

13 Grenzwertsätze

13.1 Das Gesetz der großen Zahlen

Der Erwartungswert einer zufälligen Variablen X ist in der Praxis meist nicht bekannt. Um ihn zu bestimmen, sammelt man Beobachtungen X_1, X_2, \dots, X_n ($n \in \mathbb{N}$) und bildet dann das arithmetische Mittel dieser Beobachtungen:

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i =: \bar{X}_n$$

Dabei muß man jedoch beachten, daß die Beobachtungen X_1, \dots, X_n unabhängig oder wenigstens unkorreliert sind.

Satz 43 (Schwaches Gesetz der großen Zahlen) *Es seien X_1, \dots, X_n unkorrelierte zufällige Variablen mit $\mu := \mathbf{E}X_i$ und $\sigma^2 := \text{Var } X_i < \infty$ (für alle $i = 1, \dots, n$). Dann gilt für alle $\varepsilon > 0$:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\bar{X}_n - \mu| > \varepsilon) = 0.$$

Beweis: Zum Beweis des Satzes verwenden wir die Ungleichung von TSCHEBYCHEW (vgl. Satz ??).

Da die Zufallsgrößen X_1, \dots, X_n unkorreliert sind, gilt

$$\begin{aligned}\text{Var } \bar{X} &= \text{Var} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \right) = \frac{1}{n^2} \cdot \text{Var} \left(\sum_{i=1}^n X_i \right) \\ &= \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^n \text{Var} (X_i) = \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{E} \bar{X} &= \mathbf{E} \left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n X_i \right) = \frac{1}{n} \cdot \mathbf{E} \left(\sum_{i=1}^n X_i \right) \\ &= \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \mathbf{E} X_i = \frac{1}{n} \cdot n \cdot \mu = \mu\end{aligned}$$

Mittels der TSCHEBYCHEV–Ungleichung erhalten wir:

$$\begin{aligned} P(|\bar{X}_n - \mu| > \varepsilon) &= P(|\bar{X} - \mathbf{E}\bar{X}| > \varepsilon) \\ &\leq \frac{\text{Var } \bar{X}}{\varepsilon^2} \\ &= \frac{\sigma^2}{n \cdot \varepsilon^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

□

Bem. 19 *Aus dem Beweis erkennen wir, daß die Voraussetzungen etwas abgeschwächt werden können, anstelle $\text{Var } X_i = \sigma^2$ genügt die Forderung*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum \text{Var } X_i = 0.$$

Def. 45 *Wenn*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|Y_n - Y_0| > \varepsilon) = 0 \quad \forall \varepsilon > 0$$

dann heißt Y_0 stochastischer Grenzwert der Folge $\{Y_n\}$ und man schreibt $p - \lim Y_n = Y_0$.

Bsp. 81 *Es seien $X_i \sim B(1, p)$*

$$X_i : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}$$

Dann gilt:

$$\mu := \mathbf{E}X = \mathbf{E}X_i = 0 \cdot (1 - p) + 1 \cdot p = p$$

und

$$\begin{aligned}\sigma^2 &:= \mathbf{E}(X - p)^2 \\ &= (0 - p)^2 \cdot (1 - p) + (1 - p)^2 \cdot p \\ &= p^2 \cdot (1 - p) + (1 - p)^2 \cdot p \\ &= p^2 - p^3 + p - 2 \cdot p^2 + p^3 \\ &= p - p^2 \\ &= p \cdot (1 - p)\end{aligned}$$

Nach dem schwachen Gesetz der großen Zahlen folgt:

$$P \left(\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - p \right| > \varepsilon \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Bsp. 82 *Es sei A ein Ereignis, $p = P(A)$ sei unbekannt. Zur Schätzung von p führen wir eine Reihe von unabhängigen Experimenten durch, bei denen A und \bar{A} die einzig möglichen Ausgänge seien.*

n : *# der Experimente, die durchgeführt werden.*

$n(A)$: *# Auftretens des Ereignisses A .*

$$\hat{p}_n = \frac{n(A)}{n}$$

die relative Häufigkeit des Ereignisses A .

Frage: $\hat{p}_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} p$?

Dazu definieren wir Zufallsgrößen X_i ($i = 1, \dots, n$),

$$X_i := \begin{cases} 1 & , A \text{ im } i\text{-ten Experiment eintritt} \\ 0 & , A \text{ im } i\text{-ten Experiment nicht eintritt} \end{cases}$$

Dann gilt für alle $i = 1, \dots, n$:

$$X_i \sim B(1, p)$$

und $P(X_i = 1) = p$ sowie $P(X_i = 0) = 1 - p$.

$$\sigma^2 = \text{Var } X_i = p \cdot (1 - p)$$

$$\mu = \mathbf{E}X_i = p$$

Wir definieren weiterhin:

$$\bar{X} := \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n X_i = \frac{1}{n} \cdot n(A) = \hat{p}_n.$$

Wir wenden nun das Schwache Gesetz der großen Zahlen an und erhalten:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\hat{p}_n - p| > \varepsilon) &= \lim_{n \rightarrow \infty} P(|\bar{X}_n - \mu| > \varepsilon) \\ &= 0, \quad \forall \varepsilon > 0\end{aligned}$$

Folglich gilt: $\hat{p}_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} p$.

Bem. 20 *Schätzungen \hat{p}_n , die gegen den zu schätzenden Parameter konvergieren heißen (schwach) konsistent.*

Satz 44 (Gesetz der Großen Zahlen) *Seien die Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n identisch verteilt und unabhängig, $\mathbf{E}|X_i| < \infty$, $\mathbf{E}X_i = \mu$. Dann gilt*

$$P(\omega : \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{X}_n = \mu) = 1.$$

Bem. 21 *Das Schwache Gesetz der Großen Zahlen lautet entsprechend: Seien die Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n identisch verteilt, $\mathbf{E}X_i = \mu$ und unkorreliert ($\text{cov}(X_i, X_j) = \sigma^2 \delta_{ij}$). Dann gilt*

$$\Rightarrow p - \lim \overline{X}_n = \mu.$$

Das Gesetz der großen Zahlen eignet sich also zum Schätzen von Erwartungswerten oder auch zur Approximation von Integralen.

Bsp. 83 Sei $X \sim F$ mit Dichte $f(x)$, den Beobachtungen x_1, \dots, x_n und $g(\cdot)$ eine beliebige Funktion. Der Erwartungswert

$$\mathbf{E}(g(X)) = \int g(x) f(x) dx$$

wird (falls er existiert) geschätzt durch

$$\hat{I} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(x_i)$$

Bsp. 84 Ist $f > 0$ kann das Integral

$$I = \int g(x) dx$$

(falls es existiert) geschätzt werden durch

$$\hat{I} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{g(x_i)}{f(x_i)}.$$

13.2 Der Satz von GLIVENKO–CANTELLI

Seien X_1, \dots, X_n zufällige Beobachtungen mit

$$P(X_i < x) = F(x), \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Die Verteilungsfunktion $F(x)$ soll durch die Funktion

$$F_n(x) := \frac{\#\{X_i : X_i < x, i=1, \dots, n\}}{n}$$

approximiert werden.

Def. 46 Seien X_1, \dots, X_n unkorreliert, $X_i \sim F$, und $X_{(1)}, \dots, X_{(n)}$, $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$ die geordnete

Stichprobe. Die Funktion

$$F_n(x) = \frac{\#\{X_i : X_i < x, i = 1, \dots, n\}}{n}$$
$$= \begin{cases} 0 & \text{falls } x < X_{(1)} \\ \frac{i}{n} & \text{falls } X_{(i)} \leq x < X_{(i+1)} \\ 1 & \text{falls } X_{(n)} < x \end{cases}$$

heißt empirische Verteilungsfunktion.

EDF.sas EDF_2.sas

Satz 45 Seien X_1, \dots, X_n unkorreliert. Es gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|F_n(x) - F(x)| > \varepsilon) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Beweis: Wir definieren Zufallsgrößen Y_{ix} ($i = 1, \dots, n$, $x \in \mathbb{R}$) durch:

$$Y_{ix} = \begin{cases} 1 & , \text{ falls } X_i < x \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases}$$

Dann gilt offensichtlich für alle $i = 1, \dots, n$ und $x \in \mathbb{R}$:

$$Y_{ix} : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - F(x) & F(x) \end{pmatrix}$$

D.h. $Y_{ix} \sim B(1, F(x))$. Sei, für alle $x \in \mathbb{R}$,

$$\bar{Y}_x := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_{ix}.$$

Vergleichen wir die Zufallsgrößen $F_n(x)$ und \bar{Y}_x :

$$\bar{Y}_x = F_n(x).$$

Aus Beispiel 81 folgt, $\mu := \mathbf{E}Y_{ix} = F(x)$. Deshalb folgt aus dem schwachen Gesetz der großen Zahlen:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\bar{Y}_x - \mu| > \varepsilon) = 0, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

D.h. für alle $\varepsilon > 0$ gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|F_n(x) - F(x)| > \varepsilon) = 0$$

□

Verschärfung:

Satz 46 (Satz von GLIVENKO–CANTELLI) *Es seien X_1, \dots, X_n unabhängige zufällige Variablen. Dann gilt:*

$$P \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |F_n(x) - F(x)| = 0 \right) = 1.$$

Dieser Satz wird auch oft als der Hauptsatz der Statistik bezeichnet.

13.3 Konvergenz von Folgen zufälliger Variablen

Wir betrachten in diesem Abschnitt eine Reihe von Konvergenzbegriffen, die ersten beiden haben wir schon am Anfang des Kapitels kennengelernt.

Def. 47 *Eine Folge $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ zufälliger Variablen konvergiert stochastisch (in Wkt.) gegen eine zufällige Variable X , falls für alle $\varepsilon > 0$ gilt:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) = 0.$$

Wir bezeichnen dann: $\text{p-lim } X_n = X$.

X heißt *stochastischer Grenzwert* der Folge $\{X_n\}$.

Def. 48 Eine Folge $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ zufälliger Variablen heißt fast sicher konvergent gegen eine zufällige Variable X , falls gilt:

$$P \left(\left\{ \omega : \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega) \right\} \right) = 1.$$

Wir bezeichnen dann: $\lim X_n = X$ f.s.^a

X heißt f.s. Grenzwert der Folge $\{X_n\}$.

^aDas Kürzel „f.s.“ steht für „fast sicher“. Manchmal findet man statt „f.s.“ auch das Kürzel „a.e.“. Es bedeutet „almost everywhere“.

Def. 49 *Es seien X_1, \dots, X_n, X zufällige Variablen mit $\mathbf{E}|X_i|^p < \infty, \mathbf{E}|X|^p < \infty$. $\{X_n\}$ konvergiert im p -ten Mittel gegen X , falls*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}|X_n - X|^p = 0.$$

*Wir bezeichnen dann: $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X$ p.m.
(q.m. wenn $p = 2$).*

Def. 50 *Es sei $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von zufälligen Variablen.*

X sei eine Zufallsgröße mit der Verteilungsfunktion

$$F(x) = P(X < x).$$

Die Folge $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert in Verteilung gegen die Zufallsgröße X , wenn für alle $x \in \mathbb{R}$, in denen die Funktion F stetig ist, gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n < x) = F(x).$$

Wir bezeichnen dann: $X_n \xrightarrow{D} X$.

Wir versuchen jetzt Zusammenhänge zwischen den verschiedenen Konvergenzbegriffen herzustellen.

Lemma 47 *Sei X eine Zufallsvariable mit $\mathbf{E}|X|^p < \infty$, $p' < p$. Dann gilt*

$$(\mathbf{E}|X|^{p'})^{\frac{1}{p'}} \leq (\mathbf{E}|X|^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Beweis: Die Funktion $g(x) = |x|^t$ ist konvex für $t \geq 1$. Für eine beliebige Zufallsvariable Y gilt (Jensens Ungleichung)

$$|\mathbf{E}Y|^t \leq \mathbf{E}|Y|^t.$$

Sei $Y = |X|^{p'}$, $t = \frac{p}{p'} \geq 1$. Daraus folgt

$$(\mathbf{E}|X|^{p'})^{\frac{p}{p'}} \leq \mathbf{E}((|X|^{p'})^{\frac{p}{p'}}) = \mathbf{E}|X|^p.$$

□

Folg. 7 Sei $p' < p$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X \quad p.m. \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X \quad p'.m.$$

Beweis: Wegen Lemma 47 gilt:

$$\left(\mathbf{E} |X_n - X|^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \leq \left(\mathbf{E} |X_n - X|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

□

Lemma 48 Sei $p \geq 1$. Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X \quad p.m. \Rightarrow \mathbf{p}\text{-}\lim_{x \rightarrow \infty} X_n = X.$$

Beweis: Es gilt für alle n :

$$\begin{aligned} P(|X_n - X| > \varepsilon) &= P(|X_n - X|^p > \varepsilon^p) \\ &\leq \frac{\mathbf{E}|X_n - X|^p}{\varepsilon^p} \\ &\quad \text{Markoff-Ungleichung} \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{E}|X_n - X|^p}{\varepsilon^p} = 0.$$

□

Das folgende Beispiel zeigt, daß stochastische und fast sichere Konvergenz nicht identisch sind.

Bsp. 85 Wir wollen eine Folge $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ zufälliger Variablen konstruieren, für die zwar $\text{p-lim } X_n = 0$ gilt, nicht aber $\lim X_n = 0$ f.s. Es seien $\Omega = [0, 1]$ und $\mathcal{E} = [0, 1] \cap \mathcal{B}^1$

gegeben. Für alle Ereignisse $A \subseteq [0, 1]$ gelte:

$$0 \leq P(A) = \int_A 1 \, dx \leq 1.$$

Wir betrachten nun eine Folge $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ von Ereignissen im Ereignisfeld \mathcal{E} . Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei A_n definiert durch:

$$A_n := [k \cdot 2^{-h}, (k+1) \cdot 2^{-h}],$$

wobei für die Zahlen h und k folgendes gelte:

- $h, k \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$;
- $n = 2^h + k$; ($n \leq 2 \cdot 2^h$)
- $0 \leq k < 2^h$.

Die Folge $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ definieren wir nun wie folgt:

$$X_n(\omega) = \begin{cases} 1 & , \text{ falls } \omega \in A_n \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases}$$

Untersuchen wir die stochastische Konvergenz dieser Folge von Zufallsgrößen:

Nach Definition der Folge $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ gilt:

$$\begin{aligned} P(|X_n| > \varepsilon) &= P(|X_n| = 1) = P(A_n) \\ &= (k + 1) \cdot 2^{-h} - k \cdot 2^{-h} \\ &= 2^{-h} \leq \frac{2}{n} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

d.h. $\text{p-lim } X_n = 0$.

Wir untersuchen nun, ob die Folge $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ auch fast sicher gegen Null konvergiert. Sehen wir uns die Intervalle A_n an, für $n = 1, \dots, 8$:

| $n = 2^h + k$ | h | k | A_n |
|---------------|-----|-----|------------------------------------|
| $1 = 2^0 + 0$ | 0 | 0 | $A_1 = [0, 1]$ |
| $2 = 2^1 + 0$ | 1 | 0 | $A_2 = [0, \frac{1}{2}]$ |
| $3 = 2^1 + 1$ | 1 | 1 | $A_3 = [\frac{1}{2}, 1]$ |
| $4 = 2^2 + 0$ | 2 | 0 | $A_4 = [0, \frac{1}{4}]$ |
| $5 = 2^2 + 1$ | 2 | 1 | $A_5 = [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ |
| $6 = 2^2 + 2$ | 2 | 2 | $A_6 = [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ |
| $7 = 2^2 + 3$ | 2 | 3 | $A_7 = [\frac{3}{4}, 1]$ |
| $8 = 2^3 + 0$ | 3 | 0 | $A_8 = [0, \frac{1}{8}]$ |

Die Folge $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ist nirgends konvergent. Also

$$P \left(\left\{ \omega : \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = 0 \right\} \right) = 0 \neq 1.$$

Satz 49 *Es sei $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von zufälligen Variablen, für die es zwei Zufallsgrößen X und Y gibt, so daß gilt:*

$$X = \text{p-lim } X_n \text{ und } Y = \text{p-lim } X_n.$$

Dann folgt daraus:

$$P(X = Y) = 1.$$

Beweis: Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann berechnen wir

$$P(\{\omega : |X(\omega) - Y(\omega)| > \varepsilon\}) = (*)$$

$$\begin{aligned}
(*) &= P(\{\omega: |X(\omega) - X_n(\omega) + X_n(\omega) - Y(\omega)| > \varepsilon\}) \\
&\leq P(\{\omega: |X(\omega) - X_n(\omega)| + |X_n(\omega) - Y(\omega)| > \varepsilon\}) \\
&\leq P(\{\omega: |X_n(\omega) - X(\omega)| > \frac{\varepsilon}{2}\} \cup \{\omega: |X_n(\omega) - Y(\omega)| > \frac{\varepsilon}{2}\}) \\
&\leq P(\{\omega: |X_n(\omega) - X(\omega)| > \frac{\varepsilon}{2}\}) + \\
&\quad P(\{\omega: |X_n(\omega) - Y(\omega)| > \frac{\varepsilon}{2}\}) \\
&\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0
\end{aligned}$$

D.h.

$$P(|X - Y| > \varepsilon) = 0 \quad \forall \varepsilon > 0.$$

$$P(\{\omega: X(\omega) = Y(\omega)\}) = 1. \quad \square$$

Lemma 50

$$\text{p-lim}_{n \rightarrow \infty} X_n = X \Rightarrow X_n \xrightarrow{D} X$$

Wir kennen vier verschiedene Arten der Konvergenz einer Folge von Zufallsgrößen gegen eine zufällige Variable. Sie bilden z.T. eine gewisse Hierarchie.

$$\begin{aligned} \lim X_n = X \text{ f.s.} &\implies \text{p-lim } X_n = X \\ &\implies X_n \xrightarrow{D} X \end{aligned}$$

$$\lim X_n = X \text{ q.m.} \implies \text{p-lim } X_n = X$$

Die Umkehrungen gelten im allgemeinen nicht. Da die Verteilungskonvergenz in dieser Kette die schwächste ist, wird sie oft auch als schwache Konvergenz bezeichnet.

Bsp. 86 $X_n \sim Bi(n, p_n)$, $\lim np_n = \lambda$, $Y \sim Poi(\lambda)$
 $\Rightarrow X_n \xrightarrow{D} Y$.

Diese Aussage kennen wir schon von früher.

13.4 *Die fast sichere Konvergenz

Dieser Abschnitt wird in der Vorlesung nicht behandelt. Er dient nur als Ergänzung für den interessierten Leser.

Def. 51 *Es sei $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Ereignissen. Wir definieren*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \right).$$

Bem.: Wir definieren für alle $n \in \mathbb{N}$: $B_n := \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$. Dann gilt: $B_{n+1} \subseteq B_n$ ($n \in \mathbb{N}$). Folglich ist die Folge $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

monoton fallend. Demzufolge gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n.$$

Das bedeutet jedoch nichts anderes als:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \right).$$

Lemma 51 (BOREL–CANTELLI) *Es sei $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Ereignissen aus einem Wahrscheinlichkeitsraum*

(Ω, \mathcal{E}, P) . Gilt $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$, so folgt daraus:

$$P \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sup A_n \right) = 0.$$

Beweis: Zunächst gilt:

$$P\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=n}^{\infty} P(A_k).$$

Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt. Da nach Voraussetzung

$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$ gilt, folgt für hinreichend großes n :

$$\sum_{k=n}^{\infty} P(A_k) < \varepsilon.$$

Folglich gilt:

$$\begin{aligned}
P\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n\right) &= P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) \\
&\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n}^{\infty} P(A_k) = 0.
\end{aligned}$$

□

Wir betrachten eine Folge $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ von Zufallsvariablen, die fast sicher gegen eine zufällige Variable X konvergiert. Es gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X \text{ f.s.}$$

$$\iff P \left(\left\{ \omega : \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega) \right\} \right) = 1$$

$$\iff P \left(\bigcap_{k=n}^{\infty} \{ \omega : |X_k(\omega) - X(\omega)| \leq \varepsilon \} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \quad \forall \varepsilon > 0$$

Cauchy-Kriterium

$$\iff P \left(\bigcup_{k=n}^{\infty} \{ \omega : |X_k(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon \} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \forall \varepsilon > 0$$

$$\iff \lim_{n \rightarrow \infty} P(B_n) = 0, \quad B_n := \bigcup_{k=n}^{\infty} \{ \omega : |X_k(\omega) - X(\omega)| \geq \varepsilon \}$$

$$\iff P \left(\lim_{n \rightarrow \infty} B_n \right) = 0 \quad (\text{da } \{B_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ monoton fallend ist})$$

$$\iff P \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} B_n \right) = 0.$$

Satz 52 *Es sei $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsgrößen, und X eine weitere zufällige Variable.*

$$\lim X_n = X \text{ f.s.} \Rightarrow \text{p-lim } X_n = X.$$

Beweis: Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt. Dann gilt:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} P(\{\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\}) \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} \{\omega : |X_k(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\}\right) \\ &= 0 \quad \text{nach Vor.} \end{aligned}$$

□

Folg. 8 (aus dem Borel-Cantelli Lemma)

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) < \infty \quad \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} = X \text{ f.s.}$$

Lemma 53 Sei $p\text{-}\lim X_n = X$. Dann existiert eine Teilfolge $\{X_{n_k}\}$ von $\{X_n\}$ so daß $\lim_{k \rightarrow \infty} X_{n_k} \text{ f.s.}$

Lemma 54

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{E}|X_n - X|^p < \infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X \text{ f.s.}$$

Satz 55 (Satz von der majorisierten Konvergenz)

$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X \text{ f.s.}$ und $|X_n| \leq Y, \mathbf{E}|Y|^p < \infty$. Dann gilt: $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X \text{ p.m.}$

13.5 Der zentrale Grenzwertsatz

Satz 56 (Der Zentrale Grenzwertsatz) *Es seien X_1, \dots, X_n ($n \in \mathbb{N}$) unabhängige, identisch verteilte zufällige Variablen mit*

$$\mu := \mathbf{E}X_i; \quad \sigma^2 := \text{Var } X_i.$$

Wir definieren für alle $n \in \mathbb{N}$ Zufallsgrößen Z_n , \bar{Z}_n und Y_n durch: $Z_n := \sum_{i=1}^n X_i$ bzw. $\bar{Z}_n := \frac{Z_n}{n}$ und

$$Y_n = \sqrt{n} \cdot \frac{\bar{Z}_n - \mu}{\sigma}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{Z_n - n \cdot \mu}{\sqrt{n} \cdot \sigma} < x\right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} P(Y_n < x) = \Phi(x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.\end{aligned}$$

Beweis: (Als Hilfsmittel werden charakteristische Funktionen verwendet, siehe unten, für den interessierten Leser) □

Bem.: Die Folge $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert in Verteilung gegen eine Zufallsgröße Z , $Y_n \xrightarrow{D} Z$, $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Anwendungen:

- Simulation bei der Erzeugung einer normalverteilten Zufallsgröße aus Pseudozufallszahlen
- Approximation von Wkt.-verteilungen (insbes. von Teststatistiken)

Genauigkeitsabschätzung:

Satz 57 (BERRY-ESSÉEN) *Es seien die Voraussetzungen des zentralen Grenzwertsatzes erfüllt und*

$M := \mathbf{E}|X_i - \mu|^3 < \infty$. Dann gilt:

$$\left| P \left(\frac{Z_n - n \cdot \mu}{\sqrt{n} \cdot \sigma} < x \right) - \Phi(x) \right| < K,$$

wobei $K = \frac{0,8 \cdot M}{\sigma^3 \cdot \sqrt{n}}$ ist.

Bsp. 87 *Es seien $X_i \sim R(0, 1)$,*

$$\begin{aligned} \mu &= \mathbf{E}X_i = \frac{1}{2} \\ \sigma^2 &= \mathbf{E}X_i^2 - \mu^2 = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

Wir bestimmen die Zahl M :

$$\begin{aligned} M &= \mathbf{E}|X_i - \mu|^3 = \int_{-\infty}^{+\infty} |x - \mu|^3 \cdot f(x) dx \\ &= \int_0^1 |x - \frac{1}{2}|^3 dx = 2 \cdot \int_{\frac{1}{2}}^1 (x - \frac{1}{2})^3 dx = \frac{1}{32} \end{aligned}$$

| | | | |
|-----|-----|-------|-------|
| n | 12 | 100 | 1000 |
| K | 0.3 | 0.104 | 0.033 |

Bsp. 88 Seien $X_i \sim \text{Poi}(\lambda)$,

$$\mathbf{E}X_i = \text{Var } X_i = \lambda$$

Wir schätzen die Zahl M ab:

$$\begin{aligned} M^{\frac{1}{3}} &= (\mathbf{E}|X_i - \lambda|^3)^{\frac{1}{3}} \\ &\leq (\mathbf{E}|X_i - \lambda|^4)^{\frac{1}{4}} \quad (\text{Lemma 47}) \\ &= (\mathbf{E}(X_i - \lambda)^4)^{\frac{1}{4}} \\ &= (\lambda + 3\lambda^2)^{\frac{1}{4}} \end{aligned}$$

Berry-Esseen Schranke:

$$K \leq \frac{0.8(\lambda + 3\lambda^2)^{\frac{3}{4}}}{\lambda^{\frac{3}{2}}\sqrt{n}} \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} \frac{0.8 \cdot 3^{\frac{3}{4}}}{\sqrt{n}}$$

| | | | |
|-----|--------|--------|---------|
| n | 12 | 100 | 1000 |
| K | 0.52 | 0.18 | 0.058 |

Bsp. 89 Seien $X_i \sim B(1, p)$, $i = 1, \dots, n$, *unabhängig*,

$$X_i : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}$$

- $\mathbf{E}X_i = \mu = p$;
- $\text{Var } X_i = \sigma^2 = p(1 - p)$.

Wir definieren nun für alle $n \in \mathbb{N}$ eine Zufallsgröße

$$Z_n := \sum_{i=1}^n X_i.$$

Die Zufallsgrößen Z_n ($n \in \mathbb{N}$) haben also folgende Gestalt:

$$Z_n : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & n \\ p_0 & p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}$$

Wir zeigen jetzt: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $Z_n \sim B(n, p)$, d.h.

$p_i = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$. Beweis mittels vollständiger Induktion.

IA: Es sei $n = 2$. Dann gilt:

$$Z_2 = X_1 + X_2 : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ p_0 & p_1 & p_2 \end{pmatrix}$$

Wir ermitteln die Wktn. p_0 , p_1 und p_2 :

$$\begin{aligned} p_0 &= P(Z_2 = 0) \\ &= P(X_1 = 0, X_2 = 0) \\ &= P(X_1 = 0) \cdot P(X_2 = 0) \quad (\text{Unabh. von } X_1 \text{ und } X_2) \\ &= (1 - p) \cdot (1 - p) = (1 - p)^2 = \binom{2}{0} p^0 (1 - p)^{2-0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_1 &= P(Z_2 = 1) \\ &= P(\{X_1 = 1, X_2 = 0\} \cup \{X_1 = 0, X_2 = 1\}) \\ &= P(X_1 = 1, X_2 = 0) + P(X_1 = 0, X_2 = 1) \\ &\quad (\text{Unvereinbarkeit der Ereignisse}) \\ &= P(X_1 = 1) \cdot P(X_2 = 0) + P(X_1 = 0) \cdot P(X_2 = 1) \\ &= p \cdot (1 - p) + (1 - p) \cdot p = \binom{2}{1} p^1 (1 - p)^{2-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_2 &= P(Z_2 = 2) = P(X_1 = 1, X_2 = 1) \\
&= P(X_1 = 1) \cdot P(X_2 = 1) = p^2 = \binom{2}{2} p^2 (1 - p)^{2-2}
\end{aligned}$$

IS: ÜA

Satz 58 (MOIVRE–LAPLACE) *Es seien $X_i \sim Bi(1, p)$, unabhängig. Dann gilt für $Z_n = \sum_{i=1}^n X_i$ ($\sim Bi(n, p)$):*

$$\lim Z_n \xrightarrow{D} Z \sim \mathcal{N}(np, np(1 - p))$$

Bem.: Der Satz sagt aus, daß für ausreichend großes $n \in \mathbb{N}$ die Binomialverteilung durch die (einfachere)

(Standard-)Normalverteilung ersetzt werden kann,

$$P(Z_n < y) \approx \Phi \left(\frac{y - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}} \right).$$

Beweis: Mit $\mathbf{E}Z_n = np$ und $\text{Var } Z_n = np(1 - p)$ folgt unter Anwendung des Zentralen Grenzwertsatzes:

$$\begin{aligned} P(Z_n < y) &= P \left(\frac{Z_n - n \cdot \mu}{\sqrt{n \cdot \sigma}} < \frac{y - n \cdot \mu}{\sqrt{n \cdot \sigma}} \right) \\ &= P \left(\frac{Z_n - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}} < \frac{y - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}} \right) \\ &\approx \Phi \left(\frac{y - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}} \right) \end{aligned}$$

□

Bsp. 90 Es seien $n = 1000$ und $p = 0.4$. Gesucht werde die Wahrscheinlichkeit $P(Z_n < 300)$. Es gilt:

$$\begin{aligned} P(Z_n < 300) &= \sum_{x < 300} P(Z_n = x) \\ &= \sum_{i=0}^{299} \binom{1000}{i} 0.4^i (1 - 0.4)^{1000-i} \end{aligned}$$

großer Rechenaufwand.

besser: Anwendung des Satzes von MOIVRE–LAPLACE.

Es gilt:

$$\begin{aligned}P(Z_n < 300) &\approx \Phi\left(\frac{300 - 1000 \cdot 0,4}{\sqrt{1000 \cdot 0,4 \cdot (1 - 0,4)}}\right) \\&= \Phi\left(\frac{-100}{\sqrt{240}}\right) \approx \Phi\left(\frac{-100}{15,49}\right) \\&= \Phi(-6.45) = 1 - \underbrace{\Phi(6.45)}_{\approx 1} \approx 0\end{aligned}$$

Bem.: Die Anwendung des Satzes von MOIVRE–LAPLACE setzt voraus, daß $n \in \mathbb{N}$ hinreichend groß ist.

Faustregel: $n \cdot p \geq 10$ und $n \cdot (1 - p) \geq 10$.

Bsp. 91 Wir betrachten POISSON–verteilte unabhängige Zufallsgrößen $X_i \sim \text{Poi}(\lambda_i)$ ($i = 1, \dots, n$,

$$X_i : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & k & \dots \\ p_{0i} & p_{1i} & p_{2i} & \dots & p_{ki} & \dots \end{pmatrix}$$

mit $p_{ji} = \frac{\lambda_i^j}{j!} \cdot e^{-\lambda_i}$ ($i = 1, \dots, n$).

$$\mathbf{E}X_i = \text{Var } X_i = \lambda_i.$$

$$Z_n := \sum_{i=1}^n X_i$$

Für den Erwartungswert dieser Zufallsgrößen gilt:

$$\mathbf{E}Z_n = \mathbf{E} \left(\sum_{i=1}^n X_i \right) = \sum_{i=1}^n \mathbf{E}X_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i$$

Wir nehmen nun an, $\lambda_i = \lambda$, für alle $i = 1, \dots, n$. Ohne diese Annahme haben die Zufallsgrößen X_i verschiedene Erwartungswerte und Varianzen, so daß der zentrale Grenzwertsatz (in der angegebenen Form) nicht anwendbar ist.

Es gilt also unter dieser Annahme:

$$\mathbf{E}X_i = \mu = \lambda; \quad \text{Var } X_i = \sigma^2 = \lambda.$$

Lemma 59 *Es seien X_1 und X_2 unabhängig,
 $X_1, X_2 \sim \text{Poi}(\lambda_i), i = 1, 2$). Dann ist die Zufallsgröße
 $Z_2 := X_1 + X_2$ ebenfalls POISSON-verteilt und es gilt:
 $Z_2 \sim \text{Poi}(\lambda_1 + \lambda_2)$.*

(Bem: Vergleichen Sie mit der Faltungsformel für stetige
Zufallsvariablen)

Beweis: Es gilt für alle $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}P(Z_2 = k) &= \sum_{t=0}^k p_1(t) \cdot p_2(k-t) \\&= \sum_{t=0}^k \left(\frac{\lambda_1^t}{t!} \cdot e^{-\lambda_1} \cdot \frac{\lambda_2^{k-t}}{(k-t)!} \cdot e^{-\lambda_2} \right) \\&= \sum_{t=0}^k \left(\frac{\lambda_1^t \cdot \lambda_2^{k-t}}{t! \cdot (k-t)!} \cdot e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)} \right) \\&= e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)} \cdot \frac{1}{k!} \cdot \sum_{t=0}^k \frac{\lambda_1^t \cdot \lambda_2^{k-t} \cdot k!}{t! \cdot (k-t)!} \\&= \frac{e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)}}{k!} \cdot (\lambda_1 + \lambda_2)^k \quad (\text{Binomischer Lehrsatz})\end{aligned}$$

□

Bem. 22 Die Funktionen p_1 und p_2 heißen auch Faltungsdichten.

Mit $\lambda_i = \lambda$ ($i = 1, \dots, n$) folgt daraus

$$Z_n = \sum_{i=1}^n X_i \sim Poi(n \cdot \lambda).$$

Wir wenden jetzt den Zentralen Grenzwertsatz an. Dann erhalten wir für hinreichend großes $\lambda' := n \cdot \lambda$:

$$P\left(\frac{Z_n - n \cdot \mu}{\sqrt{n \cdot \sigma}} < x\right) = P\left(\frac{Z_n - \lambda'}{\sqrt{\lambda'}} < x\right) \approx \Phi(x).$$

Also kann auch eine POISSON–Verteilung durch eine einfachere (Standard–)Normalverteilung ersetzt werden, falls die Parameter λ_i ($i = 1, \dots, n$) alle gleich λ sind und der

Faktor $n \cdot \lambda$ hinreichend groß ist (etwa $n \cdot \lambda \geq 10$).

Bem.: Sind die Parameter λ_i ($i = 1, \dots, n$) nicht alle gleich, so gilt die Aussage trotzdem, falls ihre Summe hinreichend groß ist (≥ 10).

Bsp. 92 Seien X_i unabhängig, $X_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$, $i = 1, \dots, n$.

$$Y = \sum_{i=1}^n X_i^2 \sim \chi_n^2,$$

d.h. Y ist χ^2 verteilt mit n Freiheitsgraden.

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n-2}{2}} e^{-\frac{x}{2}}, & \text{falls } x \geq 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$\mathbf{E}Y = n$$

$$\begin{aligned} \text{Var } Y &= \mathbf{E}(Y - n)^2 = \mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^n (X_i^2 - 1)\right)^2 = n\mathbf{E}(X_1^2 - 1)^2 \\ &= n\mathbf{E}(X_1^4 - 2\mathbf{E}X_1^2 + 1) = n(3 - 2 + 1) = 2n. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n}{\sqrt{2n}} < y\right) = \Phi(y).$$

$$P\left(\sum_{i=1}^n X_i^2 < x\right) \approx \Phi\left(\frac{x - n}{\sqrt{2n}}\right)$$

z.B. $n = 30, x = 23.364: P(\sum_{i=1}^n X_i^2 < x) = 0.2$

$$\Phi\left(\frac{x - n}{\sqrt{2n}}\right) = \Phi(-0.8567) = 1 - 0.8042 = 0.1958.$$

bleibt z.z.: $\mathbf{E}X_i^4 = 3$.

$$\begin{aligned}\sqrt{2\pi}\mathbf{E}X_i^4 &= \int_{-\infty}^{\infty} x^4 e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= 2 \int_0^{\infty} x^4 e^{-\frac{x^2}{2}} dx, \quad t = x^2, \quad dx = \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}} dt \\ &= \int_0^{\infty} t^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{t}{2}} dt = \int_0^{\infty} t^{\frac{5}{2}-1} e^{-\frac{t}{2}} dt \\ &= \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) 2^{\frac{5}{2}} = \Gamma\left(2 + \frac{1}{2}\right) 2^{\frac{5}{2}} \\ &= 1 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{4} \cdot 2^{\frac{5}{2}} = 3 \cdot \sqrt{2\pi} \\ \mathbf{E}X_i^4 &= 3.\end{aligned}$$

Dabei haben wir verwendet:

$$\int_0^{\infty} t^{\lambda-1} e^{-\alpha t} dt = \frac{\Gamma(\lambda)}{\alpha^{\lambda}}$$

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n!$$

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1) \frac{\sqrt{\pi}}{2^n}$$

*Beweis des Zentralen Grenzwertsatzes

Sei $\phi_{X-\mu}$ die charakteristische Funktion von $X_i - \mu$. Da die ersten beiden Momente (μ, σ^2) existieren, folgt aus der Taylorreihendarstellung

$$\phi_{X-\mu}(t) = 1 - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2 + o(t^2)$$

Die ZV

$$\frac{X_i - \mu}{\sqrt{n}\sigma}$$

haben die charakteristische Funktion

$$\phi_{X-\mu}\left(\frac{t}{\sqrt{n}\sigma}\right),$$

Die ZV $Y_n = \sum_{i=1}^n \frac{X_i - \mu}{\sqrt{n}\sigma}$ hat also die charakteristische

Funktion

$$\phi_{Y_n}(t) = \left(\phi_{X-\mu}\left(\frac{t}{\sqrt{n}\sigma}\right) \right)^n = \left(1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{t^2}{n}\right) \right)^n.$$

Es gilt:

$$\ln\left(1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{t^2}{n}\right)\right)^n = n \ln\left(1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{t^2}{n}\right)\right) \rightarrow -\frac{t^2}{2}.$$

(vgl. Taylorreihenentwicklung des Logarithmus)

$$\ln \phi_{Y_n}(t) \rightarrow -\frac{t^2}{2}$$

$$\phi_{Y_n}(t) \rightarrow e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

D.h. die ch.Fkt. von Y_n konvergiert gegen die ch.Fkt. der Standard-Normalverteilung (sogar gleichmäßig).

Aus dem Konvergenzsatz folgt: $Y_n \rightarrow Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Bsp. 93 Münzwurf: 1000 mal. Wie groß ist die Wkt., dass weniger als 475 mal Zahl fällt?

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{falls Zahl} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} P\left(\sum_{i=1}^{1000} X_i \leq 475\right) &= P\left(\underbrace{\sqrt{1000} \frac{1}{1000} \sum X_i - \frac{1}{2}}_{\sim \mathcal{N}(0,1)} \leq \sqrt{1000} \frac{475}{1000} - \frac{1}{2}\right) \\ &\approx \Phi\left(\sqrt{1000} \frac{0.475 - 0.5}{\frac{1}{2}}\right) \\ &= \Phi(-1.58) \approx 0.057. \end{aligned}$$

Bedeutung des ZGWS in der Statistik

- beim Schätzen

Gesetz der Großen Zahlen: $\bar{X} \rightarrow \mu$.

Frage: Wie groß ist der Stichprobenumfang zu wählen, um eine bestimmte Genauigkeit zu erreichen?

ε, δ vorgegeben, klein ($\varepsilon, \delta < 0.5$).

n ist so zu wählen, dass

$$P(|\bar{X} - \mu| \leq \varepsilon) \geq 1 - \delta$$

$$\begin{aligned}
1 - \delta &\leq P(|\bar{X} - \mu| \leq \varepsilon) \\
&= P\left(\sqrt{n} \frac{(|\bar{X} - \mu|)}{\sqrt{\text{Var} X}} \leq \sqrt{n} \frac{\varepsilon}{\sqrt{\text{Var} X}}\right) \\
&= P\left(\sqrt{n} \frac{(|\bar{X} - \mu|)}{\sigma} \leq \sqrt{n} \frac{\varepsilon}{\sigma}\right) \\
&\approx \Phi\left(\sqrt{n} \frac{\varepsilon}{\sigma}\right)
\end{aligned}$$

gdw.

$$\begin{aligned}
\Phi^{-1}(1 - \delta) &\leq \sqrt{n} \frac{\varepsilon}{\sigma} \\
n &\geq \left(\frac{\sigma \Phi^{-1}(1 - \delta)}{\varepsilon}\right)^2
\end{aligned}$$

Bedeutung des ZGWS in der Statistik

- beim Testen

$\mu := \mathbf{E}X$. Wir testen z.B.

$$H_0 : \mu \leq \mu_0 \quad \text{gegen} \quad H_1 : \mu > \mu_0$$

Teststatistik:

$$T_n = \sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma}$$

T_n klein spricht für H_0 , T_n groß gegen H_0 .

Fehler 1. Art: H_0 ablehnen, obwohl richtig
möchte man begrenzen ($\leq \alpha$)

Fehler 2. Art: H_0 annehmen, obwohl falsch

sollte auch klein sein ($\leq \beta$)

$$P_{\mu_0}(T_n \geq u_{1-\alpha}) \rightarrow \alpha \quad \text{nach ZGWS}$$

denn

$$P_{\mu_0}(T_n < u_{1-\alpha}) \rightarrow \Phi(u_{1-\alpha}) = 1 - \alpha$$

(wenn $\mu < \mu_0$ so $P_{\mu}(T_n < u_{1-\alpha}) > P_{\mu_0}(T_n < u_{1-\alpha})$)

Bsp. 94 *In der BRD gab es im Zeitraum 1970-1990 insgesamt 25 171 123 registrierte Lebendgeburten, davon waren 12 241 392 Mädchen.*

Berechnen Sie die ein 95% Vertrauensintervall für die Wahrscheinlichkeit einer Mädchengeburt!

Das zufällige Ereignis einer Mädchengeburt wird dargestellt durch eine Bernoulli-verteilte Zufallsvariable, $X_i \sim B(1, p)$.

Sei $n = 25171123$ und

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i$$

die zufällige Anzahl der Mädchengeburt.

Wir wissen, $\mathbf{E}S_n = n \cdot p$ und $\text{Var } S_n = n \cdot p \cdot (1 - p)$.

Weiter sei $u_{0.975}$ das 0.975-Quantil der Standardnormalverteilung, d.h

$$\Phi(u_{0.975}) = 0.975.$$

Nachsehen in der Tabelle liefert $u_{0.975} = 1.96$.

Aus dem ZGWS folgt

$$P\left(\frac{|S_n - np|}{\sqrt{\text{Var} S_n}} \leq u_{0.975}\right) = 0.95.$$

Die folgenden Ungleichungen gelten jeweils mit Wkt. 0.95:

$$|S_n - np| \leq 1.96 \cdot \sqrt{np(1-p)}$$

$$(S_n - np)^2 \leq 1.96^2 np(1-p)$$

$$n^2 p^2 - 2S_n np + S_n^2 \leq 1.96^2 np - 1.96^2 np^2$$

$$(n^2 + 1.96^2 n)p^2 - (1.96^2 n + 2nS_n)p + S_n^2 \leq 0$$

bzw. wenn wir die Schätzung

$$\hat{p} = \frac{S_n}{n}$$

für die relative Anzahl der Mädchengeburten einsetzen,

für die Randpunkte des Vertrauensintervalls

$$p_{1,2} = \frac{1}{n + 1.96^2} \left(n\hat{p} + \frac{1.96^2}{2} \pm 1.96 \sqrt{n\hat{p}(1 - \hat{p}) + \frac{1.96^2}{4}} \right).$$

Hier haben wir

$$\hat{p} = \frac{S_n}{n} = \frac{12241392}{25171123} = 0.48633$$

95%-Vertrauensintervall: $[0.48613, 0.48652]$.

Bsp. 95 (Fortsetzung des vorigen Beispiels) *Angenommen, es würde gelten $p = \frac{1}{2}$. Mit welcher Wkt. würden dann höchstens 12 241 392 auftreten?*

$$\begin{aligned} P(S_n \leq 12241392) &= P\left(\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq \frac{12241392 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \\ &\approx \Phi\left(\frac{12241392 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \\ &= \Phi(-137.2) \leq 3 \cdot 10^{-4091}. \end{aligned}$$

Bsp. 96 (Roulette) *Beim Roulette gibt es 36 Zahlen, 18 davon sind schwarz, 18 sind rot, dazu die 0, die ist grün. Bei Setzen der richtigen Farbe gibt es den doppelten Einsatz, bei Setzen der richtigen Zahl den 36 fachen Einsatz. Zwei Spieler A und B spielen folgende Strategie: A setzt auf Farbe, B auf Zahl. Beide spielen 100 mal, und jetzen jeweils 10 Euro.*

Wie groß ist die Wkt., dass sie nach $n = 100$ Spielen mindestens 40 Euro gewonnen haben?

Wir beschreiben die Gewinne/Verluste im i -ten Spiel durch

Bernoulli-Zufallsvariablen,

$$X_i : \begin{pmatrix} 10 & -10 \\ \frac{18}{37} & \frac{19}{37} \end{pmatrix}, \quad Y_i : \begin{pmatrix} 350 & -10 \\ \frac{1}{37} & \frac{36}{37} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{E}X_i = 10 \cdot \frac{18}{37} - 10 \cdot \frac{19}{37} = -\frac{10}{37} =: \mu_A$$

$$\text{Var}X_i = \mathbf{E}X_i^2 - (\mathbf{E}X_i)^2 = 100 - \left(\frac{10}{37}\right)^2 =: \sigma_A^2$$

$$\mathbf{E}Y_i = 350 \cdot \frac{1}{37} - 10 \cdot \frac{36}{37} = -\frac{10}{37} =: \mu_B$$

$$\text{Var}Y_i = \mathbf{E}Y_i^2 - (\mathbf{E}Y_i)^2 = 350^2 \frac{1}{37} + (-10)^2 \frac{36}{37} - \left(\frac{10}{37}\right)^2 =: \sigma_B^2$$

$$\begin{aligned}
P\left(\sum_{i=1}^{100} X_i \geq 40\right) &= P\left(\frac{\sum_{i=1}^{100} X_i - n\mu_A}{\sqrt{n}\sqrt{\text{Var} X_i}} \geq \frac{40 - n\mu_A}{\sqrt{n}\sqrt{\text{Var} X_i}}\right) \\
&= 1 - \Phi\left(\frac{40 - n\mu_A}{\sqrt{n}\sqrt{\text{Var} X_i}}\right) \\
&= 1 - \Phi(0.067) = 0.47
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P\left(\sum_{i=1}^{100} Y_i \geq 40\right) &= P\left(\frac{\sum_{i=1}^{100} Y_i - n\mu_B}{\sqrt{n}\sqrt{\text{Var} X_i}} \geq \frac{40 - n\mu_B}{\sqrt{n}\sqrt{\text{Var} X_i}}\right) \\
&= 1 - \Phi\left(\frac{40 - n\mu_B}{\sqrt{n}\sqrt{\text{Var} X_i}}\right) \\
&= 1 - \Phi(0.12) = 0.45
\end{aligned}$$