

8.3 Zuverlässigkeitsmodelle

Def. 29 (Zuverlässigkeit) *Die Zuverlässigkeit eines Systems ζ ist die Wahrscheinlichkeit, dass das System zum Zeitpunkt t intakt ist:*

$$Rel(\zeta) = P(X \geq t).$$

Annahme:

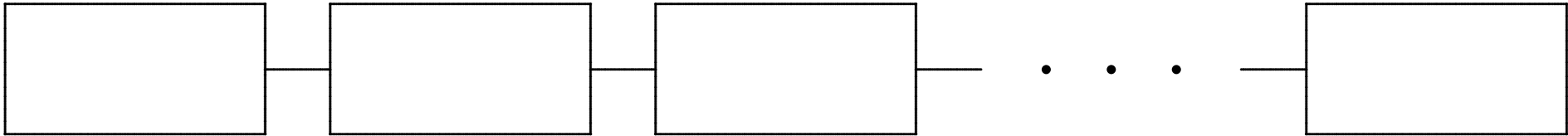
Das System besteht aus mehreren Komponenten

Die Komponenten sind unabhängig

$$X_i \sim Exp(\lambda_i).$$

- Reihensystem
- Parallelsystem
- k aus n System
- Proversionswahrscheinlichkeit
- Faltung

Reihensystem ζ_R



$G_1(t)$

$G_n(t)$

$$\begin{aligned} \text{Rel}(\zeta_R) &= P(X_R \geq t) = P(X_1 \geq t, \dots, X_n \geq t) = \\ &= \prod_{i=1}^n P(X_i \geq t) = \prod_{i=1}^n G_i(t) = \\ &= \prod_{i=1}^n e^{-\lambda_i t} = \exp\left(-\sum_{i=1}^n \lambda_i t\right). \end{aligned}$$

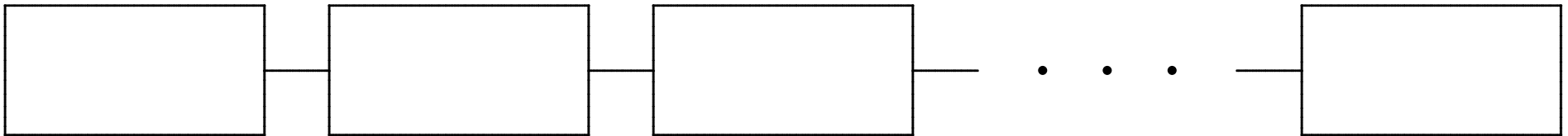
Die zufällige Lebensdauer X_R des Reihensystems ist

$$X_R \sim \text{Exp}\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right).$$

Die mittlere Lebensdauer des Reihensystems ist

$$\mathbf{E}X_R = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \lambda_i}.$$

Reihensystem:



$$\mathbf{Rel}(\zeta_R) = e\left(-\sum_{i=1}^n \lambda_i t\right),$$

$$n \rightarrow \infty, \lambda_i = \lambda : \mathbf{Rel}(\zeta_R) \rightarrow 0.$$

$$n \rightarrow \infty, \sum_{i=1}^n \lambda_{i,n} \rightarrow \lambda : \mathbf{Rel}(\zeta_R) \rightarrow e^{-\lambda t}$$

D.h. die Lebensdauer X_R des Reihensystems ist,
wenn

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i < \infty,$$

asymptotisch wieder exponentialverteilt.

Die Exponentialverteilung ist eine sogenannte
Extremwertverteilung.

Bem. 11 Die Lebensdauer X_R des Reihensystems kann beschrieben werden durch

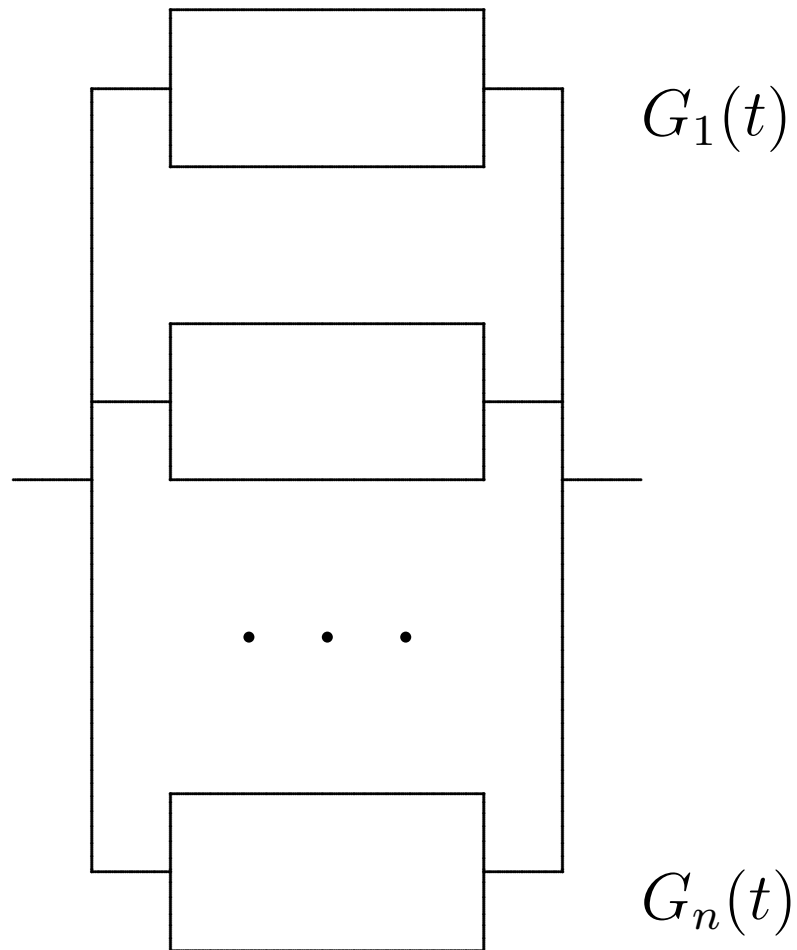
$$X_R = \min_i X_i.$$

Die Zufallsvariable X_R hat oft (auch dann wenn nicht $X_i \sim \text{Exp}(\lambda)$) asymptotisch eine **Weibull-Verteilung** mit der Dichte

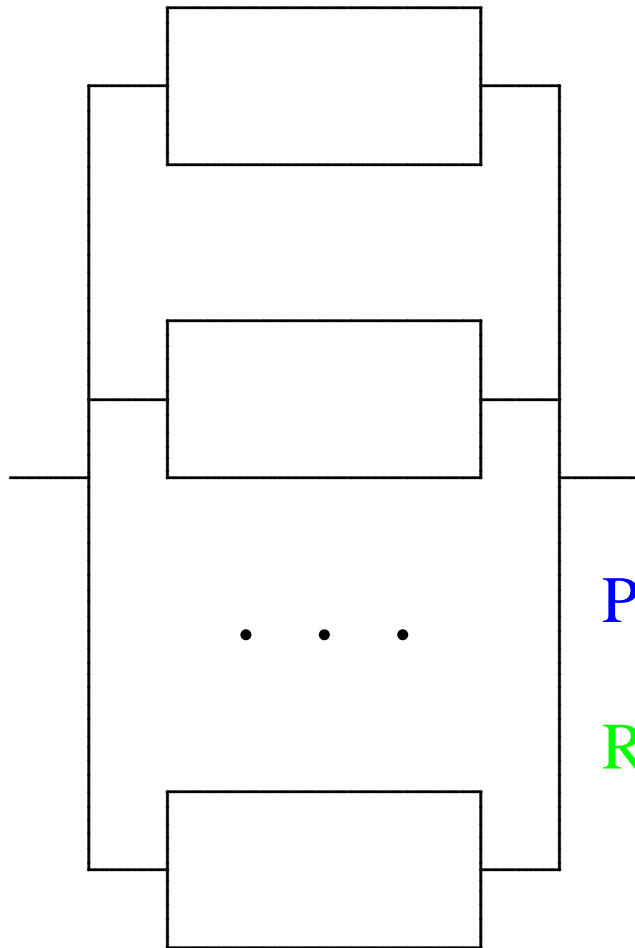
$$f(t) = b(\lambda t)^{b-1} e^{-(\lambda t)^b}, \quad t > 0, b > 0, \lambda > 0.$$

Das ist dann der Fall, wenn die Dichte der unabhängig und identisch verteilten Zufallsvariablen X_i 'kurze' Tails hat.

Parallelsystem ζ_P



$$\begin{aligned}
\text{Rel}(\zeta_P) &= P(X_P \geq t) = 1 - P(X_P < t) \\
&= 1 - \underbrace{P(X_1 < t, \dots, X_n < t)}_{\substack{\text{alle Komponenten sind} \\ \text{vor dem Zeitpunkt } t \\ \text{ausgefallen}}} = \\
&= 1 - \prod_{i=1}^n P(X_i < t) \\
&= 1 - \prod_{i=1}^n F_i(t) \\
&= 1 - (1 - e^{-\lambda t})^n \quad \text{wenn } \lambda_i = \lambda \quad \forall i
\end{aligned}$$



Parallelsystem

$$\text{Rel}(\zeta_P) = 1 - (1 - e^{-\lambda t})^n$$

$$n \rightarrow \infty, \lambda_i = \lambda : \text{Rel}(\zeta_P) \rightarrow 1$$

$$n \rightarrow \infty : \text{Rel}(\zeta_P) \sim 1 - e^{-e^{-\lambda t} + \ln n}$$

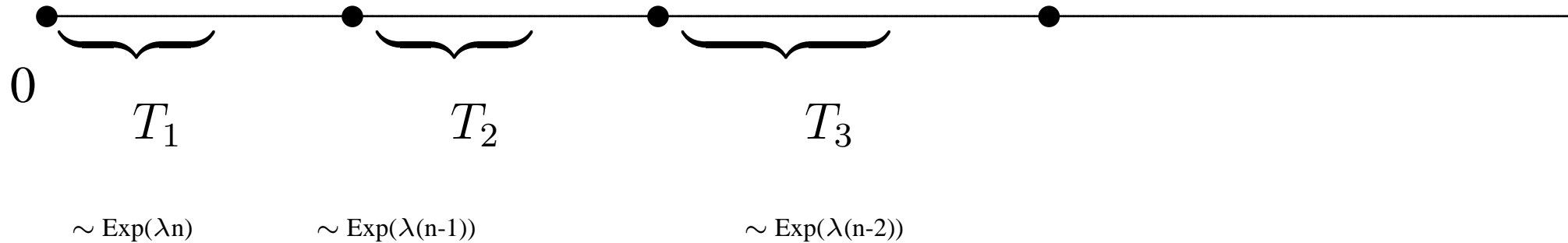
Das ist auch eine Extremwertverteilung, die sogenannte **Gumbel-Verteilung**.

Bem. 12 *Die Lebensdauer X_P des Parallelsystems kann beschrieben werden durch*

$$X_P = \max_i X_i.$$

Der Fall der Gumbel-Verteilung tritt ein, wenn X_i ‘mittlere’ Tails hat.

Mittlere Lebensdauer des Parallelsystems ($\lambda_i = \lambda$)



T_1 : Wartezeit bis zum ersten Ausfall einer Komponente

T_i : Wartezeit zwischen $(i - 1)$ -tem und i -tem Ausfall einer Komponente

$$X_P = \sum_{i=1}^n T_i.$$

Zwischen $(i - 1)$ -tem und i -tem Ausfall einer Komponente arbeiten genau $n - i + 1$ Komponenten gleichzeitig. Die Lebensdauer dieses Teilsystems aus $n - i + 1$ Komponenten (Reihensystem) hat eine Exponentialverteilung mit Parameter $\mu_i = (n - i + 1) \cdot \lambda$,

$$\mathbf{E}T_i = \frac{1}{\mu_i} = \frac{1}{n - i + 1} \cdot \frac{1}{\lambda}$$

$$\mathbf{E}X_P = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\mu_i} = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n - i + 1} = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}.$$

k aus *n* Systeme

Das System fällt aus, wenn *k* Komponenten ausgefallen sind.

Lebensdauer:

$$T = \sum_{i=1}^k T_i.$$

Mittlere Lebensdauer:

$$\begin{aligned}\mathbf{ET} &= \sum_{i=1}^k \frac{1}{\mu_i} \\ &= \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^k \frac{1}{n-i+1} \\ &= \frac{1}{\lambda} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \dots + \frac{1}{n-k+1} \right).\end{aligned}$$

n aus n -System: Parallelsystem

1 aus n -System: Reihensystem

Proversionswahrscheinlichkeiten

Problem: Reihensystem mit 2 Komponenten und der zufälligen Lebensdauer X_1, X_2 :

$$X_1 \sim \text{Exp}(\lambda_1), \quad X_2 \sim \text{Exp}(\lambda_2).$$

System fällt aus.

Mit welcher Wkt. liegt das an der ersten Komponente?

$$\begin{aligned}
P(X_1 < X_2) &= \int_0^{\infty} P(X_1 < X_2 | X_2 = t) f_2(t) dt \\
&= \int_0^{\infty} P(X_1 < t) \cdot \lambda_2 e^{-\lambda_2 t} dt \\
&= \int_0^{\infty} (1 - e^{-\lambda_1 t}) \cdot \lambda_2 e^{-\lambda_2 t} dt \\
&= 1 - \int_0^{\infty} \lambda_2 e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t} dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X_1 < X_2) &= 1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \\ &= \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}. \end{aligned}$$

Beispiel: $\frac{1}{\lambda_1} = 1000h$, $\frac{1}{\lambda_2} = 500h$:

$$P(X_1 < X_2) = \frac{1}{3}.$$

Faltung der Exponentialverteilung

System mit 2 Komponenten: Zunächst ist nur die erste Komponente eingeschaltet. Wenn diese ausfällt, wird automatisch die 2. Komponente zugeschaltet. Das System fällt aus, wenn beide Komponenten defekt sind.

Die Lebensdauern X_1, X_2 seien unabhängig und exponential, $X_1, X_2 \sim Exp(\lambda)$ verteilt.

Frage: Wkt. für Systemausfall?

$$\begin{aligned}
F(t) &= P(X_1 + X_2 < t) \\
&= \int_0^\infty P(X_1 + X_2 < t | X_2 = s) f(s) ds \\
&= \int_0^\infty P(X_1 < t - s) f(s) ds \\
&= \int_0^\infty F(t - s) f(s) ds \\
&= \int_0^t (1 - e^{-\lambda(t-s)}) \lambda e^{-\lambda s} ds \\
&= \int_0^t \lambda e^{-\lambda s} ds - \int_0^t \lambda e^{-\lambda t} ds \\
&= 1 - e^{-\lambda t} - \lambda t e^{-\lambda t}.
\end{aligned}$$

Dichte ($t > 0$):

$$\begin{aligned} F'(t) &= \lambda e^{-\lambda t} + \lambda^2 t e^{-\lambda t} - \lambda e^{-\lambda t} \\ &= \lambda^2 \cdot t \cdot e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

Erlang-Verteilung mit Parameter $(2, \lambda)$.

Bem. 13 Seien X_1, \dots, X_n unabhängig, $X_i \sim \text{Exp}(\lambda)$,
 $i = 1, \dots, n$. Dann ist

$$X_1 + X_2 + \dots + X_n \sim \text{Erlang}(n, \lambda).$$

Dichte:

$$f_{\text{Erl}}(t) = \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Beweis: durch Induktion. □

Ausfallrate-Funktion

Def. 30 (Ausfallrate-Funktion) Sei F eine Verteilungsfunktion mit Dichte f . Dann heißt

$$\mu(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)}$$

Ausfallrate-Funktion (oder Hazardrate-Funktion).

Interpretation: Die Zufallsvariable X habe bereits die Zeit t überlebt.

Frage: Wie groß ist die Wkt., dass X den Zeitraum $[t, t + dt]$

nicht überlebt, also

$$\begin{aligned} P(X \leq t + dt | X > t) &= \frac{P(X \in [t, t + dt])}{P(X > t)} \\ &= \frac{\int_t^{t+dt} f(x) dx}{1 - F(t)} \\ &= \frac{F(t + dt) - F(t)}{1 - F(t)} \\ &\approx \frac{f(t) dt}{1 - F(t)} = \mu(t) dt. \end{aligned}$$

$\mu(t)$: Rate mit der ein Bauteil, das t alt ist, ausfällt.

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$$
$$\mu(t) = \frac{\lambda e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t}} = \lambda.$$

Bei Exponentialverteilung ist die Ausfallrate konstant,
sie hängt nicht vom Zeitpunkt ab!

Übungsaufgabe: Sei F eine stetige Verteilungsfunktion mit
Dichte f und konstanter Ausfallrate. Zeigen Sie,
dass f Exponential-Dichte ist.

Hinweis: Setzen Sie $u(t) := 1 - F(t)$ und lösen
Sie die Differentialgleichung $u' - \lambda u = 0$.

Def. 31 (IFR, DFR)

- Eine Verteilungsfunktion F hat *Increasing Failure Rate (IFR)*, falls $\mu(t)$ monoton wachsend ist.
- F hat *Decreasing Failure Rate (DFR)*, falls $\mu(t)$ monoton fallend ist.

Bsp. 50 (Weibull-Verteilung)

Verteilungsfkt.: $F(t) = 1 - e^{-(\lambda t)^b}, \quad t, \lambda, b > 0,$

Dichtefkt.: $f(t) = b(\lambda t)^{b-1}e^{-(\lambda t)^b}$

$$\mu(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)} = \frac{b(\lambda t)^{b-1}e^{-(\lambda t)^b}}{e^{-(\lambda t)^b}} = b(\lambda t)^{b-1}$$

IFR falls $b > 1$

IFR, DFR falls $b = 1$ (*exp*)

DFR falls $b < 1$

- *System mit verdeckten Mängeln, aber langsamen “Altern” → Ausfallrate sinkt → Weibull, $b < 1$*
- *System mit wenig verdeckten Mängeln, aber schnellem “Altern” → Ausfallrate steigt → Weibull, $b > 1$*

Bsp. 51 (Hjorth-Verteilung)

$$\text{Verteilungsfkt.: } F(t) = 1 - \frac{e^{-\lambda t^2/2}}{(1 + bt)^{\gamma/b}}, \quad t, \lambda, \gamma, b > 0,$$

$$\text{Dichtefkt.: } f(t) = \frac{\lambda t(1 + bt) + \gamma}{(1 + bt)^{\gamma/b+1}}$$

$$\mu(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)} = \lambda t + \frac{\gamma}{1 + bt}$$

fallend für $\lambda = 0$

badewannenförmig für $0 < \lambda < b\gamma$.

Die Hjorth-Verteilung modelliert also badewannenförmige Ausfallraten.

- zunächst fallen viele Objekte aus (Kinderkrankheiten)
- dann Ausfallrate zeitweilig konstant
- schliesslich mehren sich die Ausfälle aufgrund von Alterungserscheinungen.

Bedienungstheorie

M/M/s - Wartesystem

- $X \sim Exp(\lambda)$ Zeit zwischen Ankünften/Anforderungen
- Forderungen reihen sich in eine Warteschlange ein.
- $B \sim Exp(\mu)$ Bedienungszeiten, unabhängig
- s parallele Bedienungsplätze
- Bei frei werdendem Bedienungsplatz wird die nächste Forderung sofort bedient.

Fragestellungen:

- Mittlere Anzahl der Forderungen im System
- Mittlere Warteschlangenlänge
- Mittlere Wartezeit EW_t

- Besetzungswahrscheinlichkeit P_B
- Wartezeitverteilung

$$P(W_t \leq u) = 1 - P_B e^{-(s\mu - \lambda)u}$$

$$\mathbf{E}W_t = \frac{P_B}{s\mu - \lambda}.$$

Stationärer Fall, wenn $\frac{1}{s\mu} < \frac{1}{\lambda}$.

M/M/s - Verlustsystem

- $X \sim Exp(\lambda)$ Zeit zwischen Ankünften/Anforderungen
- Eine ankommende Forderung wird sofort bedient, wenn ein Bedienungsplatz frei ist, ansonsten geht sie verloren.
- $B \sim Exp(\mu)$ Bedienungszeiten, unabhängig
- s parallele Bedienungsplätze

Fragestellungen:

- Verlustwahrscheinlichkeit
- Mittlere Anzahl der besetzten Bedienungsplätze

Zusammenfassung (Exponentialverteilung)

- Exponentialdichte

$$f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{if } t \geq 0 \\ 0 & \text{else.} \end{cases}$$

- Erwartungswert

$$\mathbf{E}X = \frac{1}{\lambda}.$$

- Überlebensfunktion

$$G(t) = 1 - F(t) = e^{-\lambda t}.$$

- Cauchy-Funktionalgleichung

$$G(s + t) = G(s) \cdot G(t).$$

- Die Exponential-Verteilung ist gedächtnislos.
- Die einzige gedächtnislose stetige Verteilung ist die
Exponential-Verteilung
- Exponential-Verteilung ist eine Extremwertverteilung.

- Anwendungen in der Zuverlässigkeitstheorie.

Reihensystem

Parallelsystem

- Ausfallrate-Funktion

$$\mu(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)}.$$

- Die Ausfallratefunktion der Exponentialverteilung ist konstant.