13 Grenzwertsätze

13.1 Das Gesetz der großen Zahlen

Der Erwartungswert einer zufälligen Variablen X ist in der Praxis meist nicht bekannt. Um ihn zu bestimmen, sammelt man Beobachtungen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ($n \in \mathbb{N}$) und bildet dann das arithmetische Mittel dieser Beobachtungen:

$$\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i =: \overline{X}_n$$

Dabei muß man jedoch beachten, daß die Beobachtungen $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig oder wenigstens unkorreliert sind.

Satz 43 (Schwaches Gesetz der großen Zahlen) *Es seien $X_1, \ldots, X_n$ unkorrelierte zufällige Variablen mit $\mu := \mathbf{E}X_i$ und $\sigma^2 := \operatorname{Var} X_i$ (für alle $i = 1, \ldots, n$). Dann gilt für alle $\varepsilon > 0$:*

$$\lim_{n\to\infty} P(|\overline{X}_n - \mu| > \varepsilon) = 0.$$

Beweis: Zum Beweis des Satzes verwenden wir die Ungleichung von TSCHEBYCHEW (vgl. Satz 38).

Da die Zufallsgrößen $X_1, \ldots, X_n$ unkorreliert sind, gilt

$$\begin{aligned}
\operatorname{Var} \overline{X} &= \operatorname{Var}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\cdot \operatorname{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \\
&= \frac{1}{n^2}\cdot \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Var}(X_i) = \frac{1}{n^2}\cdot n\cdot \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\overline{X} &= \mathbf{E}\left(\frac{1}{n}\cdot \sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\cdot \mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \\
&= \frac{1}{n}\cdot \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}X_i = \frac{1}{n}\cdot n\cdot \mu = \mu
\end{aligned}$$

Mittels der TSCHEBYCHEW–Ungleichung erhalten wir:

$$\begin{aligned}
P(|\overline{X}_n - \mu| > \varepsilon) &= P(|\overline{X} - \mathbf{E}\overline{X}| > \varepsilon) \\
&\leq \frac{\mathrm{Var}\,\overline{X}}{\varepsilon^2} \\
&= \frac{\sigma^2}{n \cdot \varepsilon^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0
\end{aligned}$$

$\square$

Bem. 19 *Aus dem Beweis erkennen wir, daß die Voraussetzungen etwas abgeschwächt werden können, anstelle* $\mathrm{Var}\,X_i = \sigma^2$ *genügt die Forderung*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum \mathrm{Var}\,X_i = 0.$$

Def. 45 *Wenn*

$$\lim_{n\to\infty} P(|Y_n - Y_0| > \varepsilon) = 0 \quad \forall \varepsilon > 0$$

dann heißt Y_0 *stochastischer Grenzwert der Folge* $\{Y_n\}$ *und man schreibt* $p - \lim Y_n = Y_0$.

Bsp. 81 *Es seien* $X_i \sim \mathrm{B}(1,p)$

$$X_i : \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}$$

Dann gilt:

$$\mu := \mathbf{E}X = \mathbf{E}X_i = 0 \cdot (1-p) + 1 \cdot p = p$$

und

$$
\begin{aligned}
\sigma^2 &:= \mathbf{E}(X-p)^2 \\
&= (0-p)^2 \cdot (1-p) + (1-p)^2 \cdot p \\
&= p^2 \cdot (1-p) + (1-p)^2 \cdot p \\
&= p^2 - p^3 + p - 2 \cdot p^2 + p^3 \\
&= p - p^2 \\
&= p \cdot (1-p)
\end{aligned}
$$

Nach dem schwachen Gesetz der großen Zahlen folgt:

$$
P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - p\right| > \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.
$$

Bsp. 82 *Es sei A ein Ereignis, $p = P(A)$ sei unbekannt. Zur Schätzung von p führen wir eine Reihe von unabhängigen Experimenten durch, bei denen A und $\overline{A}$ die einzig möglichen Ausgänge seien.*

n: $\#$ der Experimente, die durchgeführt werden.

$n(A)$: $\#$ Auftretens des Ereignisses A.

$$\hat{p}_n = \frac{n(A)}{n}$$

die relative Häufigkeit des Ereignisses A.

Frage: $\hat{p}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} p$?

Dazu definieren wir Zufallsgrößen X_i ($i = 1, \ldots, n$),

$$X_i := \begin{cases} 1 & \text{, } A \text{ im } i\text{–ten Experiment eintritt} \\ 0 & \text{, } A \text{ im } i\text{-ten Experiment nicht eintritt} \end{cases}$$

Dann gilt für alle $i = 1, \ldots, n$*:*

$$X_i \sim \mathrm{B}(1, p)$$

und $P(X_i = 1) = p$ *sowie* $P(X_i = 0) = 1 - p$.

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \operatorname{Var} X_i = p \cdot (1-p) \\ \mu &= \mathbf{E} X_i = p \end{aligned}$$

Wir definieren weiterhin:

$$\overline{X} := \tfrac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i = \tfrac{1}{n} \cdot n(A) = \hat{p}_n.$$

Wir wenden nun das schwache Gesetz der großen Zahlen an und erhalten:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} P(|\hat{p}_n - p| > \varepsilon) &= \lim_{n\to\infty} P(|\overline{X}_n - \mu| > \varepsilon) \\ &= 0, \qquad \forall \varepsilon > 0\end{aligned}$$

Folglich gilt: $\hat{p}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} p$.

Bem. 20 *Schätzungen* $\hat{p}_n$*, die gegen den zu schätzenden Parameter konvergieren heißen (schwach) konsistent.*

Satz 44 (Gesetz der Großen Zahlen) *Seien die Zufallsvariablen* $X_1, \ldots, X_n$ *identisch verteilt und* *unabhängig*, $\mathbf{E}|X_i| < \infty$, $\mathbf{E}X_i = \mu$. *Dann gilt*

$$P(\omega : \lim_{n\to\infty} \overline{X}_n = \mu) = 1.$$

Bem. 21 *Das Schwache Gesetz der Großen Zahlen lautet entsprechend: Seien die Zufallsvariablen* $X_1, \ldots, X_n$ *identisch verteilt,* $\mathbf{E}X_i = \mu$ *und* *unkorreliert* ($cov(X_i, X_j) = \sigma^2\delta_{ij}$). *Dann gilt*

$$\Rightarrow p - \lim \overline{X}_n = \mu.$$

Das Gesetz der großen Zahlen eignet sich also zum Schätzen von Erwartungswerten oder zur Approximation von Integralen.

Bsp. 83 *Sei* $X \sim F$ *mit Dichte* $f(x)$*, den Beobachtungen* $x_1, \ldots, x_n$ *und* $g(\cdot)$ *eine beliebige Funktion. Der Erwartungswert*

$$\mathbf{E}(g(X)) = \int g(x) f(x)\, dx$$

wird (falls er existiert) geschätzt durch

$$\hat{I} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} g(x_i)$$

Bsp. 84 *Ist* $f > 0$ *kann das Integral*

$$I = \int g(x)\,dx$$

(falls es existiert) geschätzt werden durch

$$\hat{I} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{g(x_i)}{f(x_i)}.$$

13.2 Der Satz von GLIVENKO–CANTELLI

Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige Beobachtungen mit

$$P(X_i < x) = F(x), \quad \forall i = 1, \ldots, n.$$

Die Verteilungsfunktion $F(x)$ soll durch die Funktion

$$F_n(x) := \frac{\#\{X_i :\, X_i < x, i=1,\ldots,n\}}{n}$$

approximiert werden.

Def. 46 *Seien* $X_1, \ldots, X_n$ *unkorreliert,* $X_i \sim F$*, und* $X_{(1)}, \ldots, X_{(n)}$*,* $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \ldots \leq X_{(n)}$ *die geordnete*

Stichprobe. Die Funktion

$$F_n(x) = \frac{\#\{X_i : X_i < x, i = 1, \ldots, n\}}{n}$$

$$= \begin{cases} 0 & \textit{falls} \quad x < X_{(1)} \\ \frac{i}{n} & \textit{falls} \quad X_{(i)} \leq x < X_{(i+1)} \\ 1 & \textit{falls} \quad X_{(n)} < x \end{cases}$$

heißt <u>empirische Verteilungsfunktion</u>.

`EDF.sas EDF_2.sas`

Satz 45 *Seien $X_1, \ldots, X_n$ unkorreliert. Es gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} P(|F_n(x) - F(x)| > \varepsilon) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Beweis: Wir definieren Zufallsgrößen Y_{ix} ($i = 1, \ldots, n$, $x \in \mathbb{R}$) durch:

$$Y_{ix} = \begin{cases} 1 & \text{, falls } X_i < x \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$$

Dann gilt offensichtlich für alle $i = 1, \ldots, n$ und $x \in \mathbb{R}$:

$$Y_{ix} : \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - F(x) & F(x) \end{pmatrix}$$

D.h. $Y_{ix} \sim \mathrm{B}(1, F(x))$. Sei, für alle $x \in \mathbb{R}$,

$$\overline{Y}_x := \tfrac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_{ix}.$$

Vergleichen wir die Zufallsgrößen $F_n(x)$ und $\overline{Y}_x$:

$$\overline{Y}_x = F_n(x).$$

Aus Beispiel 81 folgt, $\mu := \mathbf{E}Y_{ix} = F(x)$. Deshalb folgt aus dem schwachen Gesetz der großen Zahlen:

$$\lim_{n\to\infty} P(|\overline{Y}_x - \mu| > \varepsilon) = 0, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

D.h. für alle $\varepsilon > 0$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} P(|F_n(x) - F(x)| > \varepsilon) = 0$$

$\square$

Verschärfung:

Satz 46 (Satz von GLIVENKO–CANTELLI**)** *Es seien* $X_1, \ldots, X_n$ *unabhängige zufällige Variablen. Dann gilt:*

$$P\left(\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |F_n(x) - F(x)| = 0\right) = 1.$$

Dieser Satz wird auch oft als der Hauptsatz der Statistik bezeichnet.

13.3 Konvergenz von Folgen zufälliger Variablen

Wir betrachten in diesem Abschnitt eine Reihe von Konvergenzbegriffen, die ersten beiden haben wir schon am Anfang des Kapitels kennengelernt.

Def. 47 *Eine Folge* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *zufälliger Variablen* <u>*konvergiert stochastisch*</u> *(in Wkt.) gegen eine zufällige Variable* X*, falls für alle* $\varepsilon > 0$ *gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) = 0.$$

Wir bezeichnen dann: p–lim $X_n = X$.

X *heißt stochastischer Grenzwert der Folge* $\{X_n\}$.

Def. 48 *Eine Folge* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *zufälliger Variablen heißt* *fast sicher konvergent* *gegen eine zufällige Variable* X*, falls gilt:*

$$P\left(\left\{\omega\colon \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\right\}\right) = 1.$$

Wir bezeichnen dann: $\lim X_n = X$ f.s.[a]

X heißt f.s. Grenzwert der Folge $\{X_n\}$.

[a] Das Kürzel „f.s.“ steht für „fast sicher“. Manchmal findet man statt „f.s.“ auch das Kürzel „a.e.“. Es bedeutet „almost everywhere“.

Def. 49 *Es seien $X_1, \ldots, X_n, X$ zufällige Variablen mit*
$\mathbf{E}|X_i|^p < \infty, \mathbf{E}|X|^p < \infty$.
$\{X_n\}$ *<u>konvergiert im p-ten Mittel</u> gegen X, falls*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}|X_n - X|^p = 0.$$

Wir bezeichnen dann: $\lim_{n\to\infty} X_n = X$ *p.m.*
(q.m. wenn $p = 2$).

Def. 50 *Es sei $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von zufälligen Variablen. X sei eine Zufallsgröße mit der Verteilungsfunktion $F(x) = P(X < x)$.*

Die Folge $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ <u>konvergiert in Verteilung</u> gegen die Zufallsgröße X, wenn für alle $x \in \mathbb{R}$, in denen die Funktion F stetig ist, gilt:

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n < x) = F(x).$$

Wir bezeichnen dann: $X_n \longrightarrow^D X$.

Wir versuchen jetzt Zusammenhänge zwischen den verschiedenen Konvergenzbegriffen herzustellen.

Lemma 47 *Sei X eine Zufallsvariable mit $\mathbf{E}|X|^p < \infty$, $p' < p$. Dann gilt*

$$\left(\mathbf{E}|X|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \leq \left(\mathbf{E}|X|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Beweis: Die Funktion $g(x) = |x|^t$ ist konvex für $t \geq 1$. Für eine beliebige Zufallsvariable Y gilt (Jensens Ungleichung)

$$|\mathbf{E}Y|^t \leq \mathbf{E}|Y|^t.$$

Sei $Y = |X|^{p'}$, $t = \frac{p}{p'} \geq 1$. Daraus folgt

$$\left(\mathbf{E}|X|^{p'}\right)^{\frac{p}{p'}} \leq \mathbf{E}\left(\left(|X|^{p'}\right)^{\frac{p}{p'}}\right) = \mathbf{E}|X|^p.$$

$\square$

Folg. 7 *Sei* $p' < p$.

$$\lim_{n\to\infty} X_n = X \quad p.m. \Rightarrow \lim_{n\to\infty} X_n = X \quad p'.m.$$

Beweis: Wegen Lemma 47 gilt:

$$\left(\mathbf{E}|X_n - X|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \leq \left(\mathbf{E}|X_n - X|^{p}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

$\square$

Lemma 48 *Sei* $p \geq 1$. *Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} X_n = X \quad p.m. \Rightarrow \text{p–lim}_{x\to\infty} X_n = X.$$

Beweis: Es gilt für alle n:

$$\begin{aligned} P(|X_n - X| > \varepsilon) &= P(|X_n - X|^p > \varepsilon^p) \\ &\leq \frac{\mathbf{E}|X_n - X|^p}{\varepsilon^p} \\ &\qquad \text{Markoff-Ungleichung} \\ \lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) &\leq \lim_{n\to\infty} \frac{\mathbf{E}|X_n - X|^p}{\varepsilon^p} = 0. \end{aligned}$$

□

Das folgende Beispiel zeigt, daß stochastische und fast sichere Konvergenz nicht identisch sind.

Bsp. 85 *Wir wollen eine Folge* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *zufälliger Variablen konstruieren, für die zwar* p–lim $X_n = 0$ *gilt, nicht aber* $\lim X_n = 0$ f.s. *Es seien* $\Omega = [0, 1]$ *und* $\mathcal{E} = [0, 1] \cap \mathcal{B}^1$

gegeben. Für alle Ereignisse $A \subseteq [0,1]$ *gelte:*

$$0 \leq P(A) = \int\limits_A 1\,dx \leq 1.$$

Wir betrachten nun eine Folge $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *von Ereignissen im Ereignisfeld* $\mathcal{E}$. *Für alle* $n \in \mathbb{N}$ *sei* A_n *definiert durch:*

$$A_n := [k \cdot 2^{-h}, (k+1) \cdot 2^{-h}],$$

wobei für die Zahlen h *und* k *folgendes gelte:*

- $h, k \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$;
- $n = 2^h + k; \quad (n \leq 2 \cdot 2^h)$
- $0 \leq k < 2^h$.

Die Folge $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *definieren wir nun wie folgt:*

$$X_n(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{, \textit{falls} } \omega \in A_n \\ 0 & \text{, \textit{sonst}} \end{cases}$$

Untersuchen wir die stochastische Konvergenz dieser Folge von Zufallsgrößen:

Nach Definition der Folge $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *gilt:*

$$\begin{aligned} P(|X_n| > \varepsilon) &= P(|X_n| = 1) = P(A_n) \\ &= (k+1)\cdot 2^{-h} - k \cdot 2^{-h} \\ &= 2^{-h} \leq \frac{2}{n} \to 0, \end{aligned}$$

d.h. p–lim $X_n = 0$.

Wir untersuchen nun, ob die Folge $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ auch fast sicher gegen Null konvergiert. Sehen wir uns die Intervalle A_n an, für $n = 1, \ldots, 8$:

$n = 2^h + k$	h	k	A_n
$1 = 2^0 + 0$	0	0	$A_1 = [0, 1]$
$2 = 2^1 + 0$	1	0	$A_2 = [0, \frac{1}{2}]$
$3 = 2^1 + 1$	1	1	$A_3 = [\frac{1}{2}, 1]$
$4 = 2^2 + 0$	2	0	$A_4 = [0, \frac{1}{4}]$
$5 = 2^2 + 1$	2	1	$A_5 = [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$
$6 = 2^2 + 2$	2	2	$A_6 = [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$
$7 = 2^2 + 3$	2	3	$A_7 = [\frac{3}{4}, 1]$
$8 = 2^3 + 0$	3	0	$A_8 = [0, \frac{1}{8}]$

Die Folge $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist nirgends konvergent. Also

$$P\left(\left\{\omega\colon \lim_{n\to\infty} X_n(\omega)=0\right\}\right)=0\neq 1.$$

Satz 49 *Es sei $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von zufälligen Variablen, für die es zwei Zufallsgrößen X und Y gibt, so daß gilt:*

$$X=\text{p–lim}\, X_n \text{ und } Y=\text{p–lim}\, X_n.$$

Dann folgt daraus:

$$P(X=Y)=1.$$

Beweis: Es sei $\varepsilon>0$ beliebig. Dann berechnen wir

$$P\left(\{\omega\colon |X(\omega)-Y(\omega)|>\varepsilon\}\right)=(*)$$

$$
\begin{aligned}
&(*)\\
&= \quad P\left(\{\omega\colon |X(\omega) - X_n(\omega) + X_n(\omega) - Y(\omega)| > \varepsilon\}\right)\\
&\leq \quad P\left(\{\omega\colon |X(\omega) - X_n(\omega)| + |X_n(\omega) - Y(\omega)| > \varepsilon\}\right)\\
&\leq \quad P\left(\left\{\omega\colon |X_n(\omega) - X(\omega)| > \frac{\varepsilon}{2}\right\} \cup \left\{\omega\colon |X_n(\omega) - Y(\omega)| > \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right)\\
&\leq \quad P\left(\left\{\omega\colon |X_n(\omega) - X(\omega)| > \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right) +\\
&\qquad\ P\left(\left\{\omega\colon |X_n(\omega) - \eta(\omega)| > \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right)\\
&\qquad \xrightarrow[n\to\infty]{} 0
\end{aligned}
$$

D.h.

$$
P(|X - Y| > \varepsilon) = 0 \quad \forall \varepsilon > 0.
$$

$P\left(\{\omega\colon X(\omega) = Y(\omega)\}\right) = 1.$ $\square$

Lemma 50

$$\text{p–lim}_{n\to\infty} X_n = X \Rightarrow X_n \to^D X$$

Wir kennen vier verschiedene Arten der Konvergenz einer Folge von Zufallsgrößen gegen eine zufällige Variable. Sie bilden z.T. eine gewisse Hierarchie.

$$\begin{aligned} \lim X_n = X \text{ f.s.} \quad &\Longrightarrow \quad \text{p–lim}\, X_n = X \\ &\Longrightarrow \quad X_n \longrightarrow^D X \\ \lim X_n = X \text{ q.m.} \quad &\Longrightarrow \quad \text{p–lim}\, X_n = X \end{aligned}$$

Die Umkehrungen gelten im allgemeinen nicht. Da die Verteilungskonvergenz in dieser Kette die schwächste ist, wird sie oft auch als <u>schwache Konvergenz</u> bezeichnet.

Bsp. 86 $X_n \sim Bi(n, p_n), \quad \lim np_n = \lambda, \quad Y \sim Poi(\lambda)$
$\Rightarrow X_n \to^D Y.$

Diese Aussage kennen wir schon von früher.

13.4 *Die fast sichere Konvergenz

Dieser Abschnitt wird in der Vorlesung nicht behandelt. Er dient nur als Ergänzung für den interessierten Leser.

Def. 51 *Es sei* $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge von Ereignissen. Wir definieren*

$$\lim_{n\to\infty} \sup A_n := \lim_{n\to\infty} \left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \right).$$

Bem.: Wir definieren für alle $n \in \mathbb{N}$: $B_n := \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k$. Dann gilt: $B_{n+1} \subseteq B_n$ ($n \in \mathbb{N}$). Folglich ist die Folge $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

monoton fallend. Demzufolge gilt:

$$\lim_{n\to\infty} B_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n.$$

Das bedeutet jedoch nichts anderes als:

$$\lim_{n\to\infty}\sup A_n = \lim_{n\to\infty}\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right).$$

Lemma 51 (BOREL–CANTELLI) *Es sei* $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge von Ereignissen aus einem Wahrscheinlichkeitsraum* $(\Omega, \mathcal{E}, P)$. *Gilt* $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$, *so folgt daraus:*

$$P\left(\lim_{n\to\infty}\sup A_n\right) = 0.$$

Beweis: Zunächst gilt:

$$P\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=n}^{\infty} P(A_n).$$

Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt. Da nach Voraussetzung $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$ gilt, folgt für hinreichend großes n:

$$\sum_{k=n}^{\infty} P(A_n) < \varepsilon.$$

Folglich gilt:

$$
\begin{aligned}
P\left(\lim_{n\to\infty}\sup A_n\right) &= P\left(\lim_{n\to\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) \\
&\leq \lim_{n\to\infty}\sum_{k=n}^{\infty} P(A_n) = 0.
\end{aligned}
$$

□

Wir betrachten eine Folge $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ von Zufallsvariablen, die fast sicher gegen eine zufällige Variable X konvergiert. Es gilt:

$$
\lim_{n\to\infty} X_n = X \text{ f.s.}
$$

$$\Longleftrightarrow \quad P\left(\left\{\omega\colon \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\right\}\right) = 1$$

$$\Longleftrightarrow \quad P\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} \{\omega\colon |X_k(\omega) - X(\omega)| \le \varepsilon\}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \quad \forall \varepsilon > 0$$

Cauchy-Kriterium

$$\Longleftrightarrow \quad P\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} \{\omega\colon |X_k(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \forall \varepsilon > 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} P(B_n) = 0,\ B_n := \bigcup_{k=n}^{\infty} \{\omega\colon |X_k(\omega) - X(\omega)| \ge \varepsilon\}$$

$\Longleftrightarrow \quad P\left(\lim_{n\to\infty} B_n\right) = 0$ (da $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend ist)

$$\Longleftrightarrow \quad P\left(\lim_{n\to\infty} \sup B_n\right) = 0.$$

Satz 52 *Es sei* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge von Zufallsgrößen, und* X *eine weitere zufällige Variable.*

$$\lim X_n = X \text{f.s.} \Rightarrow \text{p–lim}\, X_n = X.$$

Beweis: Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
0 &\leq \lim_{n\to\infty} P(\{\omega\colon |X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\}) \\
&\leq \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} \{\omega\colon |X_k(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\}\right) \\
&= 0 \quad \text{nach Vor.}
\end{aligned}$$

□

Folg. 8 (aus dem Borel-Cantelli Lemma)

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) < \infty \quad \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} = X f.s.$$

Lemma 53 *Sei* p–$\lim X_n = X$. *Dann existiert eine Teilfolge* $\{X_{n_k}\}$ *von* $\{X_n\}$ *so daß* $\lim_{k\to\infty} X_{n_k}$ *f.s.*

Lemma 54

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{E}|X_n - X|^p < \infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} X_n = X f.s.$$

Satz 55 (Satz von der majorisierten Konvergenz) $\lim_{n\to\infty} X_n = X$ *f.s.* *und* $|X_n| \le Y$, $\mathbf{E}|Y|^p < \infty$. *Dann gilt:* $\lim_{n\to\infty} X_n = X$ *p.m.*