2 Kombinatorik

Aufgabenstellung: Anzahl der verschiedenen Zusammenstellungen von Objekten. Je nach Art der zusätzlichen Forderungen, ist zu unterscheiden, welche Zusammenstellungen als gleich, und welche als verschieden angesehen werden.

- Permutation (ohne Wiederholung)
- Permutation mit Wiederholung
- Variation ohne Wiederholung
- Variation mit Wiederholung
- Kombination (ohne Wiederholung)
- Kombination mit Wiederholung

2.1 Klassische kombinatorische Probleme

Permutation (ohne Wiederholung) Jede einendeutige Abbildung Π der geordenten Menge $\{1, \ldots, n\}$ auf eine n-elementige Menge $M = \{s_1, \ldots, s_n\}$ heißt Permutation (ohne Wiederholung),

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\} : \Pi(i) = s_i, s_i \in M, s_i \neq s_j (i \neq j)$$

Anzahl:

$$\boxed{N = n!}$$

Permutation mit Wiederholung

Sei $M = \{s_1, \ldots, s_k\}$, $k_i > 0 \; \forall i = 1, \ldots, k$ mit $\sum_{i=1}^{k} k_i = n$. Jedes geordnete n-Tupel von Elementen aus M, wobei jedes Element s_i genau k_i mal vorkommt, heißt Permutation mit Wiederholung. Anzahl:

$$\boxed{N = \frac{n!}{k_1! \cdots k_k!}}$$

Bsp. 7 *Wiewiel Möglichkeiten gibt es, die Karten beim Skatspiel zu vergeben?*

$$N = \frac{32!}{10!10!10!2!}$$

Variation ohne Wiederholung

Sei $M = \{s_1, \ldots, s_n\}$. Jedes geordnete k-Tupel, $k \leq n$ von verschiedenen Elementen aus M heißt Variation ohne Wiederholung. Anzahl:

$$\boxed{N = n(n-1)\cdots(n-k+1)}$$

Aufteilung von k Elementen auf n Fächer unter Berücksichtigung der Reihenfolge

Wenn $n = k$ gilt, so erhalten wir: $N = n!$.

Bsp. 8 *Wieviele Möglichkeiten für die drei Erstplazierten im 100m Endlauf gibt es?*

$$N = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336.$$

Variation mit Wiederholung

Auswahl von k Elementen aus einer Menge mit Zurücklegen

Es sei $M = \{s_1, \ldots, s_n\}$. Die Frage ist:
Wieviel verschiedene Möglichkeiten gibt es, k Elemente aus dieser Menge zu entnehmen, wobei durchaus Elemente mehrfach entnommen werden können?

$$\boxed{N = n^k.}$$

Bsp. 9 *Anzahl der 10stelligen Dualzahlen:*

$$N = 2^{10}.$$

Kombinationen (ohne Wiederholung)

Jede k-elementige Teilmenge aus einer n-elementigen Menge M heißt Kombination (ohne Wiederholung) (von k aus n Elementen). Dabei sind Wiederholungen nicht erlaubt und die Reihenfolge der k Elemente wird nicht berücksichtigt.

Die Anzahl der Kombinationen ist:

$$\boxed{N = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.}$$

Kombination (mit Wiederholung)

Faßt man alle Variationen mit Wiederholung (n Elemente, Ordnung k) zu Äquivalenzklassen zusammen, so daß sie aus aus den gleichen Elementen der gleichen Anzahl bestehen, so heißt jede solche Klasse Kombination mit Wiederholung.

$$\boxed{N = \binom{n+k-1}{k}}$$

Bsp. 10 $n = 2, k = 3$*: 4 Klassen:* $\{aaa\}, \{aab, aba, baa\}, \{abb, bab, bba\}, \{bbb\}$ *werden jeweils zu einer Klasse zusammengefaßt.*

Erläuterung zur Kombination mit Wiederholung: siehe Beispiele 14 und 15.
(Dieses Problem wird auf den Fall unterscheidbarer Würfel zurückgeführt.)

Kombination von Elementen aus mehreren Mengen Wir betrachten beliebige Mengen $S_1, \ldots, S_k$, wobei $S_i = \{s_{i1}, \ldots, s_{in_i}\}$ ($i = 1, \ldots, k$) gilt. Es wird die folgende Frage gestellt:

Wieviel verschiedene Kombinationen von je einem Element der Mengen $S_1, \ldots, S_k$ können gebildet werden?

Solche Kombinationen haben die Form $(s_{1i_1}, \ldots, s_{ki_k})$, wobei $s_{ki_k} \in S_k$ gilt für alle $i = 1, \ldots, k$.

Die Anzahl N der Möglichkeiten ist

$$\boxed{N = n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k.}$$

2.2 Beispiele

Bsp. 11 *Eine Gruppe von r Studenten verreist in einem Zug. Dabei verteilen sich die Studenten zufällig auf $n \geq r$ Abteile. Es sei A das Ereignis, daß alle Studenten in verschiedenen Abteilen sitzen. (In jedem Abteil befindet sich also höchstens ein Student.)*

$$P(A) = \frac{n(A)}{N}.$$

$N = n^r = \#$ *Möglichkeiten für die Verteilung der r Studenten auf die n Abteile.*

$$\begin{aligned} n(A) &= n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-r+1) \\ P(A) &= \tfrac{n(A)}{N} = \tfrac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-r+1)}{n^r}. \end{aligned}$$

Bsp. 12 *In einer Urne sollen sich n Kugeln befinden. Von diesen seien n_1 schwarz, $n - n_1$ dagegen weiß. Nun werden k Kugeln (zufällig) entnommen, und zwar ohne Zurücklegen.*

A*: Ereignis , daß von diesen k Kugeln k_1 schwarz sind*

$$P(A) = \frac{n(A)}{N}.$$

$N = \binom{n}{k}$ *= Anzahl der Möglichkeiten, k Kugeln aus n Kugeln auszuwählen.*

$n(A)$*= Anzahl der günstigen Ereignisse= Anzahl der Möglichkeiten zur Entnahme von k Kugeln, bei denen genau k_1 schwarze Kugeln ausgewählt werden.*

In einem solchen Fall sind dann auch genau $k - k_1$ weiße Kugeln entnommen worden. Also

1. *Die Anzahl der Möglichkeiten, aus n_1 schwarzen Kugeln k_1 schwarze auszuwählen (ohne Wiederholung und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge) ist $\binom{n_1}{k_1}$.*

2. *Die Anzahl der Möglichkeiten, aus $n - n_1$ weißen Kugeln $k - k_1$ weiße auszuwählen (ebenfalls ohne Wiederholung und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge) ist $\binom{n-n_1}{k-k_1}$.*

Anzahl der günstigen Ereignisse

$$n(A) = \binom{n_1}{k_1} \cdot \binom{n - n_1}{k - k_1}$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{N} = \frac{\binom{n_1}{k_1} \cdot \binom{n-n_1}{k-k_1}}{\binom{n}{k}}$$

Der letzte Ausdruck heißt auch

Hypergeometrische Wahrscheinlichkeit.

Bsp. 13 (Lotto 6 aus 49) *Wenn wir uns die Zahlen als Kugeln denken, die aus einer Urne entnommen werden, und außerdem gezogene Zahlen im nachhinein als schwarze Kugeln ansehen, so kann jeder Tip durch die Entnahme von 6 Kugeln verkörpert werden. Somit können wir die Formel des Beispiels 12 auf Seite 66 anwenden.*

A*: Ereignis , daß vier Richtige getippt werden.*

Wenden wir also oben genannte Formel an mit

$$n = 49, \quad n_1 = 6, \quad k = 6, \quad k_1 = 4, \text{ dann gilt:}$$

$$P(A) = \frac{\binom{6}{4} \cdot \binom{49-6}{6-4}}{\binom{49}{6}}$$

Bsp. 14 *Wie groß ist die Anzahl der Würfe mit 2 nicht zu unterscheidenden Würfeln?*

Wir vergeben die Zahlen (i, j), *wenn* $i \neq j$.

Wir vergeben die Zahlen $(i, 7)$, *wenn* $i = j$.

Die gesuchte Anzahl ist die Anzahl der möglichen Auswahlen aus der Menge $\{1, \ldots, 7\}$, *also gleich* $\binom{7}{2}$.

Bsp. 15 *Wie groß ist die Anzahl der Würfe mit 3 nicht zu unterscheidenden Würfeln? Sei o.B.d.A.* $i \leq j \leq k$. *Wir vergeben die Zahlen*

(i, j, k), *wenn* $i < j < k$.
$(i, k, 7)$, *wenn* $i = j < k$.
$(i, j, 8)$, *wenn* $i < j = k$.
$(i, 7, 8)$, *wenn* $i = j = k$.

Die gesuchte Anzahl ist die Anzahl der möglichen Auswahlen aus der Menge $\{1, \ldots, 8\}$, *also gleich* $\binom{8}{3}$.

Bsp. 16 *Verteilen von n Geldstücken an k Studenten ($k \leq n$). Auf wieviele Weisen ist das möglich?*

- *Fall a) jeder Student bekommt mindestens ein Stück.*
  Geldstücke nebeneinander legen und
  $k-1$ *Trennstriche verteilen unter* $n-1$ *möglichen*
  $N = \binom{n-1}{k-1}$

- *Fall b) es wird zugelassen, daß Studenten nichts erhalten.*
  Trick: Borgen von k *Stücken* $\longrightarrow n+k$ *Stück*
  $k-1$ *Trennstriche verteilen unter den jetzt* $n+k-1$ *möglichen*
  $N = \binom{n+k-1}{k-1}$
  Dann gibt jeder Student genau ein Stück zurück.

Bsp. 17 (Hashing) *Beobachtungen (oder Daten) abspeichern auf einem Feld.*

k: *Anzahl der Beobachtungen*

n: *Feldlänge* ($k \leq n$)

Das Abspeichern geschieht mit Hilfe von Hashfunktionen (oder Hashtafeln).

zufällige Daten: Kollisionen können auftreten.

$A_{k,n}$: *Ereignis, daß Kollisionen auftreten. ges.:* $P(A_{k,n})$

$$
\begin{aligned}
P(\overline{A}_{k,n}) &= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} \\
&= \prod_{i=0}^{k-1}(1-\frac{i}{n}) \\
&= \exp\Big(\sum_{i=0}^{k-1}\ln(1-\frac{i}{n})\Big) \\
&\leq \exp(-\sum_{i=0}^{k-1}\frac{i}{n}) \\
&= \exp(-\frac{(k-1)k}{2n}) \approx \exp(-\frac{k^2}{2n})
\end{aligned}
$$

$\ln(1-x) < -x$ *für* $x < 1$

Bsp. 18 (Suche von Elementen) $n = |\Omega|$.

Greifen zufällig eine k-elementige Teilmenge $A \subseteq \Omega$ heraus.

$\omega_1, ...$: *Schlüsselelemente (vorgegeben),* $\omega_1, ... \in \Omega$

Frage: Mit welcher Wkt. $\omega_1 \in A$?

$$P(A) = \frac{\binom{n-1}{k-1}}{\binom{n}{k}} = \frac{k}{n}$$

Frage: Mit welcher Wkt. $\omega_1, \ldots, \omega_r \in A$?

$$P(A) = \frac{\binom{n-r}{k-r}}{\binom{n}{k}} = \frac{k(k-1)\cdots(k-r+1)}{n(n-1)\cdots(n-r+1)}$$

Sei r fest, $\frac{k}{n} \rightarrow p$: $P(A) \sim p^r$

$$P(A) \overset{\approx}{\geq} \frac{1}{2}, \quad \text{falls} \quad p^r \geq \frac{1}{2} \quad \text{falls} \quad k \geq \frac{n}{2^{1/r}}$$

Soll also die Wkt., daß alle r Schlüsselelemente in der Teilmenge enthalten sind, größer als $\frac{1}{2}$ sein, so muß

$$k \geq \frac{n}{2^{1/r}}$$

gewählt werden.

Zusammenfassung

n: # Elemente = $|\Omega|$

k: # auszuwählende Elemente

$k_1, \ldots, k_m$: Häufigkeit der einzelnen Elemente

	ohne Wiederholung	mit Wiederholung
Permutationen	$n!$	$\frac{n!}{k_1!\cdots k_m!}$
Variationen	$n(n-1)\cdots(n-k+1)$	n^k
Kombinationen	$\binom{n}{k}$	$\binom{n+k-1}{k}$

2.3 Arithmetische Beziehungen zwischen den Binomialkoeffizienten

- 1.
$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$
- 2.
$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$
- 3.
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

- 4.

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = 0$$

- 5.

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

- 6.

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\binom{m}{k-i} = \binom{n+m}{k}$$

- 7.

$$\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k} = n\cdot 2^{n-1}$$

- 8. Definieren die Folge

$$S_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \binom{n-k}{k}$$

Zeigen Sie: $S_{n+1} = S_n + S_{n-1}$.

Beweis: 3 Methoden,
vollständige Induktion
algebraisch
kombinatorisch $\square$

teilweise Übungsaufgabe, teilweise Übung

2.4 Die Stirling Formel

Satz 3 *Es gilt*

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Beweis: Die Aussage des Satzes ist äquivalent zu

$$\ln n! \sim \ln\sqrt{2\pi} + (n+\frac{1}{2})\ln n - n.$$

Sei

$$d_n := \ln n! - (n+\frac{1}{2})\ln n + n.$$

Es genügt zu zeigen,

$$\lim_{n\to\infty} d_n = \ln\sqrt{2\pi}.$$

Wir schätzen jetzt die Differenz $d_n - d_{n+1}$ ab, daraus dann das Verhalten der Folge $\{d_n\}$ und versuchen dann den Grenzwert zu bestimmen.

Es gilt

$$\begin{aligned}
d_n - d_{n+1} &= \ln n! - \ln(n+1)! \\
&\quad -(n+\frac{1}{2})\ln n + (n+1+\frac{1}{2})\ln(n+1) \\
&\quad +n-(n+1) \\
&= \ln\frac{n!}{(n+1)!} + (n+\frac{1}{2})(\ln(n+1)-\ln n) \\
&\quad +\ln(n+1) - 1 \\
&= -\ln(n+1) + (n+\frac{1}{2})\ln\frac{n+1}{n} + \ln(n+1) - 1 \\
&= \frac{2n+1}{2}\ln\frac{n+1}{n} - 1 \\
&= (2n+1)\cdot\frac{1}{2}\ln\frac{1+\frac{1}{2n+1}}{1-\frac{1}{2n+1}} - 1.
\end{aligned}$$

Es gilt für $-1 < x < 1$:

$$\begin{aligned}
\ln(1+x) &= \sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i+1}\frac{x^i}{i} \\
\ln(1-x) &= \sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i+1}\frac{(-x)^i}{i} \\
\ln\frac{1+x}{1-x} &= \ln(1+x)-\ln(1-x) = 2\sum_{i=0}^{\infty}\frac{x^{2i+1}}{2i+1}
\end{aligned}$$

Setzen $x := \frac{1}{2n+1}$ und erhalten $(x \neq 0)$

$$\begin{aligned}
d_n - d_{n+1} &= \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\left(x + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2i+1} x^{2i+1}\right) - 1 \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2i+1} \frac{1}{(2n+1)^{2i}} \\
&< \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{3} \frac{1}{(2n+1)^{2i}} \\
&= \frac{1}{3}\Big(\frac{1}{1-q} - 1\Big) \quad \text{wobei} \quad q = \frac{1}{(2n+1)^2} \\
&= \frac{1}{3((2n+1)^2 - 1)}
\end{aligned}$$

Offenbar gilt auch

$$\frac{1}{3(2n+1)^2} = \sum_{i=1}^{1} \frac{1}{2i+1} \cdot \frac{1}{(2n+1)^{2i}} < d_n - d_{n+1},$$

also

$$\frac{1}{3(2n+1)^2} < d_n - d_{n+1} < \frac{1}{3((2n+1)^2-1)}.$$

Wegen

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{3((2n+1)^2-1)} &= \frac{1}{12n(n+1)} = \frac{1}{12n} - \frac{1}{12(n+1)} \\
\frac{1}{3(2n+1)^2} &= \frac{1}{12n(n+1)+3} = \frac{12}{12(12n(n+1)+3)} \\
&= \frac{12}{12\cdot 12n(n+1)+36} \\
&> \frac{12}{12\cdot 12n^2+12\cdot 12n+24n+13} \\
&= \frac{12}{12\cdot 12n^2+12\cdot 14n+13} \\
&= \frac{12}{(12n+1)(12n+13)} \\
&= \frac{1}{12n+1} - \frac{1}{12(n+1)+1}
\end{aligned}
$$

Beide Ungleichungen zusammen

$$\frac{1}{12n+1} - \frac{1}{12(n+1)+1} < d_n - d_{n+1} < \frac{1}{12n} - \frac{1}{12(n+1)}$$

$$(d_n - \frac{1}{12n}) - (d_{n+1} - \frac{1}{12(n+1)}) < 0 <$$
$$(d_n - \frac{1}{12n+1}) - (d_{n+1} - \frac{1}{12(n+1)+1})$$

$\Rightarrow$ Folge $\{d_n - \frac{1}{12n+1}\}$ monoton fallend
Folge $\{d_n - \frac{1}{12n}\}$ monoton wachsend.

Beide Folgen haben denselben Grenzwert $c := \lim d_n$,

$$\begin{aligned} d_n - \frac{1}{12n} \quad &< c < \quad d_n - \frac{1}{12n+1} \\ c + \frac{1}{12n+1} \quad &< d_n < \quad c + \frac{1}{12n} \end{aligned}$$

Erinnerung:

$$\begin{aligned} d_n \quad &= \quad \ln n! - (n + \frac{1}{2}) \ln n + n \\ \Rightarrow e^{d_n} \quad &= \quad n! \Big(\frac{n}{e}\Big)^{-n} n^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
e^{c+\frac{1}{12n+1}} &< e^{d_n} < && e^{c+\frac{1}{12n}} \\
e^c e^{\frac{1}{12n+1}} &< n!\left(\frac{n}{e}\right)^{-n} n^{-\frac{1}{2}} < && e^c e^{\frac{1}{12n}} \\
e^c\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{1}{12n+1}} &< n! < && e^c\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{1}{12n}}
\end{aligned}
$$

Bleibt zu zeigen

$$
e^c = \sqrt{2\pi}.
$$

Hilfsrechnungen

$$I_n := \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx$$

$$
\begin{aligned}
I_n &= \int_0^{\pi/2} \sin^{n-1} x \cdot \sin x \, dx \\
&= \sin^{n-1} x \cdot (-\cos x)\Big|_0^{\pi/2} - \\
&\quad \int_0^{\pi/2} (n-1) \sin^{n-2} \cos x \cdot (-\cos x) \, dx \\
&= (n-1) \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x (1 - \sin^2 x) \, dx \\
&= (n-1)(I_{n-2} - I_n) \\
I_n &= \frac{n-1}{n} I_{n-2} \\
I_0 &= \frac{\pi}{2} \qquad\qquad I_1 = 1 \\
I_2 &= \frac{1}{2} I_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \qquad I_3 = \frac{2}{3} I_1 = \frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I_{2n} &= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \frac{\pi}{2} \\
I_{2n+1} &= \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& 0 < x < \tfrac{\pi}{2} \\
\Rightarrow\quad & 0 < \sin x < 1 \\
\Rightarrow\quad & \sin^{2n-1} x > \sin^{2n} x > \sin^{2n+1} x \\
\Rightarrow\quad & I_{2n-1} > I_{2n} > I_{2n+1} \\
\Rightarrow\quad & \tfrac{I_{2n-1}}{I_{2n+1}} > \tfrac{I_{2n}}{I_{2n+1}} > 1 \\
\Rightarrow\quad & \tfrac{2n+1}{2n} > \tfrac{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdots(2n-1)\cdot(2n+1)}{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdots(2n)\cdot(2n)} \cdot \tfrac{\pi}{2} > 1 \\
\Rightarrow\quad & \lim \tfrac{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdots(2n-1)\cdot(2n+1)}{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdots(2n)\cdot(2n)} \cdot \tfrac{\pi}{2} = 1 \\
\Rightarrow\quad & \tfrac{\pi}{2} = \lim\Big(\tfrac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}\Big)^2 \cdot \tfrac{1}{2n+1} \\
& = \lim \tfrac{2^{4n}(n!)^4}{((2n)!)^2(2n+1)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
n! &= e^c\sqrt{n}n^n e^{-n} e^{\alpha_n} \\
(2n)! &= e^c\sqrt{2n}2^{2n} n^{2n} e^{-2n} e^{\beta_n}
\end{aligned}
$$

wobei $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \lim_{n\to\infty} \beta_n = 0$.

Einsetzen oben liefert

$$
e^c = \sqrt{2\pi}.
$$