Literatur

Mathar, R. und Pfeiffer, D. (1990) Stochastik für Informatiker, Stuttgart

Pflug, G. (1986). Stochastische Modelle in der Informatik, Stuttgart

Greiner, M. und Tinhofer, G. (1996) Stochastik für Studienanfänger der Informatik, München

Rosanov, J.A. (1970). Wahrscheinlichkeitstheorie, Berlin

Flachsmeyer, J. (1970). Kombinatorik, Berlin

I. Wahrscheinlichkeitsrechnung

1 Grundbegriffe

1.1 Einleitung, Geschichte

1.2 Zufällige Ereignisse

1.3 Ereignisfelder

1.4 Kolmogorov’sches Axiomensystem

1.5. Folgerungen

1.6. Klassische Definition der Wahrscheinlichkeit

1.1 Einleitung, Geschichte

- antikes Griechenland

  Begriff der Wkt.

  Naturgesetze drücken sich durch eine Vielzahl von zufälligen Erscheinungen aus.

  Stäbchenspiel

- 1654, Chevalier de Mere, Pascal

  Würfelspiele, Würfe mit 2 Würfeln. Wenn in 25 Würfen einmal eine Doppelsechs so hat C.d.M. gewonnen, sonst sein Gegner.

- Pascal, Fermat (Briefwechsel)

  2 Personen-Spiele. Gespielt wird eine Serie von Partien, z.B. Schach (nur 0,1). Gewinnen soll der Spieler, der zuerst S Partien gewonnen hat, d.h. dieser Spieler erhält den vollen Einsatz.
  Abbruch des Spiels (z.B. wegen Zeitmangel)
  A hat a Gewinnpartien, $a < S$
  B hat b Gewinnpartien, $b < S$
  Wie ist der Einsatz nach dem Abbruch gerecht zu verteilen?
  Variante: $\frac{a}{b}$, aber S wird nicht berücksichtigt!
  Es wäre also der weitere mögliche Verlauf nach dem Abbruch zu analysieren.

- 1662, Graunt; 1693 Halley

  Sterlichkeitstafeln (Überlebenswkt. in Abhängigkeit vom Lebensalter) $\rightarrow$

  Rentenberechnung

  Schiffsversicherung

- 1713, Jacob Bernoulli

  "Ars conjectandi": 1. Lehrbuch der Wkt.rechnung

  Bernoulli-Gesetz der Großen Zahlen, $p = P(A)$

  $h_n(A) = \frac{1}{n}\#$ Auftreten v. A, $h_n(A) - p \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$

- 1733, Moivre

  Grenzwertsatz von Moivre-Laplace

  $\sqrt{n}\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma} \rightarrow \mathcal{N}(0,1)$

- 1812, Laplace

  klassische Definition der Wkt.

$$P(A) = \frac{\#\text{für A günstige Ereignisse}}{\#\text{mögliche Ereignisse}}$$

- 1800, Laplace, Gauss

  Untersuchung von Beobachtungsfehlern

  Kleinste Quadrat-Schätzung

- Ende 19. Jh., Tschebyscheff, Markov, Ljapunov

- 1900, David Hilbert (2. Intern.Mathematikerkongress Paris)

  23 Probleme der Mathematik, u.a. Axiomatik der Wkt.rechnung.

- 1919 R.v. Mises

  statistische Definition der Wkt,

  Erfahrung: $P(A) := \lim_{n\to\infty} h_n(A)$

  Existiert der Grenzwert?

- 1933, A.N. Kolmogorov

  Axiomsystem der Wkt.rechnung

Statistik:

Gesamtheit aller Methoden zur Analyse
zufallsbehafteter Datenmengen
$\rightarrow$ Aussagen über die zugrundeliegende
Grundgesamtheit treffen.

+ Wahrscheinlichkeitsrechnung:

gegebene Grundgesamtheit (Verteilung)
$\rightarrow$ Aussagen über Realisierungen einer
Zufallsvariablen treffen.

= Stochastik

(grch.: im Rechnen geschickt).

1.2 Zufällige Ereignisse

Def. 1 *Ein zufälliger Versuch (Experiment) ist ein Versuch mit ungewissem Ausgang.*

Beispiel: Glücksspiele.

Wichtig bei solchen Experimenten ist:

- die Beschreibung des Experiments (Kartenspiele, Münzwurf),
- die Erfassung der Menge aller möglichen Ausgänge des Experiments.

Def. 2 (Grundbegriffe)

- *Elementarereignis: möglicher Versuchsausgang,*
  Bez.: ω.
- *Ereignis: Menge von El.ereignissen,* $A \subset \Omega$
- *sicheres Ereignis: Menge aller El.ereignisse,*
  Bez*:* Ω.
- *unmögiches Ereignis:* $\emptyset$.
- *Komplementärereignis:* $\overline{A} = \Omega \setminus A$

Ein Experiment kann diskret sein, d.h. endlich oder abzählbar viele Ausgänge besitzen, oder es kann überabzählbar viele Ausgänge haben.

Bsp. 1 : **Experimente mit einer endlichen Anzahl von Elementarereignissen**

a) Münzwurf

Folgende Ereignisse können auftreten:

- *zwei Elementarereignisse:* $\{\text{Zahl } (z)\}$, $\{\text{Wappen } (w)\}$;
- *das unmögliche Ereignis* $\emptyset = \{z\} \cap \{w\}$;
- *das sichere Ereignis* $\Omega := \{z, w\}$. *Das bedeutet, daß Zahl oder Wappen eintreten.*

Die Menge der auftretenden Ereignisse ist

$$\mathcal{P}(\Omega) := \{\emptyset, \{z\}, \{w\}, \Omega\},$$

die Potenzmenge von Ω.

b) Würfeln (1 mal)

Die Elementarereignisse sind $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}$ *und* $\{6\}$*, d.h.* $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Damit erhalten wir für paarweise verschiedene $i, j, k, l, m \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ *die möglichen Ereignisse :*

Ereignistyp	Anzahl
$\emptyset$	1
$\{i\}$	6
$\{i,j\}$	15
$\{i,j,k\}$	20
$\{i,j,k,l\}$	15
$\{i,j,k,l,m\}$	6
Ω	1
insgesamt	$2^6 = 64$

Menge der auftretenden Ereignisse = Potenzmenge von Ω.

(i, j, k, l, m paarweise verschieden.)

Bsp. 2 *:* **Experimente mit abzählbar vielen Elementarereignissen)**

1. *Werfen einer Münze, bis zum ersten Mal die Zahl fällt*

$$\Omega = \{z, wz, wwz, wwz, wwwz, \ldots\}.$$

2. *Anzahl der ankommenden Fahrzeuge an einer Kreuzung in einem bestimmten Zeitbereich*

$$\Omega = \{0, 1, 2, \ldots\}.$$

Bsp. 3 *:* **Experimente mit überabzählbar vielen Elementarereignissen**

1. *Lebensdauer einer Glühbirne*

$$\Omega = [0, \infty[= \mathbb{R}^+.$$

Ereignisse sind bei diesem Experiment z.B. Intervalle und Punkte.

Es gilt beispielsweise: $\emptyset = [0, 1] \cap [3, 5]$.

Das Ereignis $A = \{[0.4, 3.1], \{7\}\}$ *bedeutet, daß die Glühbirne eine Lebensdauer von* $7s$ *oder eine Lebensdauer zwischen* $0.4s$ *und* $3.1s$ *hat.*

2. *Messung einer physikalischen Konstante*

$$\underbrace{y}_{\text{Meßwert}} = \underbrace{m}_{\text{Konstante}} + \underbrace{\varepsilon}_{\text{Meßfehler}}.$$

Die Meßfehler sind die Elementarereignisse. Ereignisse sind beispielsweise Intervalle.

Begriff des Ereignisfeldes (grob): Ein Ereignisfeld $\mathcal{E}$ ist ein System von Teilmengen der Menge Ω. Es gilt: $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$.

Bem.: Es seien $A_1 \in \mathcal{E}$ und $A_2 \in \mathcal{E}$ Ereignisse. Dann ist:

- $A_3 := A_1 \cap A_2 = \{\omega \in \Omega \colon \omega \in A_1 \text{ und } \omega \in A_2\}$ das Ereignis, bei dem A_1 und A_2 eintreten;

- $A_3 := A_1 \cup A_2 = \{\omega \in \Omega \colon \omega \in A_1 \text{ oder } \omega \in A_2\}$ das Ereignis, bei dem A_1 oder A_2 eintreten;

- $\overline{A_1} = \Omega \setminus A_1 = \{\omega \in \Omega \colon \omega \notin A_1\}$ das zu A_1 komplementäre Ereignis.

Es gilt offenbar:

- $A \cup \overline{A} = \Omega$ (sicheres Ereignis),

- $A \cap \overline{A} = \emptyset$ (unmögliches Ereignis).

Satz 1 (Rechenregeln für Ereignisse)

(i) $A \cup B = B \cup A$ *(Kommutativgesetz)*

(ii) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ *(Assoziativgesetz)*

(iii) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ *(Distributiv-)*

(iv) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ *(gesetze)*

(v) *(De'Morgansche Regeln)*

$$\begin{aligned} \overline{(A \cup B)} &= \overline{A} \cap \overline{B} \\ \overline{(A \cap B)} &= \overline{A} \cup \overline{B} \end{aligned}$$

Def. 3 *Seien* $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ *Ereignisse.*
Die <u>*Vereinigung*</u> $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ *ist das Ereignis, das eintritt, wenn mindestens eines Ereignisse* $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ *eintritt.*
Der <u>*Durchschnitt*</u> $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ *ist das Ereignis, das eintritt, wenn alle Ereignisse* $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ *eintreten.*

Satz 2 (Verallgemeinerungen)

Seien $A, A_1, \ldots$ *Ereignisse.*

(iii) $A \cap (\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \bigcup_{i=1}^{\infty}(A \cap A_i)$

(iv) $A \cup (\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i) = \bigcap_{i=1}^{\infty}(A \cup A_i)$

(v)

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{A_i}$$

$$\overline{\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{A_i}$$

1.3 Ereignisfelder

Def. 4 *Sei Ω die Menge aller Elementarereignisse eines zufälligen Experiments, so heißt $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ Ereignisfeld (σ–Algebra) über Ω, falls folgendes gilt:*

1. $\Omega \in \mathcal{E}$;
2. *Gilt* $A_i \in \mathcal{E}$ *für* $i \in \mathbf{N}$, *dann folgt* $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{E}$;
3. $A \in \mathcal{E} \Longrightarrow \overline{A} \in \mathcal{E}$.

Bem.: 3 grundlegende Eigenschaften:

- Elementarereignisse schließen sich gegenseitig aus.
- Es tritt immer nur genau ein Elementarereignis ein.
- Ein Ereignis tritt genau dann ein, wenn eines seiner Elementarereignisse eintritt.

Folg. 1

a) Ist $A_i \in \mathcal{E} \quad \forall i \in \mathbf{N}$, *so folgt daraus:* $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{E}$.

b) Für das unmögliche Ereignis gilt: $\emptyset \in \mathcal{E}$.

Beweis:

a)

$$\begin{aligned} A_i \in \mathcal{E}, \quad \forall i \in \mathbf{N} \quad &\Longrightarrow \quad \overline{A_i} \in \mathcal{E}, \quad \forall i \in \mathbf{N} \ \text{ (Def. 4.3)} \\ &\Longrightarrow \quad \bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{A_i} \in \mathcal{E} \ \text{ (Def. 4.2)} \\ &\Longrightarrow \quad \overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} \in \mathcal{E} \ \text{ (de Morgan'sche Regeln)} \\ &\Longrightarrow \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{E} \ \text{ (Def. 4.3)} \end{aligned}$$

b) Nach Def. 4.1 gilt: $\Omega \in \mathcal{E}$. Wegen $\emptyset = \overline{\Omega}$ und Def. 4.3 folgt dann: $\emptyset \in \mathcal{E}$.

□

Def. 5 *Zwei Ereignisse* $A_1, A_2 \in \mathcal{E}$ *heißen* <u>*unvereinbar*</u> *(*<u>*disjunkt*</u>*), falls* $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ *gilt. Wir sagen dann auch, diese beiden Ereignisse schließen einander aus.*

1.4 Kolmogoroff'sches Axiomensystem

Def. 6 *Sei $\mathcal{E}$ ein Ereignisfeld.*
Eine Abbildung $P: \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt *Wahrscheinlichkeit*, *falls sie die folgenden Eigenschaften hat:*

1. *Für alle $A \in \mathcal{E}$ gilt: $0 \leq P(A) \leq 1$;*
2. *$P(\Omega) = 1$;*
3. *Sind die Ereignisse $A_1, A_2, \ldots$ paarweise unvereinbar (d.h. $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j, i, j \in \mathbb{N}$), so gilt die sogenannte σ–Additivitätseigenschaft:*

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Def. 7 *Sei Ω die Menge der Elementarereignisse, $\mathcal{E}$ ein Ereignisfeld über Ω ($\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$) und P genüge den* KOLMOGOROFF–*Axiomen, dann heißt das Tripel $(\Omega, \mathcal{E}, P)$ <u>Wahrscheinlichkeitsraum</u>.*

Mittels dieses Begriffes ist eine vollständige Beschreibung eines zufälligen Experimentes möglich.

Wir betrachten nun $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$, ein System von Teilmengen der Menge Ω. Dann können wir die folgende Menge bilden:

$$\mathcal{E}(\mathcal{A}) = \{\mathcal{E} \colon \mathcal{A} \subseteq \mathcal{E}, \mathcal{E} \text{ ist Ereignisfeld}\} .$$

Dann ist die Menge

$$\mathcal{E}_{\mathcal{A}} = \bigcap_{\mathcal{E} \in \mathcal{E}(\mathcal{A})} \mathcal{E}$$

die von $\mathcal{A}$ erzeugte σ–Algebra (Ereignisfeld) bzw. die kleinste σ–Algebra über Ω, die $\mathcal{A}$ enthält.

Bsp. 4 *Beispiele für Wahrscheinlichkeitsräume* $(\Omega, \mathcal{E}, P)$.

1. *Klassische Wahrscheinlichkeitsräume*
   $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_N\}, \quad \mathcal{E} = \mathcal{P}(\Omega)$.
   $P(\omega_)i = P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{N} \quad \forall i = 1, \ldots, N$. *D.h. alle Elementarereignisse sind gleichwahrscheinlich.*

Def. 8 (klassische Def. der Wkt.) *Sei* $A \in \mathcal{E}$.

$$P(A) = \frac{\#\{\omega, \omega \in A\}}{N} = \frac{\# f\ddot{u}r A \text{ günstigen El. ereign.}}{\#\text{möglichen El.ereignisse}}$$

2. *Es sei* $\Omega = \mathbb{R}$ *und*

$$\mathcal{A} = \{[a,b[\colon -\infty < a < b < \infty\} \subseteq \mathcal{P}(\Omega).$$

die Menge der halboffenen Intervalle. Dann ist $\mathcal{B}^1 := \mathcal{E}_{\mathcal{A}}$ *die* σ*-Algebra der* BOREL*–Mengen.* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}^1, P)$ *ist dann ein Wahrscheinlichkeitsraum mit irgendeiner Wahrscheinlichkeit* P.

3. *Es sei* $\Omega = [0,1]$. *Weiterhin betrachten wir:*

$$\mathcal{E} = \{A \colon A = B \cap [0,1], B \in \mathcal{B}^1\}.$$

Für alle Mengen $A \in \mathcal{E}$ definieren wir die Wahrscheinlichkeit:

(a) $P\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ *mit* $P(A) := \int\limits_A dx$.

Dann ist:

$$\begin{aligned} P(\Omega) &= \int_0^1 dx = 1 \\ P\left(\left[\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{4}\right]\right) &= \tfrac{1}{4} \\ P\left(\left\{\tfrac{1}{2}\right\}\right) &= \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dx = 0 \end{aligned}$$

(b) $Q\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ *mit* $Q(A) := \int\limits_A 1,5(1-x^2)dx$.

Dann ist:

$$\begin{aligned} Q(\Omega) &= \int_0^1 1,5(1-x^2)dx \\ &= 1,5\left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

$(\Omega, \mathcal{E}, P)$ *und* $(\Omega, \mathcal{E}, Q)$ *sind Wahrscheinlichkeitsräume.*

1.5 Folgerungen aus dem Kolmogoroff-Axiomensystem

Folg. 2 *Sei* $(\Omega, \mathcal{E}, P)$ *W.-raum.*
Seien $A, B, A_1, \ldots, A_n$ *Ereignisse. Es gelten die folgenden Aussagen:*

1.
$$P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

2. *Für das unmögliche Ereignis gilt:*
$$P(\emptyset) = 0.$$

3. *Es seien* $A, B \in \mathcal{E}$ *zwei Ereignisse mit* $A \subseteq B$*. Dann gilt:*

(a) $B \setminus A \in \mathcal{E}$;

(b) $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$ *(Subtraktivität);*

(c) $P(A) \leq P(B)$ *(Monotonie der Wahrscheinlichkeit).*

4.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B),$$

$$P(A \cup B) \leq P(A) + P(B).$$

Sind A und B unvereinbar, so gilt die Gleichheit.

5. Es sei $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine Folge von Ereignissen mit der Eigenschaft $A_n \subseteq A_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$P\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n).$$

Wir sprechen von der „Stetigkeit von unten“ bzw. der

Stetigkeit von P für eine wachsende Folge von Ereignissen.

6. *Es sei $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine Folge von Ereignissen mit der Eigenschaft $A_n \supseteq A_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:*

$$P\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n).$$

Wir sprechen hier von der „Stetigkeit von oben“ bzw. von der Stetigkeit von P für eine fallende Folge von Ereignissen.

Beweis:

1. Es gilt: $\Omega = A \cup (\Omega \setminus A) = A \cup \overline{A}$, für alle $A \in \mathcal{E}$.

Wegen $A \cap \overline{A} = \emptyset$ folgt:

$$\begin{aligned} 1 &= P(\Omega) = P(A \cup \overline{A}) \\ &= P(A) + P(\overline{A}) \end{aligned}$$

Wir stellen um und erhalten: $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

2. Wegen $\emptyset = \Omega \setminus \Omega = \overline{\Omega}$ folgt aus Aussage 1:

$$P(\emptyset) = 1 - P(\Omega) = 0.$$

3. Es seien $A, B \in \mathcal{E}$ zwei Ereignisse mit $A \subseteq B$. Wir zeigen die drei Aussagen:

   (a) Es gilt:

$$B \setminus A = B \cap \overline{A}.$$

Wegen $B \in \mathcal{E}$ und $\overline{A} \in \mathcal{E}$ folgt nach Def. 4.(2.), daß auch die Menge $B \setminus A$ Element der Menge $\mathcal{E}$ ist.

(b) Aus $B = A \cup (B \setminus A)$ und $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$ folgt:

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A \cup (B \setminus A)) \\ &= P(A) + P(B \setminus A) \end{aligned}$$

Wir stellen um und erhalten:

$$P(B) - P(A) = P(B \setminus A).$$

(c) Wenn wir die Subtraktivitätsgleichung etwas umstellen, erhalten wir:

$$P(B) = P(A) + P(B \setminus A).$$

Wegen Definition 6.(1.) folgt daraus sofort:

$$P(A) \leq P(B).$$

4. trivial

5. Es sei nun $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine Folge von Ereignissen mit der Eigenschaft $A_n \subseteq A_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$.
   Nach Definition der Ereignisfolge (A_n) gilt:

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k.$$

Wir definieren:

$$\begin{aligned} B_1 &:= A_1 \\ B_2 &:= A_2 \setminus A_1 \\ &\vdots \\ B_n &:= A_n \setminus A_{n-1} \qquad \text{usw.} \end{aligned}$$

Offenbar gilt für alle $i, j \in \mathbb{N}$ mit $i \neq j$:

$$B_i \cap B_j = \emptyset.$$

Weiterhin gilt:

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k.$$

Daraus ergibt sich die folgende Gleichungskette:

$$\begin{aligned}
P\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right) &= P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} P(B_k) \quad \text{(Definition 6.(3.))} \\
&= P(A_1) + \sum_{k=2}^{\infty} P(A_k \setminus A_{k-1}) \\
&= P(A_1) + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n} P(A_k \setminus A_{k-1}) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(P(A_1) + \sum_{k=2}^{n} (P(A_k) - P(A_{k-1})) \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} P(A_n).
\end{aligned}$$

6. Es sei nun $\{A_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ eine Folge von Ereignissen mit der Eigenschaft $A_n \supseteq A_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k.$$

Unter Anwendung der DE MORGAN'schen Regeln erhalten wir:

$$\overline{\lim_{n\to\infty} A_n} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \overline{A_k}.$$

Außerdem gilt: $\overline{A_k} \subseteq \overline{A_{k+1}}$. Dann können wir die folgende Gleichungskette ableiten:

$$\begin{aligned}
P\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right) &= P\left(\overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} \overline{A_k}}\right) \\
&= 1 - P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \overline{A_k}\right) \quad \text{(Aussage 1)} \\
&= 1 - P\left(\lim_{n\to\infty} \overline{A_n}\right) \\
&= 1 - \lim_{n\to\infty} P(\overline{A_n}) \quad \text{(Aussage 4)} \\
&= 1 - \lim_{n\to\infty} (1 - P(A_n)) \\
&= \lim_{n\to\infty} P(A_n).
\end{aligned}$$

$\square$

Folg. 3 (Subadditivität von P) *Seien* $A_1, A_2, \ldots$ *Ereignisse. Dann gilt:*

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
B_1 &:= A_1 \\
B_2 &:= A_2 \setminus A_1 \\
B_3 &:= A_3 \setminus (A_1 \cup A_2) \\
& \ldots \\
B_i &:= A_i \setminus (\bigcup_{j<i} A_j) \qquad \textit{usw.}
\end{aligned}$$

Ereignisse B_i *sind paarweise disjunkt.* $B_i \subseteq A_i$.

$\bigcup_{i\geq 1} B_i = \bigcup_{i\geq 1} A_i \Rightarrow$

$$\begin{aligned} P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) &= P(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i) \quad \textit{(3. Axiom)} \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \quad \textit{(Monotonie der Wkt.)} \end{aligned}$$

$\square$

Folg. 4 (Siebformel) *Seien* $A_1, \ldots, A_n$ *Ereignisse. Dann gilt:*

$$\begin{aligned} P(\bigcup_{i=1}^n A_i) &= \sum_{I\subseteq\{1,\ldots,n\}, I\neq\emptyset} (-1)^{|I|-1} P(\bigcap_{i\in I} A_i) \\ &= \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) + - \ldots \\ & (-1)^{n+1} \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_n} P(\bigcap_{\nu=1}^n A_{i_\nu}) \end{aligned}$$

Siebformel,

Prinzip von Inklusion und Exklusion

Formel von Poincare-Sylvester

(Montmort: Briefwechsel mit Bernoulli)

Beweis: (Induktion nach n)

1. IA $n = 1$ trivial, ($n = 2$: Subtraktivität)

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2) &= P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) \\ &= \sum_{i=1}^{2} P(A_i) - \sum_{I=\{1,2\}} P(A_i \cap A_j) \\ &= \sum_{I \subseteq \{1,\ldots,n\}, I \neq \emptyset} (-1)^{|I|-1} P(\bigcap_{i \in I} A_i) \end{aligned}$$

2. IS: Aussage der Folgerung gelte für n. Dann

$$P(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i) = P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) + P(A_{n+1}) - P(\bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap A_{n+1}))$$

wegen Subtraktivität. Auf den ersten und dritten Summanden wird jeweils die IV angewendet. Der dritte Summand ist gleich

$$
\begin{aligned}
&- P\Big(\bigcup_{i=1}^{n}(A_i \cap A_{n+1})\Big)\\
&= - \sum_{J \subseteq \{1,\ldots,n\}, J \neq \emptyset} (-1)^{|J|-1} P\Big(\bigcap_{i \in J}(A_i \cap A_{n+1})\Big)\\
&= \sum_{\{n+1\} \subseteq J \subseteq \{1,\ldots,n+1\}, J \neq \{n+1\}} (-1)^{|J|-1} P\Big(\bigcap_{i \in J} A_i\Big).
\end{aligned}
$$

Untersuchung der Indexmengen:

1. Summe: alle nichtleeren Teilmengen von $\{1, \ldots, n\}$

3. Summe: alle nichtleeren Teilmengen von $\{1, \ldots, n+1\}$, die das Element $n+1$ enthalten

2. Summe: das Element $n+1$.

$\square$

Bsp. 5 (Rencontre-Problem) *n Studenten sollen schriftlich von einer Änderung des Vorlesungstermins benachrichtigt werden. Im irrtümlichen Glauben, daß jeder der n Briefe den gleichen Inhalt aufweist, verteilt eine Sekretärin die Briefe willkürlich in die verschiedenen Umschläge.*

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß mindestens ein Brief in den richtigen Umschlag gelangt? Welchen Wert erhält man für $n \to \infty$?

Hinweis*: Sei A das Ereignis: "mindestens ein Brief im richtigen Umschlag" und A_i das Ereignis: "Brief i kommt in den richtigen Umschlag". Wenden Sie auf $P(A) = P(\bigcup_{i=1}^n A_i)$ das Prinzip von Inklusion und Exklusion (Siebformel) an.*

Sortierprobleme

geg.: Feld der Länge n
Daten zufällig angeordnet, gleichverteilt mit Wkt. $\frac{1}{n!}$.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß mindestens ein Feldelement schon an der richtigen Stelle liegt.? Welchen Wert erhält man für $n \to \infty$?

das ist dasselbe wie beim Rencontre-Problem.

Wie groß ist die Wkt., daß genau k Elemente bereits am richtigen Platz stehen? $\to$ Übung

Bem. 1 (Bonferroni-Ungleichungen) *Die Ungleichung*

$$P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$$

heißt Bonferroni-Ungleichung. Weitere (Bonferroni)-Ungleichungen erhält man durch Abbruch der Siebformel nach Gliedern mit positivem ($\leq$) bzw. negativem ($\geq$) Vorzeichen.

Bsp. 6

$$
\begin{aligned}
P(A \cup B \cup C) &\leq P(A) + P(B) + P(C) \qquad (n = 1)\\
P(A \cup B \cup C) &\geq P(A) + P(B) + P(C) \qquad (n = 2)\\
&\quad -P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C)\\
P(A \cup B \cup C) &\leq P(A) + P(B) + P(C)\\
&\quad -P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C)\\
&\quad +P(A \cap B \cap C)
\end{aligned}
$$

(n=3, es gilt hier sogar Gleichheit)

1.6 Die klassische Definition der Wahrscheinlichkeit

Wir betrachten für ein zufälliges Experiment die Menge der Elementarereignisse $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_N\}$. Sei $\mathcal{E} = \mathcal{P}(\Omega)$ und jedes Elementarereignis habe die gleiche Wahrscheinlichkeit (d.h. $P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{N},\ \forall i = 1, \ldots, N$).
Dann gilt für die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A:

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{\#\{\omega : \omega \in A\}}{N} = \frac{n(A)}{N} \\ &= \frac{\#\ \text{der für das Eintreten von } A \text{ günstigen El.Ereignisse}}{\#\ \text{der möglichen El.Ereignisse}} \end{aligned}$$

Paradoxon von DE MÉRÉ

Es wird ein Experiment mit drei Würfeln durchgeführt,
wobei die Würfel gleichzeitig geworfen werden.
Folgende Ereignisse werden betrachtet:

A = Es fallen 11 Augen.
B = Es fallen 12 Augen.

Frage: $P(A), P(B)$?

Die Menge der Elementarereignisse ist

$$\Omega = \{(i, j, k) \colon 1 \leq i, j, k \leq 6\}.$$

Anzahl der Elementarereignisse $N := 6^3 = 216$.

$$P((i, j, k)) = \frac{1}{216}.$$

Sehen wir uns nun die beiden Ereignisse A und B an. Dabei geben wir in der ersten Spalte an, welche Ziffernkombinationen auftreten können. In der zweiten Spalte steht jeweils die Anzahl der Möglichkeiten für die Anordnung der jeweiligen Zifferntrios.

A		**B**	
Ereignisse	#	Ereignisse	#
6-4-1	6	6-5-1	6
6-3-2	6	6-4-2	6
5-5-1	3	6-3-3	3
5-4-2	6	5-5-2	3
5-3-3	3	5-4-3	6
4-4-3	3	4-4-4	1
	n(A)=27		n(B)=25

Also:

$$P(A) = \frac{27}{216} > \frac{25}{216} = P(B).$$

Folglich ist das Werfen von 11 Augen
wahrscheinlicher als das Werfen von 12 Augen!