3.4 Anwendung bedingter Wahrscheinlichkeiten

Bsp. 23 *Betrachtet werden mehrere Kanonen. Für* $i \in \mathbb{N}$ *bezeichne* A_i *das Ereignis, daß Kanone* i *einen Schuß abgibt.* A *sei das Ereignis, daß ein Treffer erzielt wird. Nun kann die Wahrscheinlichkeit* $P(A/A_i)$ *ermittelt werden, also die Wahrscheinlichkeit, daß Kanone* i *einen Treffer erzielt.*

modifiziert als ÜA.

Bsp. 24 Aufbau eines Expertensystems

Vgl. ÜA.

Aufbau der Wissensbasis:

K_i	$P_0(K_i)$	Symptom Nr. 1	$P(S_1/K_i)$	$P(S_1/\overline{K_i})$
		Symptom Nr. 2	$P(S_2/K_i)$	$P(S_2/\overline{K_i})$
		Symptom Nr. 3	$P(S_3/K_i)$	$P(S_3/\overline{K_i})$

K_i – bestimmte Ereignisse (z.B. Krankheiten)

$P_0(K_i)$ – a–priori–Wahrscheinlichkeit für K_i

$P(S/K)$ – Wkt für Symptom S, falls K vorliegt

$P(S/\overline{K})$ – Wkt für Symptom S, falls K nicht vorliegt

“Inferenzmaschine”

$$
\begin{aligned}
P(K|S) &= \frac{P(S|K) \cdot P(K)}{P(S)} \\
P(K|\overline{S}) &= \frac{P(\overline{S}|K) \cdot P(K)}{P(\overline{S})} \\
P(S) &= P(S|K) \cdot P(K) + P(S|\overline{K}) \cdot P(\overline{K}) \\
P(\overline{S}) &= 1 - P(S)
\end{aligned}
$$

Arbeitsweise:

Krankheiten $K_1, \ldots, K_K$

Symptome $S_1, \ldots, S_S$

$I_0 = \{1, \ldots, K\}; \qquad J = \{1, \ldots, S\}$

$l = 0$; $P_0 = P$; $\quad \forall (i,j) \in I_lxJ$:

$$\begin{aligned}
P_l(S_j) &:= P(S_j|K_i) \cdot P_l(K_i) + P(S_j|\overline{K}_i) \cdot P_l(\overline{K}_i) \\
P_l(K_i|S_j) &= \frac{P(S_j|K_i) \cdot P_l(K_i)}{P(S_j)} \\
P_l(K_i|\overline{S}_j) &= \frac{P_l(\overline{S_j}|K_i) \cdot P_l(K_i)}{P_l(\overline{S}_j)}
\end{aligned}$$

a: ($l = 0$: ärztliches Wissen)

$$r(j) := \sum_{i \in I_l} |P_l(K_i|S_j) - P(K_i|\overline{S}_j)| \quad \forall \quad j \in J;$$

$j_l :=$ argmax$_{j\in J} r(j)$ das Symptom mit dem größten $r(j)$.

b: Frage an den Patienten nach Symptom S_{j_l}.

$P(K_i)$ wird aktualisiert (Abbildung).

Dann wieder $\forall (i,j) \in I_l$xJ:

$$\begin{aligned}
P_{l+1}(S_j) &:= P(S_j|K_i)\cdot P_{l+1}(K_i) + P(S_j|\overline{K}_i)\cdot P_{l+1}(\overline{K}_i)\\
P_{l+1}(K_i|S_j) &:= \frac{P(S_j|K_i)\cdot P_{l+1}(K_i)}{P(S_j)}\\
P_{l+1}(K_i|\overline{S}_j) &:= \frac{P(\overline{S}_j|K_i)\cdot P_{l+1}(K_i)}{P(\overline{S}_j)}
\end{aligned}$$

c:

$$m_i := \max_{j \in J} |P_{l+1}(K_i|S_j) - P_{l+1}(K_i|\overline{S}_j)|, \quad \forall i \in I_l$$

$$\begin{aligned} I_{l+1} &= I_l \setminus \{i \in I_l : m_i < c\} \\ J_{l+1} &= J_l \setminus \{j_l\}; \end{aligned}$$

$l := l + 1;$

/* Abbruchbedingung, z.B.

$I_l = I_{l+1}, S_{j_l} = S_{j_{l+1}}, I_{l+1} = \{i\}$ oder $J_{l+1} = \emptyset$ */

goto a;

end.

Bsp. 25 Langzeitverhalten eines Ein–Prozessorsystems mit einer I/O–Einheit

Wir betrachten ein Ein–Prozessorsystem, das auf folgende Weise arbeiten soll: Wenn ein Programm beendet wird, so wird mit Wahrscheinlichkeit p ($0 < p < 1$) die I/O–Einheit aktiviert, und mit Wahrscheinlichkeit $q = 1 - p$ erfolgt ein erneuter Programmstart. Nach Beendigung eines I/O–Vorgangs wird immer ein neues Programm gestartet.

Frage: Mit welcher Wahrscheinlichkeit befindet sich das System im n–ten Zyklus im Programmzustand?

Wir legen fest ($n = 1, 2, 3, \ldots$):

A_n - *Ereignis, daß im n–ten Zyklus ein Programm startet*

$\overline{A_n}$ - *Ereignis, daß im n–ten Zyklus die I/O–Einheit aktiviert wird*

gesucht: $P(A_n)$. *Langzeitverhalten (*$\lim_{n\to\infty} P(A_n)$*).*

$P(A_1) = 1$, denn es wird beim Einschalten des Systems immer mit einem Programm begonnen.

Aus der anfangs angegebenen Beschreibung der Arbeitsweise des Systems folgt:

$$\begin{aligned}
P(A_{n+1}/A_n) &= q = 1 - p \\
P(\overline{A_{n+1}}/A_n) &= p \\
P(\overline{A_{n+1}}/\overline{A_n}) &= 0 \\
P(A_{n+1}/\overline{A_n}) &= 1
\end{aligned}$$

Wir bezeichnen $q_n := P(A_n)$. Wir ermitteln die ersten drei

Werte:

$$\begin{aligned}
q_1 &= P(A_1) = 1 \\
q_2 &= P(A_2) \\
&= P(A_2/A_1) \cdot P(A_1) + \underbrace{P(A_2/\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_1})}_{=0} \quad \text{(totale Wkt.)} \\
&= q = 1 - p \\
q_3 &= P(A_3) \\
&= P(A_3/A_2) \cdot P(A_2) + P(A_3/\overline{A_2}) \cdot P(\overline{A_2}) \\
&= q \cdot q + 1 \cdot (1 - q) = (1 - p)^2 + p = 1 - p + p^2
\end{aligned}$$

Vermutung:

$$q_n = P(A_n) = \sum_{i=0}^{n-1} (-p)^i.$$

Beweis: (vollständige Induktion):

IA: Es sei $n = 1$: $\quad q_1 = 1.$

IS: Wir nehmen an, daß die Formel für n gilt. Wir zeigen die

Gültigkeit für $n+1$:

$$\begin{aligned}
q_{n+1} &= P(A_{n+1}) \\
&= P(A_{n+1}/A_n)\cdot P(A_n) + P(A_{n+1}/\overline{A_n})\cdot P(\overline{A_n}) \\
&= q\cdot q_n + 1\cdot(1-q_n) = 1+(q-1)\cdot q_n \\
&= 1-p\cdot q_n \\
&= 1-p\cdot\sum_{i=0}^{n-1}(-p)^i \quad \text{(nach IV)} \\
&= 1+\sum_{i=1}^{n}(-p)^i = \sum_{i=0}^{n}(-p)^i
\end{aligned}$$

$\square$

Untersuchen wir noch das Langzeitverhalten:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} P(A_n) &= \lim_{n\to\infty} q_n \\ &= \sum_{i=0}^{\infty}(-p)^i \\ &= \frac{1}{1-(-p)} = \frac{1}{1+p},\end{aligned}$$

geometrische Reihe mit $|-p| < 1.$

Frage: Sind die Ereignisse A_{n+1} und A_n unabhängig? Nach der Formel für die bedingte Wahrscheinlichkeit (vgl. Definition 9) gilt:

$$\begin{aligned} P(A_{n+1} \cap A_n) &= P(A_{n+1}/A_n) \cdot P(A_n) \\ &= q \cdot q_n \end{aligned}$$

Wären die beiden Ereignisse unabhängig, so müßte gelten (vgl. Definition 10):

$$\begin{aligned} P(A_{n+1}/A_n) &= P(A_{n+1}) \\ q &= q_{n+1} \end{aligned}$$

Aber, für $n \geq 2$ gilt $q \neq q_{n+1}$. Also sind die Ereignisse A_n und A_{n+1} nicht unabhängig.

Der gesamte Ablauf läßt sich eindeutig in Matrixform darstellen:

	I/O	A
I/O	0	1
A	p	$1-p$

Weitere Anwendungen

Bsp. 26 (Zuverlässigkeitstheorie) *Wir betrachten ein Reihen-System mit 2 Bauteilen, die unabhängig voneinander ausfallen,*

p_i: *Ausfallwkt. für Bauteil* i

Fall: System fällt (innerhalb eines best. Zeitraumes) aus. Wie groß ist Wkt., dass genau das erste Bauteil ausgefallen ist?

A_i: Ereignis, dass Bauteil i ausfällt.

geg.: $P(A_i) = p_i, i = 1, 2$

ges.: $P(A_1 \cap \overline{A}_2 | A_1 \cup A_2)$?

$$\begin{aligned}
P(A_1 \cap \overline{A}_2 | A_1 \cup A_2) &= \frac{P((A_1 \cap \overline{A}_2) \cap (A_1 \cup A_2))}{P(A_1 \cup A_2)} \\
&= \frac{P(A_1 \cap \overline{A}_2)}{P(A_1 \cup A_2)} \quad \text{Distr.gesetz}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{P(A_1) \cdot P(\overline{A}_2)}{P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)} \quad \text{UA, Subtraktivität} \\
&= \frac{p_1(1 - p_2)}{p_1 + p_2 - p_1 p_2}
\end{aligned}$$

Analog

$$P(A_2 \cap \overline{A}_1 | A_1 \cup A_2) = \frac{p_2(1-p_1)}{p_1 + p_2 - p_1 p_2}$$

Wkt. für Ausfall beider Bauteile: ÜA

Bsp. 27 (Münzwurf-Spiel) *A und B spielen: Münze wird abwechselnd geworfen. Es gewinnt, wer zuerst Blatt hat.*

B: Ereignis, dass bei einem Wurf Blatt kommt

Z: Ereignis, dass bei einem Wurf Zahl kommt

E: Ereignis, dass A gewinnt

F: Ereignis, dass B gewinnt

G: Spiel endet nicht.

$$\begin{aligned}
P(E) &= P(B) + P(ZZB) + P(ZZZZB) + \cdots \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{4^i} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
P(F) &= P(ZB) + P(ZZZB) + P(ZZZZZB) + \cdots \\
&= \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} \\
&= \frac{1}{4} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{4^i} = \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

oder (unter Anwendung der bedingten Wktn.)

$$
\begin{aligned}
P(F) &= P(F|B) \cdot P(B) + P(F|Z) \cdot P(Z) \\
&= 0 \cdot \frac{1}{2} + P(E) \cdot \frac{1}{2} \quad \textit{2. wird 1. Spieler} \\
P(E) &= P(E|B) \cdot P(B) + P(E|Z) \cdot P(Z) \\
&= 1 \cdot \frac{1}{2} + P(F) \cdot \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

lineares Gleichungssystem lösen $\rightarrow$ *obiges Ergebnis.*

Bsp. 28 (Ruin des Spielers) *Irrfahrt auf der Geraden mit 2 absorbierenden Zuständen,* a *und* $a+b$

a*: Startkapital Spieler A*

b*: Startkapital Spieler B*

E_k*: Ereignis, dass der Spieler, der* k *Euro besitzt, ruiniert wird.*

$$p_k = P(E_k)$$

A_{-1}*: Ereignis, im nächsten Schritt ein Euro zu verlieren.*

A_{+1}*: Ereignis, im nächsten Schritt ein Euro zu gewinnen.*

$$
\begin{aligned}
p_k &= P(E_k|A_{-1}) \cdot P(A_{-1}) + P(E_k|A_{+1}) \cdot P(A_{+1}) \quad \text{totale Wkt.} \\
&= \frac{1}{2}(p_{k-1} + p_{k+1})
\end{aligned}
$$

Daraus folgt:

$$
\begin{aligned}
2p_k &= p_{k+1} + p_{k-1} \\
p_{k+1} - p_k &= p_k - p_{k-1} =: d
\end{aligned}
$$

Offenbar: $p_0 = 1, \quad p_{a+b} = 0$

$$\begin{aligned}
p_k &= \underbrace{p_k - p_{k-1}}_{=d} + p_{k-1} - + \cdots + \underbrace{p_1 - p_0}_{=d} + p_0 \\
&= kd + 1 \\
p_{a+b} &= (a+b)d + 1 = 0 \Rightarrow d = -\frac{1}{a+b} \\
p_k &= 1 - \frac{k}{a+b} \\
p_a &= 1 - \frac{a}{a+b} = \frac{b}{a+b} \\
p_b &= \frac{a}{a+b}
\end{aligned}$$

4 Klassische Wahrscheinlichkeitsräume

4.1 Binomiale Wahrscheinlichkeiten

Wir betrachten Versuche mit zwei möglichen Ausgängen:
A (gut) und $\overline{A}$ (schlecht).

$$\begin{aligned}
\Omega &= \{A, \overline{A}\} \\
&= \{\text{„gut“}, \text{„schlecht“}\} \\
\mathcal{E} &= \{\emptyset, A, \overline{A}, \Omega\} \\
P(A) &= p \\
P(\overline{A}) &= q = 1 - p
\end{aligned}$$

Beispiele:

Münzwurf: $p = \frac{1}{2}$
Würfeln: $p = \frac{1}{6}$
Qualitätskontrolle: $p \cdot 100\%$ die Ausschußquote.

2–malige Durchführung (unabhängig voneinander):

Elementarereignisse:

$$(A, A), (A, \overline{A}), (\overline{A}, A), (\overline{A}, \overline{A}).$$

mit den Wahrscheinlichkeiten

$$\begin{aligned}
P((A, A)) &= p^2 \\
P((A, \overline{A})) &= p \cdot (1-p) \\
P((\overline{A}, A)) &= p \cdot (1-p) \\
P((\overline{A}, \overline{A})) &= (1-p)^2
\end{aligned}$$

B_k: Ereignis, daß A k–mal auftritt, wobei $k = 0, 1, 2$.

$$\begin{aligned}
P(B_0) &= (1-p)^2 \\
P(B_1) &= 2 \cdot (p \cdot (1-p)) \\
P(B_2) &= p^2
\end{aligned}$$

Man kann leicht überprüfen, daß allgemein gilt:

$$P(B_k) = \binom{2}{k} p^k (1-p)^{2-k}.$$

zweifaches BERNOULLI–Schema.

n–malige Durchführung: Analog zum vorigen Experiment sei jetzt B_k das Ereignis, daß A genau k–mal auftritt. Jetzt $k = 0, \ldots, n$.

analog zu oben:

$$\boxed{P(B_k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.}$$

<u>Formel für das n–fache BERNOULLI–Schema</u>.

Bezeichnung: <u>$\mathrm{B}(p, n)$</u> oder auch $Bi(p, n)$

Die Wahrscheinlichkeiten $P(B_k)$ bezeichnen wir auch als

Binomialwahrscheinlichkeiten.

Offenbar:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n} P(B_i) &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \\ &= (p+1-p)^n \\ &= 1\end{aligned}$$

Bsp. 29 *Wir betrachten das Experiment, bei dem fünfmal ein Münze geworfen wird.*

A *bezeichne das Ereignis, daß bei einem Wurf „Zahl" fällt,*

$$P(A) = p = \tfrac{1}{2}$$

B_3*: Ereignis, daß* A *dreimal auftritt:*

$$\begin{aligned} P(B_3) &= \binom{5}{3} \left(\tfrac{1}{2}\right)^3 \left(1 - \tfrac{1}{2}\right)^{5-3} \\ &= \binom{5}{3} \left(\tfrac{1}{2}\right)^5 \\ &= \frac{5}{16}. \end{aligned}$$

4.2 Multinomiale Wahrscheinlichkeiten

Wir betrachten ein zufälliges Experiment mit den Ausgängen $A_1, A_2, \ldots, A_l$. Wir setzen

$$p_i = P(A_i), \qquad \sum_{i=1}^{l} p_i = 1.$$

Ein Beispiel ist das folgende Experiment:
Es sei ein Behälter mit k Kugeln in l verschiedenen Farben gegeben, wobei k_i Kugeln die Farbe i ($i = 1, \ldots, l$) besitzen,

$$\sum_{i=1}^{l} k_i = k.$$

Es soll die Wahrscheinlichkeit untersucht werden, mit der eine Kugel einer bestimmten Farbe aus dem Behälter entnommen wird:

$$P(\text{Kugel der Farbe } i) = p_i = \frac{k_i}{k}.$$

Das Experiment soll nun n–mal wiederholt werden.

$B_{n_1,n_2,\ldots,n_l}$: das Ereignis, daß die Ereignisse A_1 n_1–mal, A_2 n_2–mal, ..., und A_l n_l–mal eintreten.

$$P(B_{n_1,n_2,\ldots,n_l}) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_l!} \cdot p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot p_l^{n_l}.$$

Derartige Wahrscheinlichkeiten bezeichnen wir auch als <u>multinomiale Wahrscheinlichkeiten</u> (polynomiale Wktn.)

Vergleichen Sie:

$$(a_1 + \ldots + a_l)^n = \sum \frac{n!}{n_1! \cdots n_l!} a_1^{n_1} \cdots a_l^{n_l}$$

wobei die Summe über alle Tupel $(n_1, \ldots, n_l)$ gebildet wird mit $\sum_{i=1}^{l} n_i = n$.

Bsp. 30 *Bei einem Fragebogen wird (u.a.) nach dem Alter der befragten Personen gefragt. Das Alter ist in Klassen eingeteilt, 10-20, 21-40, 41-60, über 60 Jahre. Der Bevölkerungsanteil beträgt jeweils* p_i *für die* i*-te Altersklasse,*
$i = 1, \ldots, 4, \quad \sum_i p_i = 1.$

Es werden n=1000 Personen von einem Interviewer befragt.

Wie groß ist die Wkt., daß höchsten 10% *der befragten bis zu 20 Jahre, und außerdem bis zu* 10% *der Befragten älter als 60 Jahre alt waren?*

Sei $\mathbf{X}_i = (X_{i1}, X_{i2}, X_{i3}, X_{i4})$*, wobei* $X_{ij} = 1$ *falls Person* i *zur j-ten Altersklasse gehört, und* $X_{ij} = 0$ *sonst.*

Dann ist

$$\mathbf{X} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{X}_i =: (\mathbf{Y}_1, \ldots, \mathbf{Y}_4) \sim Mult(n, p_1, p_2, p_3, p_4)$$

und (sei $a := 100$*)*

$$\begin{aligned} P(Y_1, Y_4 \leq a) &= P(Y_1 \leq a, Y_2 + Y_3 = n - Y_1 - Y_4, Y_4 \leq a) \\ &= \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{a} P(Y_1 = i, Y_2 + Y_3 = n - i - j, Y_4 = j) \\ &= \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{a} \frac{n!}{i!j!(n-i-j)!} p_1^i p_4^j (p_2 + p_3)^{n-i-j} \end{aligned}$$

4.3 POISSON–Wahrscheinlichkeiten

Beispiele, bei denen POISSON–Wahrscheinlichkeiten auftreten, sind

- die Anzahl von Verkehrsunfällen in einem Ort in einem bestimmten Zeitintervall,
- die Ankünfte von Kunden an einem Schalter oder
- der radioaktive Zerfall von α–Teilchen.
- In einer Telefonzentrale wird ermittelt, wieviel Anrufe in einer bestimmten Zeiteinheit ankommen.

Elementarereignisse sind hier also zufällige Anzahlen.

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \ldots\} = \{„0“, „1“, \ldots, „n“, \ldots\}.$$

Das Ereignis ω_i ist z.B. das Ereignis, daß in einer Zeiteinheit genau i Anrufe eintreffen. Die Wahrscheinlichkeit dieses Elementarereignisses ist gegeben durch:

$$P(\omega_i) = \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}.$$

λ ist dabei ein noch unbestimmter Parameter. Er kann als mittlere Rate aufgefaßt werden. Diese Wahrscheinlichkeit bezeichnen wir als <u>POISSON–Wahrscheinlichkeit</u>. Für die

Wahrscheinlichkeit von Ω gilt dann:

$$\begin{aligned} P(\Omega) &= \sum_{i=0}^{\infty} P(\omega_i) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} \\ &= e^{-\lambda} \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!}}_{=e^{\lambda}} = 1 \end{aligned}$$

Wir werden später sehen, daß diese Verteilung “natürlich” ist.