4 Klassische Wahrscheinlichkeitsräume

4.1 Binomiale Wahrscheinlichkeiten

Wir betrachten Versuche mit zwei möglichen Ausgängen:
A (gut) und $\overline{A}$ (schlecht).

$$\begin{aligned}
\Omega &= \{A, \overline{A}\} \\
&= \{\text{„gut“}, \text{„schlecht“}\} \\
\mathcal{E} &= \{\emptyset, A, \overline{A}, \Omega\} \\
P(A) &= p \\
P(\overline{A}) &= q = 1 - p
\end{aligned}$$

Beispiele:

Münzwurf: $p = \frac{1}{2}$

Würfeln: $p = \frac{1}{6}$

Qualitätskontrolle: $p \cdot 100\%$ die Ausschußquote.

2–malige Durchführung (unabhängig voneinander):

Elementarereignisse:

$$(A, A), (A, \overline{A}), (\overline{A}, A), (\overline{A}, \overline{A}).$$

mit den Wahrscheinlichkeiten

$$
\begin{aligned}
P((A, A)) &= p^2 \\
P((A, \overline{A})) &= p \cdot (1-p) \\
P((\overline{A}, A)) &= p \cdot (1-p) \\
P((\overline{A}, \overline{A})) &= (1-p)^2
\end{aligned}
$$

B_k: Ereignis, daß A k–mal auftritt, wobei $k = 0, 1, 2$.

$$
\begin{aligned}
P(B_0) &= (1-p)^2 \\
P(B_1) &= 2 \cdot (p \cdot (1-p)) \\
P(B_2) &= p^2
\end{aligned}
$$

Man kann leicht überprüfen, daß allgemein gilt:

$$P(B_k) = \binom{2}{k} p^k (1-p)^{2-k}.$$

zweifaches BERNOULLI–Schema.

n–malige Durchführung: Analog zum vorigen Experiment sei jetzt B_k das Ereignis, daß A genau k–mal auftritt. Jetzt $k = 0, \ldots, n$.

analog zu oben:

$$\boxed{P(B_k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.}$$

Formel für das n–fache BERNOULLI–Schema.

Bezeichnung: $\mathrm{B}(p,n)$ oder auch $Bi(p,n)$

Die Wahrscheinlichkeiten $P(B_k)$ bezeichnen wir auch als

Binomialwahrscheinlichkeiten.

Offenbar:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n} P(B_i) &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \\ &= (p+1-p)^n \\ &= 1 \end{aligned}$$

Bsp. 29 *Wir betrachten das Experiment, bei dem fünfmal ein Münze geworfen wird.*

A *bezeichne das Ereignis, daß bei einem Wurf „Zahl“ fällt,*

$$P(A) = p = \tfrac{1}{2}$$

B_3*: Ereignis, daß* A *dreimal auftritt:*

$$\begin{aligned} P(B_3) &= \binom{5}{3} \left(\tfrac{1}{2}\right)^3 \left(1 - \tfrac{1}{2}\right)^{5-3} \\ &= \binom{5}{3} \left(\tfrac{1}{2}\right)^5 \\ &= \frac{5}{16}. \end{aligned}$$

4.2 Multinomiale Wahrscheinlichkeiten

Wir betrachten ein zufälliges Experiment mit den Ausgängen $A_1, A_2, \ldots, A_l$. Wir setzen

$$p_i = P(A_i), \qquad \sum_{i=1}^{l} p_i = 1.$$

Ein Beispiel ist das folgende Experiment:
Es sei ein Behälter mit k Kugeln in l verschiedenen Farben gegeben, wobei k_i Kugeln die Farbe i ($i = 1, \ldots, l$) besitzen,

$$\sum_{i=1}^{l} k_i = k.$$

Es soll die Wahrscheinlichkeit untersucht werden, mit der eine Kugel einer bestimmten Farbe aus dem Behälter entnommen wird:

$$P(\text{Kugel der Farbe } i) = p_i = \frac{k_i}{k}.$$

Das Experiment soll nun n–mal wiederholt werden.

$B_{n_1,n_2,\ldots,n_l}$: das Ereignis, daß die Ereignisse A_1 n_1–mal, A_2 n_2–mal, ..., und A_l n_l–mal eintreten.

$$P(B_{n_1,n_2,\ldots,n_l}) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_l!} \cdot p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot p_l^{n_l}.$$

Derartige Wahrscheinlichkeiten bezeichnen wir auch als <u>multinomiale Wahrscheinlichkeiten</u> (polynomiale Wktn.)

Vergleichen Sie:

$$(a_1 + \ldots + a_l)^n = \sum \frac{n!}{n_1! \cdots n_l!} a_1^{n_1} \cdots a_l^{n_l}$$

wobei die Summe über alle Tupel $(n_1, \ldots, n_l)$ gebildet wird mit $\sum_{i=1}^{l} n_i = n$.

Bsp. 30 *Bei einem Fragebogen wird (u.a.) nach dem Alter der befragten Personen gefragt. Das Alter ist in Klassen eingeteilt, 10-20, 21-40, 41-60, über 60 Jahre. Der Bevölkerungsanteil beträgt jeweils* p_i *für die* i*-te Altersklasse,*
$i = 1, \ldots, 4, \quad \sum_i p_i = 1.$

Es werden n=1000 Personen von einem Interviewer befragt.

Wie groß ist die Wkt., daß höchsten 10% *der befragten bis zu 20 Jahre, und außerdem bis zu* 10% *der Befragten älter als 60 Jahre alt waren?*

Sei $\mathbf{X}_i = (X_{i1}, X_{i2}, X_{i3}, X_{i4})$*, wobei* $X_{ij} = 1$ *falls Person* i *zur j-ten Altersklasse gehört, und* $X_{ij} = 0$ *sonst.*

Dann ist

$$\mathbf{X} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{X}_i =: (\mathbf{Y}_1, \ldots, \mathbf{Y}_4) \sim Mult(n, p_1, p_2, p_3, p_4)$$

und (sei $a := 100$*)*

$$\begin{aligned}
P(Y_1, Y_4 \leq a) &= P(Y_1 \leq a, Y_2 + Y_3 = n - Y_1 - Y_4, Y_4 \leq a) \\
&= \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{a} P(Y_1 = i, Y_2 + Y_3 = n - i - j, Y_4 = j) \\
&= \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{a} \frac{n!}{i!j!(n-i-j)!} p_1^i p_4^j (p_2 + p_3)^{n-i-j}
\end{aligned}$$

4.3 POISSON–Wahrscheinlichkeiten

Beispiele, bei denen POISSON–Wahrscheinlichkeiten auftreten, sind

- die Anzahl von Verkehrsunfällen in einem Ort in einem bestimmten Zeitintervall,
- die Ankünfte von Kunden an einem Schalter oder
- der radioaktive Zerfall von α–Teilchen.
- In einer Telefonzentrale wird ermittelt, wieviel Anrufe in einer bestimmten Zeiteinheit ankommen.

Elementarereignisse sind hier also zufällige Anzahlen.

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \ldots\} = \{„0“, „1“, \ldots, „n“, \ldots\}.$$

Das Ereignis ω_i ist z.B. das Ereignis, daß in einer Zeiteinheit genau i Anrufe eintreffen. Die Wahrscheinlichkeit dieses Elementarereignisses ist gegeben durch:

$$P(\omega_i) = \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}.$$

λ ist dabei ein noch unbestimmter Parameter. Er kann als mittlere Rate aufgefaßt werden. Diese Wahrscheinlichkeit bezeichnen wir als POISSON–Wahrscheinlichkeit. Für die

Wahrscheinlichkeit von Ω gilt dann:

$$
\begin{aligned}
P(\Omega) &= \sum_{i=0}^{\infty} P(\omega_i) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} \\
&= e^{-\lambda} \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!}}_{=e^{\lambda}} = 1
\end{aligned}
$$

Wir werden später sehen, daß diese Verteilung “natürlich” ist.