Bsp. 120 Ein-Prozessorsystem mit mehreren E/A-Einheiten.

Ein Programm. das sich in der CPU befindet, geht mit Wkt. q_i *in die I/O-Einheit* i *über, oder endet (mit Wkt.* q_0*) und macht Platz für ein neues Programm in der CPU.*

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} q_0 & q_1 & \ldots & q_m \\ 1 & 0 & \ldots & 0 \\ .. & & & \\ 1 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M}_2 = \mathbf{M}^2 = \begin{pmatrix} q_0^2 + \sum_{i=1}^m q_i & q_0 q_1 & \ldots & q_0 q_m \\ q_0 & q_1 & \ldots & q_m \\ .. & & & \\ q_0 & q_1 & \ldots & q_m \end{pmatrix}$$

also $p_{ij}(2) > 0 \quad \forall i, j \Longrightarrow \{X_t\}$ *irreduzibel.*

$$(\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_m) \cdot \mathbf{M} = \begin{pmatrix} \pi_0 q_0 + \sum_{i=1}^{m} \pi_i \\ \pi_0 q_1 \\ .. \\ \pi_0 q_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi_0 \\ \pi_1 \\ .. \\ \pi_m \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
q_0\pi_0 + 1 - \pi_0 &= \pi_0 \\
2\pi_0 - q_0\pi_0 &= 1 \\
\pi_0(2 - q_0) &= 1 \\
\pi_0 &= \frac{1}{2 - q_0} \\
\pi_i &= \pi_0 q_i = \frac{q_i}{2 - q_0}, \quad i = 1, \ldots, m
\end{aligned}$$

$$\sum_{i=0}^{m} \pi_i = \frac{1}{2 - q_0} + \sum_{i=1}^{m} \frac{q_i}{2 - q_0} = \frac{1 - q_0}{2 - q_0} + \frac{1}{2 - q_0} = 1.$$

Bsp. 121 (Multiprozessorsystem)

Ein "Job" (oder ein Prozessor) greift zufällig auf bestimmte Speichermodule zu.

Er wird bedient, wenn der angeforderte Speichermodul frei ist, sonst muß er warten.

Die Zeit für einen Speicherzugriff sei konstant und für alle Speichermodule gleich.

Neue Anforderungen beginnen sofort nach Abarbeitung der alten.

m *"Jobs",* n *Speichermodule.*

N_i: *Anzahl der "Jobs" (Wartenden) am Speichermodul* M_i
(Bedienplätze) (wartend oder in Arbeit),
$i = 1, \ldots, n$

Zustandsraum

$$S = \{(N_1, N_2, \ldots, N_n) \in \mathbb{Z}^+ : \sum_i N_i = m\}$$

Bsp.: $m = n = 2$: $S = \{(1,1), (0,2), (2,0)\}$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2q_1q_2 & q_2^2 & q_1^2 \\ q_1 & q_2 & 0 \\ q_2 & 0 & q_1 \end{pmatrix}$$

Stationäre Verteilung:

$$\boldsymbol{\pi}\mathrm{M} = \boldsymbol{\pi}$$

$$(\pi_1, \pi_2, \pi_3) \begin{pmatrix} 2q_1q_2 & q_2^2 & q_1^2 \\ q_1 & q_2 & 0 \\ q_2 & 0 & q_1 \end{pmatrix} = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$$

$$\begin{aligned} \pi_1 \cdot 2q_1q_2 + \pi_2 q_1 + \pi_3 q_2 &= \pi_1 \\ \pi_1 \cdot q_2^2 + \pi_2 \cdot q_2 + \pi_3 \cdot 0 &= \pi_2 \\ \pi_1 \cdot q_1^2 + \pi_2 \cdot 0 + \pi_3 \cdot q_1 &= \pi_3 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\pi_1 \cdot q_2^2 &= \pi_2(1-q_2)\\ \pi_1 \cdot q_1^2 &= \pi_3(1-q_1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\pi_2 &= \frac{q_2^2}{1-q_2}\cdot \pi_1\\ \pi_3 &= \frac{q_1^2}{1-q_1}\cdot \pi_1\\ \pi_1 &= \frac{1}{1+\frac{q_1^2}{1-q_1}+\frac{q_2^2}{1-q_2}} = \frac{q_1q_2}{1-2q_1q_2}\end{aligned}$$

$\mathbf{B}$: *Anzahl der erledigten Speicherplatz-Anforderungen/Zyklus im stationären Zustand:*

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}(\mathbf{B}|(1,1)) &= 2 \\
\mathbf{E}(\mathbf{B}|(2,0)) &= 1 \\
\mathbf{E}(\mathbf{B}|(0,2)) &= 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{EB} &= 2\cdot\pi_1 + 1\cdot\pi_2 + 1\cdot\pi_3 \\
&= \Big(2 + \frac{q_1^2}{1-q_1} + \frac{q_2^2}{1-q_2}\Big)\pi_1 \\
&= \frac{1-q_1q_2}{1-2q_1q_2}
\end{aligned}
$$

$q_1 = q_2 = \frac{1}{2}$: $\mathbf{EB} = \frac{3}{2}$. maximal möglicher Wert.

Bsp. 122 *Das Betriebssystem schalte zwischen folgenden Zuständen:*

1:	*Benutzerprogramm aktiv*
2:	*Scheduler aktiv*
3:	*Operatorkommunikation aktiv*
4:	*Nullprozess*

$$M = \begin{pmatrix} 0.90 & 0.04 & 0.05 & 0.01 \\ 0.94 & 0.00 & 0.05 & 0.01 \\ 0.85 & 0.10 & 0.04 & 0.01 \\ 0.75 & 0.00 & 0.05 & 0.20 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{\pi} = (0.897, 0.041, 0.05, 0.012)$ *ist stationäre Verteilung. (ÜA)*

16.5 Klassische Beispiele

16.5.1 Ruin des Spielers

Zwei Spieler werfen abwechselnd eine (nicht manipulierte) Münze. Fällt Kopf, so erhält Spieler A den vereinbarten Einsatz (1 Euro) von Spieler B, anderenfalls erhält Spieler B denselben Einsatz von Spieler A. Zu Beginn des Spieles besitzt A a Euro und B b Euro. Das Spiel wird solange fortgesetzt, bis einer der beiden Spieler kein Geld mehr besitzt.

Zustände: $S = \{0, 1, \ldots, N\}$, $\quad N = a + b$.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ .. & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{2} \;\; 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Frage: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit des Ruins von Spieler A bzw. B?

Sei E_i das Ereignis, daß ein Spieler, der genau i Euro besitzt, ruiniert wird und sei $p_i = P(E_i)$.

1. Die Übergangswktn. sind

$$p_{i,i+1} = p_{i,i-1} = \frac{1}{2}$$

und offenbar ist $p_0 = 1$ und $p_N = 0$.

2. Satz der totalen Wkt.: Es gilt für alle $i, i = 0, \ldots, N$:

$$\begin{aligned} p_i = P(E_i) \quad &= \quad P(E_i|\text{Übergang nach } i\text{-1}) \cdot p_{i,i-1} + \\ & \qquad P(E_i|\text{ Übergang nach } i\text{+1}) \cdot p_{i,i-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_i &= \frac{1}{2}p_{i-1} + \frac{1}{2}p_{i+1} \\
2p_i &= p_{i-1} + p_{i+1} \\
p_i - p_{i-1} &= p_{i+1} - p_i =: d \\
p_i - p_0 &= \underbrace{p_i - p_{i-1}}_{=d} + \underbrace{p_{i-1} - p_{i-2}}_{=d} + p_{i-2} - + \cdots - p_1 + p_1 - p_0 \\
p_i - 1 &= i \cdot d \\
p_i &= 1 + i \cdot d, \quad \text{insbesondere} \\
p_N &= 1 + N \cdot d \\
d &= -\frac{1}{N}, \quad N = a + b
\end{aligned}$$

3.

$$p_i = 1 - i \cdot \frac{1}{a+b} = \frac{a+b-i}{a+b}$$

$$p_a = \frac{b}{a+b}, \quad p_b = \frac{a}{a+b}$$

4. $a = b : p_a = p_b = \frac{1}{2}$

$a >> b : p_a \approx 0, p_b \approx 1.$

3 Klassen von Zuständen:

$T = \{1, \ldots, N-1\}$: transiente Zustände

$S_1 = \{0\}$, $S_2 = \{N\}$: absorbierende Zustände

$T^c := S_1 \cup S_2$

Umordnung von **M**:

$$\mathbf{M}^* = \begin{pmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{R} \\ \mathbf{0} & \mathbf{P} \end{pmatrix}$$

$\mathbf{Q} = (p_{ij}; i, j \in T\}$

$\mathbf{R} = (p_{ik}; i \in T, k \in T^c\}$

Übergang von $i \in T$ nach $k \in T^c$ einschrittig oder nach Übergängen innerhalb von T und anschließendem Übergang von T nach k.

u_{ik}: Wkt. von $i \in T$ (irgendwann) nach $k \in T^c$ zu kommen

$$u_{ik} = \sum_{j \in T} Q_{ij} u_{jk} + p_{ik}, \quad Q_{ij} = p_{ij}$$

$\mathbf{U} = \left(U_{ik}\right)_{i \in T, k \in T^c}$

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= \mathbf{Q}\mathbf{U} + \mathbf{R}, \quad \text{Rekursion} \\ \mathbf{U} &= (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}\mathbf{R} \\ (\mathbf{I} - \mathbf{Q})\mathbf{U} &= \mathbf{R} \end{aligned}$$

Die Matrix $(\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}$ existiert, falls T endlich!

Lit.: Resnick, S.I. Adventures in Stochastic Processes,
Birkhäuser 1992.

hier:

$$(\mathbf{I} - \mathbf{Q})\mathbf{U} = \mathbf{R}$$

$$
\begin{pmatrix}
1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
-\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & \cdots & 0 & 0 \\
.. & & & & & & \\
 & & & & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\
 & & & & 0 & -\frac{1}{2} & 1
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
u_{10} & u_{1N} \\
u_{20} & u_{2N} \\
u_{30} & u_{3N} \\
.. & \\
u_{N-2,0} & u_{N-2,N} \\
u_{N-1,0} & u_{N-1,N}
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
\frac{1}{2} & 0 \\
0 & 0 \\
0 & 0 \\
.. & \\
0 & 0 \\
0 & \frac{1}{2}
\end{pmatrix}
$$

$$
\begin{array}{cccccccl}
u_{1,0} & -\frac{1}{2}u_{2,0} & & & & & = & \frac{1}{2} \\
-\frac{1}{2}u_{1,0} & +u_{2,0} & -\frac{1}{2}u_{3,0} & & & & = & 0 \\
 & -\frac{1}{2}u_{2,0} & +u_{3,0} & -\frac{1}{2}u_{4,0} & & & = & 0 \\
 & & \ddots & & & & & \\
 & & -\frac{1}{2}u_{N-3,0} & +u_{N-2,0} & -\frac{1}{2}u_{N-1,0} & & = & 0 \\
 & & & -\frac{1}{2}u_{N-2,0} & +u_{N-1,0} & & = & 0
\end{array}
$$

$N-1.$ Gleichung (1. **U**-Spalte)

$$u_{N-1,0} = \frac{1}{2}u_{N-2,0}$$

$N-2.$ Gleichung (1. **U**-Spalte)

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}u_{N-3,0} + u_{N-2,0} - \frac{1}{2}u_{N-1,0} &= 0 \\
u_{N-2,0} - \frac{1}{4}u_{N-2,0} &= \frac{1}{2}u_{N-3,0} \\
\frac{3}{4}u_{N-2,0} &= \frac{1}{2}u_{N-3,0} \\
u_{N-2,0} &= \frac{2}{3}u_{N-3,0}
\end{aligned}$$

$N-3$. Gleichung (1. **U**-Spalte)

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}u_{N-4,0}+u_{N-3,0}-\frac{1}{2}u_{N-2,0} &= 0\\
u_{N-3,0}-\frac{1}{3}u_{N-3,0} &= \frac{1}{2}u_{N-4,0}\\
\frac{2}{3}u_{N-3,0} &= \frac{1}{2}u_{N-4,0}\\
u_{N-3,0} &= \frac{3}{4}u_{N-4,0}
\end{aligned}$$

$N-i$. Gleichung (1. **U**-Spalte)

$$u_{N-i,0}=\frac{i}{i+1}u_{N-(i+1),0},\quad i=1,\ldots,N-2$$

1. Gleichung:

$$u_{1,0} - \frac{1}{2}u_{2,0} = \frac{1}{2}$$

Da

$$u_{2,0} = u_{N-(N-2),0} = \frac{N-2}{N-1}u_{N-(N-1),0} = \frac{N-2}{N-1}u_{1,0}$$

folgt

$$\begin{aligned}
u_{1,0} - \frac{1}{2}\frac{N-2}{N-1}u_{1,0} &= \frac{1}{2}\\
u_{1,0}(1 - \frac{N-2}{2(N-1)} &= \frac{1}{2}\\
u_{1,0}\frac{N}{2(N-1)} &= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
u_{1,0} &= \frac{N-1}{N} = 1 - \frac{1}{N} \\
u_{2,0} &= \frac{N-2}{N-1} u_{1,0} = \frac{N-2}{N-1} \cdot \frac{N-1}{N} = \frac{N-2}{N} = 1 - \frac{2}{N} \\
u_{N-i,0} &= \frac{N-i}{N} = 1 - \frac{i}{N}, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1.
\end{aligned}
$$

16.5.2 Irrfahrten

Bsp. 123 (Irrfahrt auf der Geraden)

Zustände: $k \in \mathbb{Z}$, *Anfangszustand:* 0

Bewegung: ein Schritt nach rechts mit Wkt. p *oder nach links mit Wkt.* $q = 1 - p$

Übergangswktn.:

$$p_{k,k+1} = p = 1 - p_{k,k-1}; \quad p_{ij} = 0, \textit{falls} |i-j| \neq 1$$

$$M = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & & \\ & & 0 & q & 0 & p & 0 & & \\ & & & 0 & q & 0 & p & 0 & \\ & & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & & & & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

$A_{n,k}$: *Ereignis, nach n Schritten im Zustand k zu sein*

$$D_{n,k} := P(A_{n,k})$$

Satz der totalen Wkt.:

$$\begin{aligned}
D_{n,k} &= P(A_{n,k}) \quad \Omega_{n-1} = A_{n-1,k-1} \cup A_{n-1,k+1} \\
&= P(A_{n,k}|A_{n-1,k-1}) \cdot P(A_{n-1,k-1}) + \\
&\quad P(A_{n,k}|A_{n-1,k+1}) \cdot P(A_{n-1,k+1}) \\
&= pD_{n-1,k-1} + qD_{n-1,k+1}
\end{aligned}$$

$$k = -n, \ldots, n$$

Explizite Formel:

$$D_{n,k} = \begin{cases} \binom{n}{\frac{n+k}{2}} p^{\frac{n+k}{2}} q^{\frac{n-k}{2}} & \text{falls } k = -n, -n+2, \ldots, n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

In den Zustand k gelangt man in genau n Schritten, indem man $\frac{n+k}{2}$ mal nach rechts und $\frac{n-k}{2}$ mal nach links geht.
Es gibt genau $\binom{n}{\frac{n+k}{2}}$ Möglichkeiten die Zeitpunkte für einen Schritt nach rechts auszuwählen.

Insbesondere

$$D_{2n,0} = \binom{2n}{n} p^n q^n.$$

Abschätzung: Stirling'sche Formel

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{1}{12n}}.$$

Damit

$$\begin{aligned}
\binom{2n}{n} &= \frac{(2n)!}{n!n!} \\
&\sim \frac{\sqrt{2\pi 2n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{\left(\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^{n}\right)^{2}} \frac{e^{\frac{1}{12\cdot 2n}}}{\left(e^{\frac{1}{12n}}\right)^{2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi n}} 2^{2n} e^{-\frac{3}{4n}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p = q = \frac{1}{2}: \quad & D_{2n,0} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}} e^{-\frac{3}{4n}} \\
p \neq q: \quad & D_{2n,0} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}} 4^n p^n (1-p)^n e^{-\frac{3}{4}n}.
\end{aligned}$$

Mittlere Rückkehrhäufigkeit:

$$\sum_{n=1}^{\infty} D_{2n,0} \sim \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi n}} = \infty & (p = \frac{1}{2}) \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4p(1-p))^n}{\sqrt{\pi n}} < \infty & (p \neq \frac{1}{2}) \end{cases}$$

Der Zustand “0” (und die anderen Zustände auch) ist also

rekurrent, falls $p = q = \frac{1}{2}$

transient, falls $p \neq q$

nullrekurrent, falls $p = q = \frac{1}{2}$ da $D_{2n,0} \to_{n\to\infty} 0$.

$$D_{2n,0} = p_{00}(n) \to 0 \Rightarrow \mu_i = \infty$$

Bsp. 124 (symmetrische Irrfahrt in der Ebene) *Zustände:* $(k, l) \in \mathbb{Z}^2$, *Anfangszustand:* $(0, 0)$
Bewegung: Punkt (X, Y)

X: *ein Schritt nach rechts mit Wkt.* $p = \frac{1}{2}$ *oder nach links mit Wkt.* $q = \frac{1}{2}$

Y: *ein Schritt nach oben mit Wkt.* p *oder nach unten mit Wkt.* $q = \frac{1}{2}$

Die ZV X *und* Y *sind unabhängig.*

$B_{n,k}$: *Ereignis, nach* n *Schritten im Zustand* k *zu sein*

$$E_{n,k} := P(B_{n,k})$$

$$E_{2n,0} = P(X_{2n,0} = 0 \wedge Y_{2n,0} = 0) = D^2_{2n,0} \sim \Big(\frac{1}{\sqrt{\pi n}}\Big)^2$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} E_{2n,0} \quad \sim \quad \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = \infty$$

$$\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} \quad \sim \quad \frac{\ln N}{\pi} \rightarrow_{N\to\infty} \infty.$$

Der Zustand "0" (und die anderen Zustände auch) ist also rekurrent, *falls* $p = q = \frac{1}{2}$

Bsp. 125 (symmetrische Irrfahrt im Raum)

Zustände: $(j, k, l) \in \mathbb{Z}^3$, *Anfangszustand:* $(0, 0, 0)$

Bewegung: Punkt (X, Y, Z)

X*: ein Schritt nach rechts mit Wkt.* $p = \frac{1}{2}$ *oder nach links mit Wkt.* $q = 1 - p$

Y*: ein Schritt nach oben mit Wkt.* p *oder nach unten mit Wkt.* $q = 1 - p$

Z*: ein Schritt nach hinten mit Wkt.* p *oder nach vorn mit Wkt.* $q = 1 - p$

Die ZV X, Y *und* Z *sind unabhängig.*

$C_{n,k}$: *Ereignis, nach* n *Schritten im Zustand* k.

$$F_{n,k} := P(C_{n,k})$$

$$F_{2n,0} = P(X_{2n,0} = 0, Y_{2n,0} = 0, Z_{2n,0} = 0) = D_{2n,0}^3 \sim (\frac{1}{\sqrt{\pi n}})^3$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_{2n,0} \quad \sim \quad \frac{1}{(\pi)^{3/2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} < \infty$$

Der Zustand “0” (und die anderen Zustände auch) ist also *transient*.

Bsp. 126 (Irrfahrt auf der Geraden mit Barriere)

Zustände: $k \in \mathbb{N}$, *Anfangszustand:* 0

Bewegung: ein Schritt nach rechts mit Wkt. p *oder*
nach links mit Wkt. $q = 1 - p$
von $k = 0$ *aus geht es nur nach rechts*
$0 < p, q < 1.$

Übergangswktn.:

$$\begin{aligned} p_{k,k+1} &= p = 1 - p_{k,k-1} \\ p_{ij} &= 0, \quad \textit{falls } |i-j| \neq 1 \quad \textit{und} \quad k \neq 0 \\ p_{01} &= 1 \end{aligned}$$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & & & \\ q & 0 & p & 0 & & & \\ 0 & q & 0 & p & 0 & & \\ & & & . & . & . & \\ & & & & . & . & . \end{pmatrix}$$

Wir klassifizieren die Zustände: alle transient, wenn $p > q$

alle nullrekurrent, wenn $p = q = \frac{1}{2}$

alle positiv rekurrent, falls $q > p$.

Alle Zustände haben die Periode 2.

Die ersten beiden Fälle sind analog zur Irrfahrt ohne Barriere

Der dritte Fall erfordert etwas Rechenaufwand.

Wir bestimmen die stationäre Verteilung $\boldsymbol{\pi}$ im Fall $p < q$.

Sie ist (falls sie ex.) Lösung von

$$\mathbf{M}^T \cdot \boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}$$

$$\begin{aligned}
\pi_0 &= q\pi_1 \\
\pi_1 &= \pi_0 + q\pi_2 \\
\pi_i &= p\pi_{i-1} + q\pi_{i+1}, \quad i \geq 2 \\
1 &= \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j
\end{aligned}$$

Behauptung:

$$\pi_i = \frac{p^{i-1}}{q^i}\pi_0, \quad i \geq 1$$

Beweis: vollständige Induktion.

$$
\begin{aligned}
1 &= \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = \pi_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{p^{i-1}}{q^i} \pi_0 \\
&= \pi_0 + \frac{1}{q} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{p^i}{q^i} \pi_0 = \pi_0 + \frac{1}{q} \frac{1}{1 - \frac{p}{q}} \pi_0 \\
&= \pi_0 + \frac{1}{q-p} \pi_0 \\
\pi_0 &= \frac{1}{1 + \frac{1}{q-p}} = \frac{q-p}{q-p+1} \\
\pi_i &= \frac{p^{i-1}}{q^i} \cdot \frac{q-p}{q-p+1}
\end{aligned}
$$

stationäre Verteilung