6.4 Poisson-Verteilung

Sei $\{N_t\}_{t\in T}$ eine Menge von Zufallsvariablen (ein stochastischer Prozeß) mit folgenden Eigenschaften:

V1: Zuwächse sind unabhängig, dh. die Zufallsvariablen $N_{t+h} - N_t$ und $N_t - N_{t-h}$ sind unabhängig [a]

V2: es ist egal wo wir Zeitintervall betrachten, dh. N_{t+h} und N_t haben dieselbe Verteilung

V3: Wkt., daß mindestens ein Ereignis in der Zeit h eintritt, z.B. ein Kunde ankommt.

$$p(h) = a \cdot h + o(h), \quad a > 0, h \to 0$$

V4: Wkt. für ≥ 2 Ereignisse in der Zeit h: $o(h)$

Anmerkung: Zwei Zufallsvariablen X und Y heißen unabhängig, falls

$$\forall A, B \in \mathcal{B}; \quad P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A) \cdot P(X \in B)$$

Frage: Wkt. daß bis zum Zeitpunkt t genau k Ereignisse eintreten? (eingetroffene Kunden, zerfallene Teilchen)

$$P_k(t) := P(N_t = k), \qquad P_k(t) = 0 \quad \text{für} \quad k < 0$$

$$p(h) = \sum_{k=1}^{\infty} P_k(h) \qquad \geq 1 \text{Ereignis tritt ein}$$

Offenbar:

$$1 = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(t)$$

$$V3 \quad \Rightarrow \quad P_0(h) = 1 - p(h) = 1 - ah + o(h)$$

$$V4 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=2}^{\infty} P_k(h) = o(h), \qquad (h \to 0)$$

1. Schritt: Bestimmen $P_0(t)$.

$$\begin{aligned} P_0(t+h) &= P(N_t = 0, N_{t+h} - N_t = 0) \\ &= P_0(t)P(N_{t+h} - N_t = 0) \quad \text{wegen V1} \\ &= P_0(t)P(N_h - N_0 = 0) \quad \text{wegen V2} \\ &= P_0(t)P_0(h) \quad \text{wegen} \quad N_0 = 0 \\ &= P_0(t)(1 - p(h)) \\ &= P_0(t)(1 - ah + o(h)) \quad \text{wegen V4} \end{aligned}$$

Nacheinander folgt:

$$\frac{P_0(t+h) - P_0(t)}{h} = P_0(t)(-a + \frac{o(h)}{h})$$

$$P_0'(t) = -aP_0(t)$$

$$P_0(t) = ce^{-at}$$

Wegen $P_0(0) = 1$ folgt: $c = 1$ und

$$P_0(t) = e^{-at}$$

2. Schritt: Bestimmen $P_k(t)$.

Zerlegen das Ereignis $\{N_{t+h} = k\}$ in disjunkte Teilereignisse.

$$\begin{aligned}\{N_{t+h} = k\} \quad = \quad & \{N_t = 0, N_{t+h} - N_t = k\} \cup \\ & \{N_t = 1, N_{t+h} - N_t = k-1\} \cup \\ & \{N_t = 2, N_{t+h} - N_t = k-2\} \cup \ldots \cup \\ & \{N_t = k, N_{t+h} - N_t = 0\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_k(t+h) &= \sum_{j=0}^{k} P(N_t = k-j, N_{t+h} - N_t = j) \\ &= \sum_{j=0}^{k} P_{k-j}(t) \underbrace{P(N_{t+h} - N_t = j)}_{=P(N_h - N_0 = j)} \quad \text{wegen V1} \\ &= \sum_{j=0}^{k} P_{k-j}(t) P_j(h) \quad \text{wegen V2} \\ &= P_k(t)P_0(h) + P_{k-1}(t)P_1(h) + \sum_{j=2}^{k} P_{k-j}(t)P_j(h) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_1(h) &= \sum_{j=1}^{\infty} P_j(h) - \sum_{j=2}^{\infty} P_j(h) \\ &= p(h) + o(h) \\ &= ah + o(h) \end{aligned}$$

$$\sum_{j=2}^{\infty} P_{k-j}(t) P_j(h) \leq \sum_{j=2}^{\infty} P_j(h) = o(h) \quad \text{wegen V2}$$

Nacheinander folgt:

$$\begin{aligned} P_k(t+h) - P_k(t) &= (P_0(h) - 1) P_k(t) + P_{k-1}(t) P_1(h) + o(h) \\ &= -ahP_k(t) + ahP_{k-1}(t) + o(h) \\ \frac{P_k(t+h) - P_k(t)}{h} &= -aP_k(t) + aP_{k-1}(t) + \frac{o(h)}{h} \end{aligned}$$

$$P_k'(t) = -aP_k(t) + aP_{k-1}(t), \quad P_k(0) = 0$$

$$Q_k(t) := P_k(t)e^{at}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
Q_k'(t) &= P_k'(t)e^{at} + P_k(t)ae^{at} \\
Q_k'(t) &= e^{at}(\underbrace{-aP_k(t) + aP_{k-1}(t)}_{P_k'(t)} + aP_k(t)) \\
&= aQ_{k-1}(t) \\
Q_1'(t) &= aQ_0(t) = ae^{-at}e^{at} = a \Rightarrow Q_1(t) = at \\
Q_2'(t) &= aQ_1(t) = a^2t \Rightarrow Q_2(t) = \frac{a^2t^2}{2}
\end{aligned}$$

Durch vollständige Induktion:

$$Q_k(t) = \frac{a^k t^k}{k!}$$

$$P_k(t) = \frac{a^k t^k}{k!} e^{-at}$$

Poisson-Verteilung mit Parameter $\lambda = at$.

Programme:

```
Descr_Binomial_neu.sas
Descr_Poisson.sas
Descr_Geometr.sas
Descr_Hypergeom.sas
```

Bem: In den Wahrscheinlichkeiten können Parameter auftreten, die in der Regel unbekannt sind.

Die Parameter sind anhand der Beobachtungen (der Daten) zu bestimmen/zu <u>schätzen</u>!
$\longrightarrow$ Aufgabe der Statistik

7 Charakteristika von Verteilungsfunktionen

7.1 Der Erwartungswert

Bsp. Eine Münze wird 3 mal geworfen.

Wie oft können wir erwarten, daß Blatt oben liegt?

Wie oft wird im Mittel Blatt oben liegen?

$$X: \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1/8 & 3/8 & 3/8 & 1/8 \end{pmatrix}$$

Erwartungswert: $0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{12}{8} = 1.5$

D.h. bei 10maliger Durchführung des Experiments können wir im Mittel mit 15mal Blatt rechnen.

Def. 19 *: Sei X diskrete Zufallsvariable,*

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_n & \ldots \\ p_1 & \ldots & p_n & \ldots \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{E}X = \sum_{i=1}^{\infty} p_i x_i$$

heißt <u>Erwartungswert</u> von X.

Bsp.: a) $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \dots \\ p_0 & p_1 & p_2 & p_3 & \dots \end{pmatrix}$$

$$p_i = \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}$$

$$\mathbf{E}X = \sum_{i=0}^{\infty} p_i i = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} \cdot i = \lambda \underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda^{i-1}}{(i-1)!}}_{e^{\lambda}} e^{-\lambda} = \lambda.$$

z.B. mittlere Ankunftsrate.

b) $X \sim B(n,p)$

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}X &= \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k \cdot (1-p)^{n-k} \\
&= p \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} p^{k-1} (1-p)^{n-k} \\
&= p \cdot n \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-k} \\
&= p \cdot n \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} p^{i} (1-p)^{n-1-i}, \qquad k = i+1 \\
&= n \cdot p.
\end{aligned}$$

c) $X \sim Geo(p)$

$$X: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & k & \ldots \\ p & pq & pq^2 & \ldots & pq^{k-1} & \ldots \end{pmatrix} \qquad q = 1 - p$$

$$\mathbf{E}X = \sum_{k=0}^{\infty} x_k p_k = \sum_{k=1}^{\infty} kpq^{k-1} = p \cdot \sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}.$$

Beweis des vorletzten Gleichheitszeichens:

a) durch vollst. Induktion

b) Differenzieren der geometrischen Reihe