3 Bedingte Wahrscheinlichkeit, Unabhängigkeit von Ereignissen

3.1 Einführung

Bsp. 19 (3-maliges Werfen einer Münze)

Menge der Elementarereignisse:

$$\Omega = \{zzz, zzw, zwz, wzz, zww, wzw, wwz, www\}.$$

$|\Omega| = 2^3 = 8 = N$ *Wir definieren zwei Ereignisse:*

A: *Das Wappen fällt genau einmal, d.h.:*

$$A = \{zzw, zwz, wzz\}.$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{N} = \frac{3}{8}.$$

B: *Die Anzahl der Wappenwürfe ist ungerade,d.h.:*

$$B = \{zzw, zwz, wzz, www\}.$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{N} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

Wir nehmen jetzt an, das Ereignis B sei bereits eingetreten. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß unter dieser Bedingung das Ereignis A eintritt? Offenbar $A \subset B$. Bei diesem Experiment ist die Menge der Elementarereignisse die Menge B. Damit gilt $N = 4$. Folglich erhalten wir:

$$P(A, \textit{falls } B \textit{ bereits eingetreten ist}) = P(A/B) = \frac{3}{4}.$$

Def. 9 *Es seien* $A, B \in \mathcal{E}$ *zwei zufällige Ereignisse und es gelte* $P(B) > 0$*. Dann wird*

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

als ***bedingte Wahrscheinlichkeit*** *von* A *unter der Bedingung* B *bezeichnet.*

Bem.: Oft wird auch die folgende Bezeichnung verwendet:

$$P_B(A) := P(A/B).$$

W.Kössler, Humboldt-Universität zu Berlin

Bem.: Wir unterscheiden folgende Fälle:

1. $A \supseteq B$:
   Dann gilt: $P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1.$

2. $A \subseteq B$:
   Dann gilt: $P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)}.$

3. $A \cap B \neq \emptyset$ (teilweise Überschneidung):
   Dann gilt: $P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}.$

Def. 10 *Zwei Ereignisse $A, B \in \mathcal{E}$ heißen* <u>*unabhängig*</u>*, wenn gilt:*

$$P(A/B) = P(A).$$

Bem.: Für zwei unabhängige Ereignisse gilt:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Bsp. 20 (Skatblatt) *Skatspiel mit 32 Karten. Daraus wird eine Karte gezogen. (*$N = |\Omega| = 32$*).*
Wir betrachten die beiden folgenden zufälligen Ereignisse:

A: *Ziehen eines Königs.*

$$P(A) = \frac{n(A)}{N} = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}.$$

B: *Ziehen einer Herzkarte.*

$$P(B) = \frac{n(B)}{N} = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}.$$

Sind diese beiden Ereignisse voneinander unabhängig?

Offenbar $P(B) > 0$. Es sei eine Herzkarte gezogen worden (Ereignis B also eingetreten). Wahrscheinlichkeit, daß dann der Herzkönig gezogen wurde:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{32}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{8} = P(A).$$

Folglich sind nach Definition 10 die Ereignisse A und B voneinander unabhängig.

Satz 4 *Es seien* $A, B \in \mathcal{E}$ *zwei Ereignisse, wobei* $P(B) > 0$ *gelte. Dann genügt die bedingte Wahrscheinlichkeit* P_B *den* KOLMOGOROFF*–Axiomen. D.h. das Tripel* $(\Omega, \mathcal{E}, P_B)$ *ist ein Wahrscheinlichkeitsraum.*

Beweis: Wir zeigen stellvertretend Axiom 2. Es gilt:

$$\begin{aligned} P_B(\Omega) &= P(\Omega/B) \\ &= \frac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1 \end{aligned}$$

Die anderen beiden Axiome (vgl. Definition 6) sind ebenfalls erfüllt. $\square$

Satz 5 *Es seien* $A, B, C \in \mathcal{E}$ *drei Ereignisse. Dann gilt:*

$$P_B(A/C) = P(A/B \cap C).$$

Beweis: Es gilt:

$$\begin{aligned}
P_B(A/C) &= \frac{P_B(A \cap C)}{P_B(C)} \\
&= \frac{P(A \cap C/B)}{P(C/B)} \\
&= \frac{P(A \cap B \cap C) \cdot P(B)}{P(B) \cdot P(B \cap C)} \\
&= \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(B \cap C)} \\
&= P(A/B \cap C)
\end{aligned}$$

$\square$

Lemma 6 *Es seien* $A, B \in \mathcal{E}$ *zwei unabhängige Ereignisse. Dann sind die Ereignisse* A *und* $\overline{B}$ *ebenfalls unabhängig. Gleiches gilt für die Ereignisse* $\overline{A}$ *und* B *sowie für* $\overline{A}$ *und* $\overline{B}$.

Beweis: Wir zeigen die Aussage am Beispiel der Ereignisse

A und $\overline{B}$. Es gilt:

$$\begin{aligned}
P(A/\overline{B}) &= \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} \\
&= \frac{P(A \setminus (A \cap B))}{1 - P(B)} \quad \text{(Folgerung 2.1))} \\
&= \frac{P(A) - P(A \cap B)}{1 - P(B)} \quad \text{(Folgerung 2.3b))} \\
&= \frac{P(A) - P(A)P(B)}{1 - P(B)} \\
&= \frac{P(A)(1 - P(B))}{1 - P(B)} \\
&= P(A)
\end{aligned}$$

Diese beiden Ereignisse sind folglich unabhängig.

Zusammenfassend gilt

$$
\begin{aligned}
P(A/B) = P(A) \quad &\Longleftrightarrow \quad P(A/\overline{B}) = P(A) \\
&\Longleftrightarrow \quad P(\overline{A}/\overline{B}) = P(\overline{A}) \\
&\Longleftrightarrow \quad P(\overline{A}/B) = P(\overline{A})
\end{aligned}
$$

$\square$

3.2 Satz der Totalen Wahrscheinlichkeit

Def. 11 *Es sei* $(\Omega, \mathcal{E}, P)$ *ein Wahrscheinlichkeitsraum. Eine Folge von Ereignissen*

$$\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \ (A_n \in \mathcal{E}, \forall n \in \mathbb{N})$$

heißt vollständig (oder ausschöpfend), falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \Omega$;
2. $A_i \cap A_j = \emptyset$, *für alle* $i \neq j$.

Satz 7 *Es sei* $A_1, A_2, \ldots$ *eine vollständige Folge von Ereignissen. Weiterhin sei* B *ein beliebiges Ereignis und es gelte* $P(A_i) \neq 0$ *für alle* i *. Dann gilt:*

$$P(B) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B|A_i)P(A_i).$$

Dieser Ausdruck heißt

Formel der totalen Wahrscheinlichkeit.

Beweis: Aus $B = B \cap (\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \bigcup_{i=1}^{\infty}(B \cap A_i)$ folgt (da die $(B \cap A_i)$ ebenfalls unvereinbar sind):

$$
\begin{aligned}
P(B) &= P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}(B \cap A_i)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} P(B \cap A_i) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} P(B|A_i)P(A_i)
\end{aligned}
$$

$\square$

Bsp. 21 (Binärkanal)

Bei der Übertragung auf einem binären kanal kommen die Zeichen ‘0’ und ‘1’ im Verhältnis 3:4 vor.

Ein ‘0’ wird mit Wkt. von 0.2 fehlerhaft übertragen

Ein ‘1’ wird mit Wkt. von 0.3 fehlerhaft übertragen

ges.: Wkt. für eine fehlerhafte Übertragung

Wkt., dass ein ‘0’ empfangen wird.

Ereignisse:

S_0: *‘0’ wird gesendet,* $P(S_0) = \frac{3}{7}$

S_1: *‘1’ wird gesendet,* $P(S_1) = \frac{4}{7}$

E_0: *‘0’ wird empfangen*

E_1: *‘1’ wird empfangen*

$$P(E_1|S_0) = 0.2, \qquad P(E_0|S_1) = 0.3$$

F: Ereignis, das ein Übertragungsfehler vorliegt

$$\begin{aligned} P(F) &= P(E_1, S_0) + P(E_0, S_1) \\ &= P(E_1|S_0) \cdot P(S_0) + P(E_0|S_1) \cdot P(S_1) \\ &= \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{7} + \frac{3}{10} \cdot \frac{4}{7} = \frac{18}{70} \approx 0.2571 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(E_0) &= P(E_0|S_0) \cdot P(S_0) + P(E_0|S_1) \cdot P(S_1) \\ &= \frac{8}{10} \cdot \frac{3}{7} + \frac{3}{10} \cdot \frac{4}{7} = \frac{18}{35} \approx 0.5143 \end{aligned}$$

3.3 Satz von Bayes

Gegeben: $P(A_i)$ und $P(A/A_i)$, ($i \in \mathbb{N}$).

Gesucht: $P(A_i/A)$.

Unter Benutzung der Definition der bedingte Wahrscheinlichkeit und der Formel für die totale Wahrscheinlichkeit erhalten wir:

$$\begin{aligned} P(A_i/A) &= \frac{P(A_i \cap A)}{P(A)} \\ &= \frac{P(A_i) \cdot P(A/A_i)}{P(A)} \\ &= \frac{P(A_i) \cdot P(A/A_i)}{\sum\limits_{j=1}^{\infty} (P(A/A_j) \cdot P(A_j))} \quad \text{(Formel der totalen Wkt)} \end{aligned}$$

Der Ausdruck

$$P(A_i/A) = \frac{P(A_i) \cdot P(A/A_i)}{\sum\limits_{j=1}^{\infty} (P(A/A_j) \cdot P(A_j))}$$

heißt <u>Formel von BAYES</u> (bzw. <u>Theorem von BAYES</u>).

Bsp. 22 (Binärkanal, Fortsetzung)

$$\begin{aligned}
P(S_0|E_0) &= \frac{P(E_0|S_0)P(S_0)}{P(E_0|S_0)P(S_0) + P(E_0|S_1)P(S_1)} \\
&= \frac{\frac{8}{10}\cdot\frac{3}{7}}{\frac{8}{10}\cdot\frac{3}{7} + \frac{3}{10}\cdot\frac{4}{7}} = \frac{24}{24+12} = \frac{2}{3} \\
P(S_1|E_1) &= \frac{P(E_1|S_1)P(S_1)}{P(E_1|S_0)P(S_0) + P(E_1|S_1)P(S_1)} \\
&= \frac{\frac{7}{10}\cdot\frac{4}{7}}{\frac{2}{10}\cdot\frac{3}{7} + \frac{7}{10}\cdot\frac{4}{7}} = \frac{28}{28+6} = \frac{14}{17}
\end{aligned}$$