Bsp. 72 (Box–Müller**–Transformation)** *Es seien* U_1 *und* U_2 *zwei unabhängige, über dem Intervall* $[0,1[$ *gleichverteilte Zufallsgrößen (*$U_i \sim R(0,1)$, $i=1,2$*),* $\mathbf{U} = (U_1, U_2)^T$ *ein zufälliger Vektor. Wir betrachten den zufälligen Vektor* $\mathbf{V} = g(\mathbf{U}) = (X, Y)^T$*, wobei:*

$$\begin{aligned} X = g_1(U_1, U_2) &= \sqrt{-2\ln U_1} \cdot \cos 2\pi U_2 \\ Y = g_2(U_1, U_2) &= \sqrt{-2\ln U_1} \cdot \sin 2\pi U_2 \end{aligned}$$

Wir suchen die Dichtefunktionen für die zufälligen Variablen X und Y. Wir bestimmen zunächst die Umkehrfunktion zur Abbildung g. Es gilt:

$$\mathbf{U} = g^{-1}(\mathbf{V}) = (\psi_1(X,Y), \psi_2(X,Y)).$$

Wir ermitteln die Teilfunktionen ψ_1 und ψ_2. Dazu berechnen wir

$$\begin{aligned}
X^2 + Y^2 &= (-2 \ln U_1 \cdot \cos^2(2\pi U_2)) + (-2 \ln U_1 \cdot \sin^2(2\pi U_2)) \\
&= (-2 \ln U_1) \cdot (\cos^2(2\pi U_2) + \sin^2(2\pi U_2)) \\
&= -2 \ln U_1
\end{aligned}$$

Durch Umstellen erhalten wir:

$$U_1 = \psi_1(X, Y) = e^{-\frac{1}{2}(X^2+Y^2)}.$$

Weiterhin gilt:

$$\frac{Y}{X} = \tan 2\pi U_2.$$

Daraus folgt:

$$U_2 = \psi_2(X,Y) = \frac{1}{2\pi}\arctan\left(\frac{Y}{X}\right).$$

Bestimmung von $|J|$. Wir wissen bisher:

$$\begin{aligned}
\psi_1(x,y) &= e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} = u_1 \\
\psi_2(x,y) &= \frac{1}{2\pi}\arctan\left(\frac{y}{x}\right) = u_2
\end{aligned}$$

Dann gilt für

$$|J| = \left\|\begin{matrix} \frac{\partial\psi_1}{\partial x} & \frac{\partial\psi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial\psi_2}{\partial x} & \frac{\partial\psi_2}{\partial y} \end{matrix}\right\|$$

$$
\begin{aligned}
|J| &= \left\| \begin{matrix} -x \cdot \exp(-\frac{1}{2}(x^2+y^2)) & -y \cdot \exp(-\frac{1}{2}(x^2+y^2)) \\ \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{-y}{\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)\cdot x^2} & \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)\cdot x} \end{matrix} \right\| \\
&= \left| -\frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\right) \cdot \left(\frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2}\right) \right| \\
&= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2+x^2)}
\end{aligned}
$$

Für die Dichtefunktion des zufälligen Vektors $\mathbf{V}$ gilt nach der Transformationsformel:

$$
f_{\mathbf{V}}(x,y) = f_{\mathbf{U}}(\psi_1(x,y), \psi_2(x,y)) \cdot |J|.
$$

Da die Zufallsgrößen U_1 und U_2 unabhängig sind, gilt:

$$
f_{\mathbf{V}}(x,y) = f_{U_1}(\psi_1(x,y)) \cdot f_{U_2}(\psi_2(x,y)) \cdot |J|.
$$

Nun sind $U_1, U_2 \sim R(0,1)$. Daraus folgt aber:

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{V}}(x,y) &= |J| = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2} \\ &= f_X(x) \cdot f_Y(y). \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \\ f_Y(y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2} \end{aligned}$$

Das bedeutet, daß die Zufallsgrößen X und Y unabhängig und standardnormalverteilt sind:

$$X \sim \mathcal{N}(0,1), \quad Y \sim \mathcal{N}(0,1).$$

Bsp. 73 (Treffen einer Zielscheibe*) *Es seien folgende Bedingungen erfüllt*

- *V1: Die Randverteilungen von X und Y seien stetig*
- *V2: Die Dichte $h(x, y)$ von (X, Y) hängt nur vom Abstand $\sqrt{x^2 + y^2}$ vom Nullpunkt ab (Radialsymmetrie)*
- *V3: Die Fehler in x- und y-Richtung sind unabhängig.*

Sei Z die zufällige Abweichung in beliebiger Richtung. Dann ist

$$Z \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2).$$

Beweis: Seien $p(x)$ und $q(y)$ Randdichten von (X, Y). Aus

V2 und V3 folgt

$$p(x)q(y) = s(r), \quad r^2 = x^2 + y^2 \qquad (3)$$

Substitutionsmethode:

$x = 0$: $p(0)q(y) = s(y)$, $\quad p(0) \neq 0$

$y = 0$: $q(0)p(x) = s(x)$, $\quad q(0) \neq 0$ $x = y$: $p(x) = q(x)$ und damit $p(0)p(y) = s(y)$

Teilen obige Funktionalgleichung durch $p(0)^2$,

$$\frac{p(x)}{p(0)}\frac{p(y)}{p(0)} = \frac{s(r)}{p(0)^2} = \frac{p(r)}{p(0)}$$

Logarithmieren

$$\ln(\frac{p(x)}{p(0)}) + \ln(\frac{p(y)}{p(0)}) = \ln(\frac{p(r)}{p(0)})$$

Mit $f(x) := \ln(\frac{p(x)}{p(0)})$:

$$f(x) + f(y) = f(r), \quad r^2 = x^2 + y^2$$

$y = 0, x = -x_1$: $f(-x) = f(|x|)$ wegen $f(0) = 0$.

$x^2 = x_1^2 + x_2^2$:

$$f(r) = f(y) + f(x_1) + f(x_2), \quad r^2 = y^2 + x_1^2 + x_2^2$$

Wiederholtes Einsetzen:

$$f(r) = f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_k), \quad r^2 = \sum_{i=1}^{k} x_i^2$$

$k = n^2, x = x_1 = \ldots = x_k$:

$$f(nx) = n^2 f(x) \Rightarrow_{x=1} f(n) = n^2 f(1)$$

$x = \frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}$:

$$n^2 f(\frac{m}{n}) = f(n\frac{m}{n}) = f(m) = m^2 f(1)$$

$$\Rightarrow f(\tfrac{m}{n}) = f(1)\Big(\tfrac{m}{n}\Big)^2 \Rightarrow$$

$$f(x) = cx^2, \quad c = f(1)$$

für alle rationalen x. Wegen der Stetigkeit (V1) folgt diese Relation für alle $x \in \mathbb{R}$.

$$p(x) = p(0)e^{cx^2}$$

$p(x) > 0$ da Wkt.dichte, $\quad c < 0$, $c := -\frac{1}{2\sigma^2}$.

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} p(x)\,dx = p(0)\int_{-\infty}^{\infty} e^{cx^2}\,dx = p(0)\sigma\sqrt{2\pi}$$

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

Gemeinsame Dichte von (X, Y):

$$p(x)p(y) = \frac{1}{\sigma^2 2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}.$$

Fehler in einer beliebigen Richtung, θ, $0 \leq \theta \leq 2\pi$:

$Z = X\cos(\theta) + Y\sin(\theta)$

Variablentransformation

$$\begin{aligned} z &= x\cos(\theta) + y\sin(\theta) \\ u &= x\cos(\theta) - y\sin(\theta) \end{aligned}$$

Jacobi-Determinante J: $J = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{matrix} \right\| = |-1| = 1$

Quadrieren liefert

$$\begin{aligned} z^2 &= x^2\cos^2(\theta) + y^2\sin^2(\theta) + 2xy\cos(\theta)\sin(\theta) \\ u^2 &= x^2\cos^2(\theta) + y^2\sin^2(\theta) - 2xy\cos(\theta)\sin(\theta) \end{aligned}$$

Addition: $x^2 + y^2 = z^2 + u^2$ also gemeinsame Dichte von

(Z, U):

$$h_1(z,u) = \frac{1}{\sigma^2 2\pi} e^{-\frac{z^2+u^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}$$

d.h. Z und U sind unabhängig, $h_1(z,u) = h_Z(z)h_U(u)$ und

$$h_Z(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}$$

$\square$

Satz 32 (Transformationssatz für EW)

Es sei $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_p)^T$ *ein zufälliger Vektor und* $g\colon \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ *eine Abbildung.*

a) Es sei $\mathbf{X}$ *diskret mit Wkt.funktion (Zähldichte)* f. *Falls*

$$\sum_{\mathbf{x}} |g(\mathbf{x})| f(\mathbf{x}) < \infty \qquad \textit{so gilt:} \qquad \mathbf{E}(g(\mathbf{X})) = \sum_{\mathbf{x}} g(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}).$$

b) Es sei $\mathbf{X}$ *stetig.* $f\colon \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ *sei die Dichtefunktion des zufälligen Vektors* $\mathbf{X}$. *Falls*

$$\int_{\mathbb{R}^p} |g(x_1, \ldots, x_p)| \cdot f(x_1, \ldots, x_p)\, dx_1 \ldots dx_p < \infty$$

gilt, so:

$$\mathbf{E}g(X) = \int\limits_{\mathbb{R}^p} g(x_1, \ldots, x_p) \cdot f(x_1, \ldots, x_p)\, dx_1 \ldots dx_p.$$

Bem.: Der Beweis des Satzes erfordert Maßtheorie. Wir haben eine eingeschränkte Version bereits im Abschnitt Erwartungswerte gezeigt.

Bsp. 74 *Es sei* $\mathbf{X} = (X_1, X_2)^T$ *ein stetiger zufälliger Vektor mit Dichtefunktion* $f(X_1, x_2)$. *Wir definieren die Funktion* $g\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *durch* $g(\mathbf{X}) := X_1 + X_2$. *Dann gilt:*

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}g(\mathbf{X}) &= \mathbf{E}(X_1 + X_2) \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^2} g(x_1, x_2) \cdot f(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 \\
&= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x_1 + x_2) \cdot f(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} x_1 f(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 + \int_{\mathbb{R}^2} x_2 f(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 \\
&= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x_1 \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2)\, dx_2 \right) dx_1 + \\
&\quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x_2 \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2)\, dx_1 \right) dx_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}g(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 \cdot f_{X_1}(x_1)\, dx_1 + \int_{-\infty}^{+\infty} x_2 \cdot f_{X_2}(x_2)\, dx_2 \\
&= \mathbf{E}X_1 + \mathbf{E}X_2
\end{aligned}
$$

Allgemeiner erhalten wir also für zwei stetige zufällige Variablen X_1 und X_2:

$$\mathbf{E}(c \cdot X_1 + d \cdot X_2) = c \cdot \mathbf{E}X_1 + d \cdot \mathbf{E}X_2.$$

Das ist ein Beweis der Aussage 5 in Satz 11 für stetige zufällige Variablen.