustand i positiv rekurrent und aperiodisch, so gilt:

$$\mu_i = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} p_{ii}(n)}.$$

Def. 66 *Eine* MARKOFF*'sche Kette* $\{X_t\}_{t\in T}$ *heißt* *ergodisch*, *falls der Zustandsraum* S *nur aus positiv–rekurrenten und aperiodischen Zuständen besteht.*

Satz 72 (Ergodensatz) *Eine homogene* MARKOFF*'sche Kette* $\{X_t\}_{t\in T}$ *ist genau dann irreduzibel und ergodisch, wenn für alle Zustände* $i \in S$ *gilt:*

$$p_j := \lim_{n\to\infty} p_{ij}(n) > 0.$$

Außerdem gilt $\mu_j = \frac{1}{p_j}$ *und* $\{p_j\}$ *ist eindeutig bestimmt durch:*

$$p_j = \sum_{i=1}^{\infty} p_i \cdot p_{ij}.$$

$\{p_i\}$ heißt <u>stationäre</u> oder <u>Finalverteilung</u>. Die stationäre Verteilung kann also nach obiger Gleichung ermittelt werden.

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_j \\ \vdots \end{pmatrix} = \mathbf{M}^T \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_j \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

Also gilt: $\mathbf{M}^T \cdot \mathbf{p} = \mathbf{p} = \lambda \cdot \mathbf{p}$ mit $\lambda = 1$. Eigenwertgleichung für den Eigenwert 1. $\mathbf{p}$ ist Eigenvektor zum Eigenwert 1.

Bem. 28 M *und* M^T *haben dieselben Eigenwerte.*

Folg. 15 *Sei* M *die Übergangsmatrix einer* MARKOFF*'schen Kette mit endlich vielen Zuständen (in der Form, in der die Äquivalenzklassen ablesbar sind) Dann gilt: Die Vielfachheit des Eigenwertes 1 ist gleich der Anzahl der rekurrenten Äquivalenzklassen.*

Beweis: Jede Teilübergangsmatrix von Äquivalenzklassen hat den einfachen Eigenwert 1 (Finalverteilung eindeutig!) □

Bsp. 119 *Wir betrachten eine* MARKOFF*'sche Kette über einem dreielementigen Zustandsraum, die die folgende*

Übergangsmatrix M besitzt:

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Äquivalenzklassen: $\{1,2\},\{3\}$. *Wir ermitteln die Eigenwerte:*

$$\begin{aligned} 0 &= \det(M - \lambda \cdot I) \\ &= \begin{vmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda) \cdot \left[\left(\tfrac{1}{2} - \lambda\right) \cdot \left(\tfrac{1}{4} - \lambda\right) - \tfrac{3}{8}\right] \end{aligned}$$

Der erste Eigenwert: $\lambda_1 = 1$. Weiter:

$$\begin{aligned}
0 &= \left(\tfrac{1}{2} - \lambda\right) \cdot \left(\tfrac{1}{4} - \lambda\right) - \tfrac{3}{8} \\
&= \frac{1}{8} - \frac{3}{4}\lambda + \lambda^2 - \frac{3}{8} \\
&= \lambda^2 - \frac{3}{4}\lambda - \frac{1}{4} \\
\lambda_{2,3} &= \frac{3}{8} \pm \sqrt{\frac{9}{64} + \frac{16}{64}} \\
&= \frac{3}{8} \pm \sqrt{\frac{25}{64}} \\
\lambda_2 &= \frac{3}{8} + \frac{5}{8} = 1 \\
\lambda_3 &= -\frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Also: Eigenwerte: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ und $\lambda_3 = -\frac{1}{4}$. Der Eigenwert 1 hat folglich die Häufigkeit 2, und somit gibt es zwei rekurrente Äquivalenzklassen.

Folg. 16 *Falls*

$$\sum_i p_{ij} = \sum_j p_{ij} = 1$$

so sind die stationären Verteilungen einer endlichen irreduziblen Markoffschen Kette Gleichverteilungen.

Beweis: Es gilt für die stationäre Verteilung $(p_1,\ldots,p_n)$:

$$\sum_i p_i p_{ij} \;=\; p_j = p_j \sum_i p_{ij}$$

Daraus folgt $\quad\forall j$

$$\begin{aligned}\sum_i (p_i - p_j)p_{ij} &= 0, \quad \text{insbesondere}\\ \sum_i (p_i - p_{j_0})p_{ij_0} &= 0, \quad j_0 = \min_j p_j\end{aligned}$$

Wegen $(p_i - p_{j_0}) \geq 0$ folgt $p_{j_0} = p_i \quad \forall i$, d.h. $p_i = \frac{1}{n}$. $\square$

Folg. 17 *Ist die Übergangsmatrix einer endlichen irreduziblen Markoffschen Kette symmetrisch so sind die stationären Verteilungen Gleichverteilungen.*

Veranschaulichung von $\lim p_{jj}(n) = \frac{1}{\mu_j}$ und des Ergodensatzes

$\{X_t\}$: homogene Markoffsche Kette

j: rekurrenter Zustand, $X_0 = j$ (j fest).

$$Y_k = \begin{cases} 1, & \text{falls} \quad X_k = j \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$P(Y_k = 1) = p_{jj}(k), \quad \mathbf{E}Y_k = p_{jj}(k)$$

Anzahl der Wiederkehrzeitpunkte im Zeitraum $1, \ldots, N$

$$\sum_{k=1}^{N} Y_k = k_N.$$

Beobachtete mittlere Anzahl der Wiederkehrpunkte pro Schritt (im Zeitraum $1, \ldots, N$)

$$\begin{aligned} \frac{k_N}{N} &\sim \mathbf{E}\frac{k_N}{N} = \frac{1}{N}\mathbf{E}\Big(\sum_{n=1}^{N} Y_k\Big) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \mathbf{E}Y_k \\ &= \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} p_{jj}(n) \end{aligned}$$

Mittlere beobachtete Wiederkehrzeit im Zeitraum $1, \ldots, N$

$$\frac{N}{k_N} \to \mu_j$$

$\Longrightarrow$

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} p_{jj}(n) \to_{N\to\infty} \frac{1}{\mu_j}$$

Andererseits:

$$\lim_{n\to\infty} p_{jj}(n) = p_j \Longrightarrow \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} p_{jj}(n) \to_{N\to\infty} p_j = \frac{1}{\mu_j}.$$

Abschätzung der Konvergenzgeschwindigkeit

$$c(n_0) := 1 - \frac{1}{2} \sup_{i,j} \sum_m |p_{im}(n_0) - p_{jm}(n_0)|$$

Für $n \geq n_0$ gilt:

$$c(n) > 0.$$

Satz 73 *Sei $c(n_0) > 0$ für ein gewisses n_0. dann existiert*

$$\lim_{n\to\infty} p_j(n) = p_j, \quad j = 1, 2, \ldots$$

und es gilt für alle Anfangsverteilungen $\{p_j^0\}$:

$$|p_j(n) - p_j| \leq C \cdot e^{-Dn},$$

wobei

$$C = \frac{1}{1 - c(n_0)}, \quad D = \frac{1}{n_0} \ln \frac{1}{1 - c(n_o)}$$

Beweis: Rosanov, Zufällige Prozesse $\square$

$$p_j(n) = P(X_n = j) = \sum_i p_i^0 p_{ij}(n)$$

Bsp. 120 Ein-Prozessorsystem mit mehreren E/A-Einheiten.

Ein Programm. das sich in der CPU befindet, geht mit Wkt. q_i in die I/O-Einheit i über, oder endet (mit Wkt. q_0) und macht Platz für ein neues Programm in der CPU.

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} q_0 & q_1 & \ldots & q_m \\ 1 & 0 & \ldots & 0 \\ .. & & & \\ 1 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M}_2 = \mathbf{M}^2 = \begin{pmatrix} q_0^2 + \sum_{i=1}^m q_i & q_0 q_1 & \cdots & q_0 q_m \\ q_0 & q_1 & \cdots & q_m \\ .. & & & \\ q_0 & q_1 & \cdots & q_m \end{pmatrix}$$

also $p_{ij}(2) > 0 \quad \forall i, j \Longrightarrow \{X_t\}$ *irreduzibel.*

$$(\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_m) \cdot \mathbf{M} = \begin{pmatrix} \pi_0 q_0 + \sum_{i=1}^m \pi_i \\ \pi_0 q_1 \\ .. \\ \pi_0 q_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi_0 \\ \pi_1 \\ .. \\ \pi_m \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
q_0\pi_0 + 1 - \pi_0 &= \pi_0 \\
2\pi_0 - q_0\pi_0 &= 1 \\
\pi_0(2 - q_0) &= 1 \\
\pi_0 &= \frac{1}{2 - q_0} \\
\pi_i &= \pi_0 q_i = \frac{q_i}{2 - q_0}, \quad i = 1, \ldots, m
\end{aligned}$$

$$\sum_{i=0}^{m} \pi_i = \frac{1}{2 - q_0} + \sum_{i=1}^{m} \frac{q_i}{2 - q_0} = \frac{1 - q_0}{2 - q_0} + \frac{1}{2 - q_0} = 1.$$

Bsp. 121 (Multiprozessorsystem)

Ein “Job” (oder ein Prozessor) greift zufällig auf bestimmte Speichermodule zu.

Er wird bedient, wenn der angeforderte Speichermodul frei ist, sonst muß er warten.

Die Zeit für einen Speicherzugriff sei konstant und für alle Speichermodule gleich.

Neue Anforderungen beginnen sofort nach Abarbeitung der alten.

m *“Jobs”,* n *Speichermodule.*

N_i: *Anzahl der "Jobs" (Wartenden) am Speichermodul* M_i
(Bedienplätze) (wartend oder in Arbeit),
$i = 1, \ldots, n$

Zustandsraum

$$S = \{(N_1, N_2, \ldots, N_n) \in \mathbb{Z}^+ : \sum_i N_i = m\}$$

Bsp.: $m = n = 2$: $S = \{(1,1),(0,2),(2,0)\}$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2q_1q_2 & q_2^2 & q_1^2 \\ q_1 & q_2 & 0 \\ q_2 & 0 & q_1 \end{pmatrix}$$

Stationäre Verteilung:

$$\boldsymbol{\pi}\mathbf{M} = \boldsymbol{\pi}$$

$$(\pi_1, \pi_2, \pi_3) \begin{pmatrix} 2q_1q_2 & q_2^2 & q_1^2 \\ q_1 & q_2 & 0 \\ q_2 & 0 & q_1 \end{pmatrix} = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$$

$$\begin{aligned} \pi_1 \cdot 2q_1q_2 + \pi_2 q_1 + \pi_3 q_2 &= \pi_1 \\ \pi_1 \cdot q_2^2 + \pi_2 \cdot q_2 + \pi_3 \cdot 0 &= \pi_2 \\ \pi_1 \cdot q_1^2 + \pi_2 \cdot 0 + \pi_3 \cdot q_1 &= \pi_3 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\pi_1 \cdot q_2^2 &= \pi_2(1-q_2)\\ \pi_1 \cdot q_1^2 &= \pi_3(1-q_1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\pi_2 &= \frac{q_2^2}{1-q_2}\cdot \pi_1\\ \pi_3 &= \frac{q_1^2}{1-q_1}\cdot \pi_1\\ \pi_1 &= \frac{1}{1+\frac{q_1^2}{1-q_1}+\frac{q_2^2}{1-q_2}} = \frac{q_1 q_2}{1-2q_1q_2}\end{aligned}$$

$\mathbf{B}$: *Anzahl der erledigten Speicherplatz-Anforderungen/Zyklus im stationären Zustand:*

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(\mathbf{B}|(1,1)) &= 2\\
\mathbf{E}(\mathbf{B}|(2,0)) &= 1\\
\mathbf{E}(\mathbf{B}|(0,2)) &= 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{EB} &= 2\cdot\pi_1 + 1\cdot\pi_2 + 1\cdot\pi_3\\
&= \Bigl(2 + \frac{q_1^2}{1-q_1} + \frac{q_2^2}{1-q_2}\Bigr)\pi_1\\
&= \frac{1-q_1q_2}{1-2q_1q_2}
\end{aligned}$$

$q_1 = q_2 = \frac{1}{2}$: $\mathbf{EB} = \frac{3}{2}$. maximal möglicher Wert.

Bsp. 122 *Das Betriebssystem schalte zwischen folgenden Zuständen:*

1: Benutzerprogramm aktiv

2: Scheduler aktiv

3: Operatorkommunikation aktiv

4: Nullprozess

$$M = \begin{pmatrix} 0.90 & 0.04 & 0.05 & 0.01 \\ 0.94 & 0.00 & 0.05 & 0.01 \\ 0.85 & 0.10 & 0.04 & 0.01 \\ 0.75 & 0.00 & 0.05 & 0.20 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{\pi} = (0.897, 0.041, 0.05, 0.012)$ *ist stationäre Verteilung. (ÜA)*

16.5 Klassische Beispiele

16.5.1 Ruin des Spielers

Zwei Spieler werfen abwechselnd eine (nicht manipulierte) Münze. Fällt Kopf, so erhält Spieler A den vereinbarten Einsatz (1 Euro) von Spieler B, anderenfalls erhält Spieler B denselben Einsatz von Spieler A. Zu Beginn des Spieles besitzt A a Euro und B b Euro. Das Spiel wird solange fortgesetzt, bis einer der beiden Spieler kein Geld mehr besitzt.

Zustände: $S=\{0,1,\ldots,N\}$, $N=a+b$.

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ .. & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{2} \; 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Frage: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit des Ruins von Spieler A bzw. B?

Sei E_i das Ereignis, daß ein Spieler, der genau i Euro besitzt, ruiniert wird und sei $p_i = P(E_i)$.

1. Die Übergangswktn. sind

$$p_{i,i+1} = p_{i,i-1} = \frac{1}{2}$$

und offenbar ist $p_0 = 1$ und $p_N = 0$.

2. Satz der totalen Wkt.: Es gilt für alle $i, i = 0, \ldots, N$:

$$\begin{aligned} p_i = P(E_i) \quad &= \quad P(E_i|\text{Übergang nach } i\text{-1}) \cdot p_{i,i-1} + \\ & \qquad P(E_i|\text{ Übergang nach } i\text{+1}) \cdot p_{i,i-1} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
p_i &= \frac{1}{2}p_{i-1} + \frac{1}{2}p_{i+1} \\
2p_i &= p_{i-1} + p_{i+1} \\
p_i - p_{i-1} &= p_{i+1} - p_i =: d \\
p_i - p_0 &= \underbrace{p_i - p_{i-1}}_{=d} + \underbrace{p_{i-1} - p_{i-2}}_{=d} + p_{i-2} - + \cdots - p_1 + p_1 - p_0 \\
p_i - 1 &= i \cdot d \\
p_i &= 1 + i \cdot d, \quad \text{insbesondere} \\
p_N &= 1 + N \cdot d \\
d &= -\frac{1}{N}, \quad N = a + b
\end{aligned}
$$

3.

$$
p_i = 1 - i \cdot \frac{1}{a+b} = \frac{a+b-i}{a+b}
$$

$$p_a = \frac{b}{a+b}, \quad p_b = \frac{a}{a+b}$$

4. $a = b : p_a = p_b = \frac{1}{2}$

$a >> b : p_a \approx 0, p_b \approx 1.$

3 Klassen von Zuständen:

$T = \{1, \ldots, N-1\}$: transiente Zustände

$S_1 = \{0\}$, $S_2 = \{N\}$: absorbierende Zustände

$T^c := S_1 \cup S_2$

Umordnung von $\mathbf{M}$:

$$\mathbf{M}^* = \begin{pmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{R} \\ \mathbf{0} & \mathbf{P} \end{pmatrix}$$

$\mathbf{Q} = (p_{ij}; i, j \in T\}$

$\mathbf{R} = (p_{ik}; i \in T, k \in T^c\}$

Übergang von $i \in T$ nach $k \in T^c$ einschrittig oder nach Übergängen innerhalb von T und anschließendem Übergang von T nach k.

u_{ik}: Wkt. von $i \in T$ (irgendwann) nach $k \in T^c$ zu kommen

$$u_{ik} = \sum_{j \in T} Q_{ij} u_{jk} + p_{ik}, \quad Q_{ij} = p_{ij}$$

$\mathbf{U} = \big(U_{ik}\big)_{i \in T, k \in T^c}$

$$\begin{aligned}
\mathbf{U} &= \mathbf{Q}\mathbf{U} + \mathbf{R}, \quad \text{Rekursion} \\
\mathbf{U} &= (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}\mathbf{R} \\
(\mathbf{I} - \mathbf{Q})\mathbf{U} &= \mathbf{R}
\end{aligned}$$

Die Matrix $(\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}$ existiert, falls T endlich!

Lit.: Resnick, S.I. Adventures in Stochastic Processes,
Birkhäuser 1992.

hier:

$$(\mathbf{I} - \mathbf{Q})\mathbf{U} = \mathbf{R}$$

$$
\begin{pmatrix}
1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
-\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & \cdots & 0 & 0 \\
.. & & & & & & \\
 & & & & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\
 & & & & 0 & -\frac{1}{2} & 1
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
u_{10} & u_{1N} \\
u_{20} & u_{2N} \\
u_{30} & u_{3N} \\
.. & \\
u_{N-2,0} & u_{N-2,N} \\
u_{N-1,0} & u_{N-1,N}
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
\frac{1}{2} & 0 \\
0 & 0 \\
0 & 0 \\
.. & \\
0 & 0 \\
0 & \frac{1}{2}
\end{pmatrix}
$$

$$
\begin{array}{cccccccc}
u_{1,0} & -\frac{1}{2}u_{2,0} & & & & & = & \frac{1}{2} \\
-\frac{1}{2}u_{1,0} & +u_{2,0} & -\frac{1}{2}u_{3,0} & & & & = & 0 \\
 & -\frac{1}{2}u_{2,0} & +u_{3,0} & -\frac{1}{2}u_{4,0} & & & = & 0 \\
 & & .. & & & & & \\
 & & -\frac{1}{2}u_{N-3,0} & +u_{N-2,0} & -\frac{1}{2}u_{N-1,0} & & = & 0 \\
 & & & -\frac{1}{2}u_{N-2,0} & +u_{N-1,0} & & = & 0
\end{array}
$$

$N-1$. Gleichung (1. **U**-Spalte)

$$u_{N-1,0} = \frac{1}{2} u_{N-2,0}$$

$N-2$. Gleichung (1. **U**-Spalte)

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2} u_{N-3,0} + u_{N-2,0} - \frac{1}{2} u_{N-1,0} &= 0 \\
u_{N-2,0} - \frac{1}{4} u_{N-2,0} &= \frac{1}{2} u_{N-3,0} \\
\frac{3}{4} u_{N-2,0} &= \frac{1}{2} u_{N-3,0} \\
u_{N-2,0} &= \frac{2}{3} u_{N-3,0}
\end{aligned}$$

$N-3$. Gleichung (1. **U**-Spalte)

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}u_{N-4,0} + u_{N-3,0} - \frac{1}{2}u_{N-2,0} &= 0 \\
u_{N-3,0} - \frac{1}{3}u_{N-3,0} &= \frac{1}{2}u_{N-4,0} \\
\frac{2}{3}u_{N-3,0} &= \frac{1}{2}u_{N-4,0} \\
u_{N-3,0} &= \frac{3}{4}u_{N-4,0}
\end{aligned}$$

$N-i$. Gleichung (1. **U**-Spalte)

$$u_{N-i,0} = \frac{i}{i+1}u_{N-(i+1),0}, \quad i = 1, \ldots, N-2$$

1. Gleichung:

$$u_{1,0} - \frac{1}{2}u_{2,0} = \frac{1}{2}$$

Da

$$u_{2,0} = u_{N-(N-2),0} = \frac{N-2}{N-1}u_{N-(N-1),0} = \frac{N-2}{N-1}u_{1,0}$$

folgt

$$\begin{aligned}
u_{1,0} - \frac{1}{2}\frac{N-2}{N-1}u_{1,0} &= \frac{1}{2} \\
u_{1,0}(1 - \frac{N-2}{2(N-1)} &= \frac{1}{2} \\
u_{1,0}\frac{N}{2(N-1)} &= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
u_{1,0} &= \frac{N-1}{N} = 1 - \frac{1}{N} \\
u_{2,0} &= \frac{N-2}{N-1} u_{1,0} = \frac{N-2}{N-1} \cdot \frac{N-1}{N} = \frac{N-2}{N} = 1 - \frac{2}{N} \\
u_{N-i,0} &= \frac{N-i}{N} = 1 - \frac{i}{N}, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1.
\end{aligned}
$$

16.5.2 Irrfahrten

Bsp. 123 (Irrfahrt auf der Geraden)

Zustände: $k \in \mathbb{Z}$, *Anfangszustand:* 0

Bewegung: ein Schritt nach rechts mit Wkt. p *oder nach links mit Wkt.* $q = 1 - p$

Übergangswktn.:

$$p_{k,k+1} = p = 1 - p_{k,k-1}; \quad p_{ij} = 0, \textit{falls} |i - j| \neq 1$$

$$
M = \begin{pmatrix}
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & & & \\
& \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & & \\
& & 0 & q & 0 & p & 0 & & \\
& & & 0 & q & 0 & p & 0 & \\
& & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \\
& & & & & & \cdot & \cdot & \cdot
\end{pmatrix}
$$

$A_{n,k}$: *Ereignis, nach* n *Schritten im Zustand* k *zu sein*

$$D_{n,k} := P(A_{n,k})$$

Satz der totalen Wkt.:

$$
\begin{aligned}
D_{n,k} &= P(A_{n,k}) \quad \Omega_{n-1} = A_{n-1,k-1} \cup A_{n-1,k+1} \\
&= P(A_{n,k}|A_{n-1,k-1}) \cdot P(A_{n-1,k-1}) + \\
& \quad P(A_{n,k}|A_{n-1,k+1}) \cdot P(A_{n-1,k+1}) \\
&= pD_{n-1,k-1} + qD_{n-1,k+1}
\end{aligned}
$$

$$k = -n, \ldots, n$$

Explizite Formel:

$$
D_{n,k} = \begin{cases} \binom{n}{\frac{n+k}{2}} p^{\frac{n+k}{2}} q^{\frac{n-k}{2}} & \text{falls } k = -n, -n+2, \ldots, n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}
$$

In den Zustand k gelangt man in genau n Schritten, indem man $\frac{n+k}{2}$ mal nach rechts und $\frac{n-k}{2}$ mal nach links geht.
Es gibt genau $\binom{n}{\frac{n+k}{2}}$ Möglichkeiten die Zeitpunkte für einen Schritt nach rechts auszuwählen.

Insbesondere

$$D_{2n,0} = \binom{2n}{n} p^n q^n.$$

Abschätzung: Stirling'sche Formel

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\Big(\frac{n}{e}\Big)^n e^{\frac{1}{12n}}.$$

Damit

$$\begin{aligned}
\binom{2n}{n} &= \frac{(2n)!}{n!n!} \\
&\sim \frac{\sqrt{2\pi 2n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{\left(\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^{n}\right)^2}\frac{e^{\frac{1}{12\cdot 2n}}}{\left(e^{\frac{1}{12n}}\right)^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi n}}2^{2n}e^{-\frac{3}{4n}}
\end{aligned}$$

$$p = q = \frac{1}{2}: \quad D_{2n,0} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}e^{-\frac{3}{4n}}$$

$$p \neq q: \quad D_{2n,0} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}4^n p^n (1-p)^n e^{-\frac{3}{4}n}.$$

Mittlere Rückkehrhäufigkeit:

$$\sum_{n=1}^{\infty} D_{2n,0} \sim \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi n}} = \infty & (p = \frac{1}{2}) \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4p(1-p))^n}{\sqrt{\pi n}} < \infty & (p \neq \frac{1}{2}) \end{cases}$$

Der Zustand "0" (und die anderen Zustände auch) ist also

rekurrent, falls $p = q = \frac{1}{2}$

transient, falls $p \neq q$

nullrekurrent, falls $p = q = \frac{1}{2}$ da $D_{2n,0} \rightarrow_{n\to\infty} 0$.

$$D_{2n,0} = p_{00}(n) \to 0 \Rightarrow \mu_i = \infty$$

Bsp. 124 (symmetrische Irrfahrt in der Ebene) *Zustände:* $(k,l) \in \mathbb{Z}^2$, *Anfangszustand:* $(0,0)$
Bewegung: Punkt (X,Y)

X*: ein Schritt nach rechts mit Wkt.* $p = \frac{1}{2}$ *oder nach links mit Wkt.* $q = \frac{1}{2}$

Y*: ein Schritt nach oben mit Wkt.* p *oder nach unten mit Wkt.* $q = \frac{1}{2}$

Die ZV X *und* Y *sind unabhängig.*

$B_{n,k}$*: Ereignis, nach* n *Schritten im Zustand* k *zu sein*

$$E_{n,k} := P(B_{n,k})$$

$$E_{2n,0} = P(X_{2n,0} = 0 \wedge Y_{2n,0} = 0) = D^2_{2n,0} \sim (\frac{1}{\sqrt{\pi n}})^2$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} E_{2n,0} \quad \sim \quad \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

$$\frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \quad \sim \quad \frac{\ln N}{\pi} \to_{N \to \infty} \infty.$$

Der Zustand "0" (und die anderen Zustände auch) ist also rekurrent, *falls* $p = q = \frac{1}{2}$

Bsp. 125 (symmetrische Irrfahrt im Raum)

Zustände: $(j,k,l) \in \mathbb{Z}^3$, *Anfangszustand:* $(0,0,0)$

Bewegung: Punkt (X,Y,Z)

X*: ein Schritt nach rechts mit Wkt.* $p=\frac{1}{2}$ *oder nach links mit Wkt.* $q=1-p$

Y*: ein Schritt nach oben mit Wkt.* p *oder nach unten mit Wkt.* $q=1-p$

Z*: ein Schritt nach hinten mit Wkt.* p *oder nach vorn mit Wkt.* $q=1-p$

Die ZV X, Y *und* Z *sind unabhängig.*

$C_{n,k}$: *Ereignis, nach* n *Schritten im Zustand* k.

$$F_{n,k} := P(C_{n,k})$$

$$F_{2n,0} = P(X_{2n,0} = 0, Y_{2n,0} = 0, Z_{2n,0} = 0) = D^3_{2n,0} \sim (\frac{1}{\sqrt{\pi n}})^3$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_{2n,0} \quad \sim \quad \frac{1}{(\pi)^{3/2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} < \infty$$

Der Zustand "0" (und die anderen Zustände auch) ist also *transient*.

Bsp. 126 (Irrfahrt auf der Geraden mit Barriere)

Zustände: $k \in \mathbb{N}$, *Anfangszustand:* 0

Bewegung: ein Schritt nach rechts mit Wkt. p *oder*
nach links mit Wkt. $q = 1 - p$
von $k = 0$ *aus geht es nur nach rechts*
$0 < p, q < 1.$

Übergangswktn.:

$$\begin{aligned} p_{k,k+1} &= p = 1 - p_{k,k-1} \\ p_{ij} &= 0, \quad \textit{falls } |i - j| \neq 1 \quad \textit{und} \quad k \neq 0 \\ p_{01} &= 1 \end{aligned}$$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & & & \\ q & 0 & p & 0 & & & \\ 0 & q & 0 & p & 0 & & \\ & & & . & . & . & \\ & & & & . & . & . \end{pmatrix}$$

Wir klassifizieren die Zustände: alle transient, wenn $p > q$

alle nullrekurrent, wenn $p = q = \frac{1}{2}$

alle positiv rekurrent, falls $q > p$.

Alle Zustände haben die Periode 2.

Die ersten beiden Fälle sind analog zur Irrfahrt ohne Barriere

Der dritte Fall erfordert etwas Rechenaufwand.

Wir bestimmen die stationäre Verteilung $\boldsymbol{\pi}$ im Fall $p < q$.
Sie ist (falls sie ex.) Lösung von

$$\mathbf{M}^T \cdot \boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}$$

$$\begin{aligned}
\pi_0 &= q\pi_1 \\
\pi_1 &= \pi_0 + q\pi_2 \\
\pi_i &= p\pi_{i-1} + q\pi_{i+1}, \quad i \geq 2 \\
1 &= \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j
\end{aligned}$$

Behauptung:

$$\pi_i = \frac{p^{i-1}}{q^i}\pi_0, \quad i \geq 1$$

Beweis: vollständige Induktion.

$$
\begin{aligned}
1 &= \sum_{i=0}^{\infty}\pi_i = \pi_0 + \sum_{i=1}^{\infty}\frac{p^{i-1}}{q^i}\pi_0 \\
&= \pi_0 + \frac{1}{q}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{p^i}{q^i}\pi_0 = \pi_0 + \frac{1}{q}\frac{1}{1-\frac{p}{q}}\pi_0 \\
&= \pi_0 + \frac{1}{q-p}\pi_0 \\
\pi_0 &= \frac{1}{1+\frac{1}{q-p}} = \frac{q-p}{q-p+1} \\
\pi_i &= \frac{p^{i-1}}{q^i}\cdot\frac{q-p}{q-p+1}
\end{aligned}
$$

stationäre Verteilung