7.2 Moment und Varianz

Def. 21 *Es sei X eine zufällige Variable. Falls der Erwartungswert $\mathbf{E}(|X|^p)$ existiert, heißt der Erwartungswert $\mathbf{E}X^p$ <u>p–tes Moment</u> der zufälligen Variablen X. Es gilt dann:*

$$\mathbf{E}X^p = \begin{cases} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^p \cdot f(x)\,dx, & \text{falls } X \text{ stetig ist} \\ \sum\limits_{i\in\mathbb{N}} x_i^p \cdot p_i, & \text{falls } X \text{ diskret ist} \end{cases}$$

Def. 22 *Es sei X eine zufällige Variable. Wir nennen den Erwartungswert $\mathbf{E}(X-\mathbf{E}X)^p$ <u>p–tes zentrales Moment</u> der Zufallsgröße X.*

Das zweite zentrale Moment $\mathbf{E}(X - \mathbf{E}X)^2$ nennen wir auch Streuung oder Varianz der Zufallsgröße X. Wir

Bez. 6 $\mathrm{Var}\, X$ *oder* σ_X^2.

Def. 23 *Die Größe*

$$\sigma = \sqrt{Var(X)}$$

heißt Standardabweichung der Zufallsvariablen X.

Bez.: σ, σ_X.

Sei $\mu = \mathbf{E}X$.

Bem.: : $\mathrm{Var}\,(X)$: mittlere quadratische Abweichung zwischen X und EX.

Def. 24 *Es seien X_1 und X_2 zwei zufällige Variablen. Wir nennen den Erwartungswert*

$$\underline{\mathrm{cov}\,(X_1, X_2)} := \mathbf{E}((X_1 - \mathbf{E}X_1) \cdot (X_2 - \mathbf{E}X_2))$$

die Kovarianz der zufälligen Variablen X_1 und X_2.

Def.: Zwei Zufallsvariablen X_1 und X_2 heißen unabhängig, falls

$$P(X_1 < x_1, X_2 < x_2) = P(X_1 < x_1) \cdot P(X_2 < x_2)$$

für alle $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$.

Satz 13 (Eigenschaften der Varianz)

1. *Für beliebige* $c \in \mathbb{R}$ *gilt: Ist* $P(X = c) = 1$*, so folgt* $\mathrm{Var}\, X = 0$*. Ist umgekehrt* $\mathrm{Var}\, X = 0$*, so existiert ein* $c \in \mathbb{R}$*, so daß gilt:* $P(X = c) = 1$.
2. *Für beliebige* $c \in \mathbb{R}$ *gilt:* $\mathrm{Var}\,(X + c) = \mathrm{Var}\, X$.
3. *Für beliebige* $a \in \mathbb{R}$ *gilt:* $\mathrm{Var}\,(a \cdot X) = a^2 \cdot \mathrm{Var}\, X$.
4. *Für zwei zufällige Variablen* X_1 *und* X_2 *gilt:* $\mathrm{Var}\,(X_1 + X_2) = \mathrm{Var}\, X_1 + \mathrm{Var}\, X_2 + 2 \cdot \mathrm{cov}\,(X_1, X_2)$.

Beweis: Es seien X, X_1 und X_2 beliebige zufällige Variablen. $a, c \in \mathbb{R}$ seien ebenfalls beliebig gewählt.

1. Es gelte: $P(X = c) = 1$. Nach Satz 11 folgt daraus:

$\mathbf{E}X = c$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Var} X &= \mathbf{E}(X - \mathbf{E}X)^2 \\
&= \mathbf{E}(X - c)^2 \\
&= \mathbf{E}(c - c)^2 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Es sei nun $\operatorname{Var} X = 0 = \mathbf{E}(X - \mathbf{E}X)^2 = 0$. Allgemein gilt für $c \in \mathbb{R}$: $\mathbf{E}(X - c)^2 \geq 0$. Also,

$$P(X - EX = 0) = 1.$$

$c := \mathbf{E}X$ leistet das Verlangte.

2. Es gilt mit Satz 11:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Var}(X+c) &= \mathbf{E}(X+c-\mathbf{E}(X+c))^2 \\
&= \mathbf{E}(X+c-\mathbf{E}X-\mathbf{E}c)^2 \\
&= \mathbf{E}(X+c-\mathbf{E}X-c)^2 \\
&= \mathbf{E}(X-\mathbf{E}X)^2 \\
&= \operatorname{Var} X
\end{aligned}
$$

3. Es gilt mit Satz 11:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}\,(a \cdot X) &= \mathbf{E}(a \cdot X - \mathbf{E}(a \cdot X))^2 \\
&= \mathbf{E}(a \cdot X - a \cdot \mathbf{E}X)^2 \\
&= \mathbf{E}(a \cdot (X - \mathbf{E}X))^2 \\
&= \mathbf{E}\left(a^2 \cdot (X - \mathbf{E}X)^2\right) \\
&= a^2 \cdot \mathbf{E}(X - EX)^2 \\
&= a^2 \cdot \mathrm{Var}\,X
\end{aligned}$$

4. Es gilt mit Satz 11:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Var}(X_1+X_2) &= \mathbf{E}(X_1+X_2-\mathbf{E}(X_1+X_2))^2 \\
&= \mathbf{E}(X_1+X_2-\mathbf{E}X_1-\mathbf{E}X_2)^2 \\
&= \mathbf{E}((X_1-\mathbf{E}X_1)+(X_2-\mathbf{E}X_2))^2 \\
&= \mathbf{E}\Big((X_1-\mathbf{E}X_1)^2+(X_2-\mathbf{E}X_2)^2\Big) \\
&\quad +2\cdot(X_1-\mathbf{E}X_1)\cdot(X_2-\mathbf{E}X_2) \\
&= \mathbf{E}(X_1-\mathbf{E}X_1)^2+\mathbf{E}(X_2-\mathbf{E}X_2)^2 \\
&\quad +2\cdot\mathbf{E}((X_1-\mathbf{E}X_1)\cdot(X_2-\mathbf{E}X_2)) \\
&= \operatorname{Var}X_1+2\cdot\operatorname{cov}(X_1,X_2)+\operatorname{Var}X_2
\end{aligned}
$$

$\square$

Lemma 14 *Es seien X_1 und X_2 zwei unabhängige Zufallsgrößen. Dann gilt:*

$$\text{cov}\,(X_1, X_2) = 0.$$

Beweis: Wir betrachten den zufälligen Vektor $\mathbf{X} = (X_1, X_2)^T$. Wir führen den Beweis nur für den Fall, daß die beiden Zufallsgrößen X_1 und X_2 und damit der Vektor $\mathbf{X}$ stetig sind. Für den diskreten Fall verfährt man analog.
Es sei f die Dichtefunktion des zufälligen Vektors $\mathbf{X}$. Wir definieren eine Funktion $g\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ durch:

$$g(X_1, X_2) := (X_1 - \mathbf{E}X_1) \cdot (X_2 - \mathbf{E}X_2).$$

Offenbar,

$$\text{cov}\,(X_1, X_2) = \mathbf{E}g(X_1, X_2).$$

Außerdem ist:

$$\mathbf{E}g(X_1, X_2) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} (x_1 - \mathbf{E}X_1) \cdot (x_2 - \mathbf{E}X_2) \cdot f(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2.$$

Nach Voraussetzung sind die zufälligen Variablen X_1 und X_2 unabhängig, also

$$f(x_1, x_2) = f_{X_1}(x_1) \cdot f_{X_2}(x_2).$$

Somit gilt dann:

$\text{cov}\,(X_1, X_2) =$

$$\begin{aligned}
&= \int\limits_{\mathbb{R}^2} (x_1 - \mathbf{E}X_1) \cdot (x_2 - \mathbf{E}X_2) \cdot f_{X_1}(x_1) \cdot f_{X_2}(x_2)\, dx_1\, dx_2 \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}} (x_1 - \mathbf{E}X_1) \cdot f_{X_1}(x_1)\, dx_1 \cdot \int\limits_{\mathbb{R}} (x_2 - \mathbf{E}X_2) \cdot f_{X_2}(x_2)\, dx_2 \\
&= \mathbf{E}(X_1 - \mathbf{E}X_1) \cdot \mathbf{E}(X_2 - \mathbf{E}X_2) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Das ist die Aussage. $\square$

Bem. 6 *Wir haben beim Beweis des Satzes zwei Aussagen verwendet, die erst im Abschnitt Unabhängigkeit behandelt werden.*

Die Umkehrung der Aussage von Lemma 14 gilt im allgemeinen nicht, wie das folgende Beispiel zeigt:

Bsp. 46 *Es sei* X_1 *eine über dem Intervall* $[0, \pi[$ *gleichverteilte Zufallsgröße,* $X_1 \sim R(0, \pi)$*) mit der Dichtefunktion*

$$f_{X_1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & \text{, \textit{falls} } 0 \leq x < \pi \\ 0 & \text{, \textit{sonst}} \end{cases} \quad .$$

Die Zufallsgröße X_2 *definieren wir durch* $X_2 = \sin X_1$*. Offenbar,* X_1 *und* X_2 *sind streng abhängig. Für die Kovarianz der beiden Zufallsgrößen gilt:*

$\mathrm{cov}\,(X_1, X_2) =$

$$\begin{aligned}
&= \mathbf{E}((X_1 - \mathbf{E}X_1) \cdot (X_2 - \mathbf{E}X_2)) \\
&= \mathbf{E}(X_1 \cdot X_2 - X_1 \cdot \mathbf{E}X_2 - X_2 \cdot \mathbf{E}X_1 + \mathbf{E}X_1 \cdot \mathbf{E}X_2) \\
&= \mathbf{E}(X_1 \cdot X_2) - \mathbf{E}(X_1 \cdot \mathbf{E}X_2) - \mathbf{E}(X_2 \cdot \mathbf{E}X_1) + \mathbf{E}X_1 \cdot \mathbf{E}X_2 \\
&= \mathbf{E}(X_1 \cdot X_2) - \mathbf{E}X_1 \cdot \mathbf{E}X_2
\end{aligned}$$

Nun gilt für die Erwartungswerte $\mathbf{E}X_1$ *und* $\mathbf{E}X_2$*:*

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}X_1 &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_{X_1}(x)\,dx = \int\limits_{0}^{\pi} x \cdot \frac{1}{\pi}\,dx \\
&= \frac{1}{\pi} \cdot \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^\pi = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi^2}{2} = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}X_2 &= \mathbf{E}(\sin X_1) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin x \cdot f_{X_1}(x)\,dx \\
&= \int\limits_0^{\pi} \sin x \cdot \tfrac{1}{\pi}\,dx = \tfrac{1}{\pi} \cdot [-\cos x]_0^{\pi} = \tfrac{2}{\pi}
\end{aligned}
$$

Für den Erwartungswert $\mathbf{E}(X_1 \cdot X_2)$ *gilt nach der Regel des*

Faulen Statistikers

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(X_1 \cdot X_2) &= \mathbf{E}(X_1 \cdot \sin X_1) = \int_0^\pi x \cdot \sin x \cdot \tfrac{1}{\pi}\, dx \\
&= \left[-\tfrac{1}{\pi} \cdot x \cdot \cos x\right]_0^\pi + \tfrac{1}{\pi} \cdot \underbrace{\int_0^\pi \cos x \, dx}_{=0} \\
&= -\tfrac{1}{\pi} \cdot \big((-1)\pi\big) = 1
\end{aligned}$$

Wir setzen alle diese Werte in die Ausgangsgleichung ein und erhalten:

$$\begin{aligned}
\operatorname{cov}(X_1, X_2) &= \mathbf{E}(X_1 \cdot X_2) - \mathbf{E}X_1 \cdot \mathbf{E}X_2 \\
&= 1 - \tfrac{\pi}{2} \cdot \tfrac{2}{\pi} = 0
\end{aligned}$$

Trotz der Abhängigkeit der beiden Zufallsgrößen X_1 und X_2 ist ihre Kovarianz gleich Null. Folglich läßt sich die Aussage von Lemma 14 nicht umkehren.

Folg. 5 *Falls zwei zufällige Variablen X_1 und X_2 unabhängig sind, gilt für die Varianz ihrer Summe:*

$$\mathrm{Var}\,(X_1 + X_2) = \mathrm{Var}\,(X_1) + \mathrm{Var}\,(X_2).$$

Beispiele

a) Poisson-Verteilung, $X \sim Poi(\lambda)$.

$$p_i = P(X = i) = \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}\,(X) &= \mathbf{E}(X - \mathbf{E}X)^2 = \sum_{i=0}^{\infty} (i-\lambda)^2 p_i \\
&= \sum_{i=2}^{\infty} i \cdot (i-1) p_i + \sum_{i=0}^{\infty} i p_i - 2\lambda \sum_{i=0}^{\infty} i p_i + \lambda^2 \sum_{i=0}^{\infty} p_i \\
&= \lambda^2 \sum_{i=2}^{\infty} \frac{\lambda^{i-2}}{(i-2)!} e^{-\lambda} + \lambda - 2\lambda^2 + \lambda^2 = \lambda.
\end{aligned}$$

b) Binomialverteilung, $X \sim B(n, p)$.

$$\mathrm{Var}\,(X) = np(1-p).$$

(ohne Beweis, ÜA)

c) Gleichverteilung auf (a,b), $X \sim R(a,b)$.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in (a,b) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \\
\mathbf{E}X &= \frac{a+b}{2}. \\
\mathbf{E}X^2 &= \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a}\, dx = \frac{1}{3} x^3 \Big|_a^b \cdot \frac{1}{b-a} \\
&= \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} = \frac{a^2 + ab + b^2}{3}. \\
\mathrm{Var}\,(X) &= \mathbf{E}X^2 - (\mathbf{E}X)^2 \\
&= \frac{1}{12}(4a^2 + 4ab + 4b^2 - 3a^2 - 6ab - 3b^2) \\
&= \frac{1}{12}(a^2 - 2ab + b^2) = \frac{(b-a)^2}{12}.
\end{aligned}
$$

d) Exponentialverteilung

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \begin{cases} \lambda e^{-\lambda\cdot x} & \text{falls } x \geq 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \\
\mathbf{E}X &= \frac{1}{\lambda}. \\
\mathbf{E}X^2 &= \int_0^\infty x^2 \lambda e^{-\lambda\cdot x}\, dx = \frac{2}{\lambda^2} \quad \text{(ÜA)}. \\
\operatorname{Var}(X) &= \frac{1}{\lambda^2}.
\end{aligned}
$$

e) Normalverteilung

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}\,dx \\
\mathbf{E}(X-\mu)^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}\,dx \\
&= \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} t^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt \\
&= \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} (-t)(-t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}})\,dt \\
&= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \Big(-te^{-t^2/2}\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} (-1) e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt \Big) \\
&= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt \\
&= \sigma^2.
\end{aligned}
$$

$$t = \frac{x-\mu}{\sigma}, \qquad \sigma\, dt = dx$$

Bei Normalverteilung sind also die Parameter μ und σ^2 Erwartungswert und Varianz.

7.3 Schiefe und Exzeß

Angenommen, das 4. Moment existiert.

$$\sigma_X = \sqrt{Var(X)} \quad \text{(Standardabweichung)}$$

$$\text{Schiefe} \quad \gamma_1 = \frac{\mathbf{E}(X - \mathbf{E}X)^3}{(\text{Var}X)^{3/2}}$$

$$\text{Kurtosis} \quad \gamma_2 = \frac{\mathbf{E}(X - \mathbf{E}X)^4}{(\text{Var}X)^2}$$

$\gamma_1 > 0$: rechtsschiefe Verteilung

$\gamma_1 = 0$: symmetrische Verteilung

$\gamma_1 < 0$: linksschiefe Verteilung

$\gamma_2 > 3$: starke Tails

$\gamma_2 = 3$: Wölbung wie bei NV

$\gamma_2 < 3$: schwache Tails

Bem.: Diese Klassifikation ist recht vage. Es gibt mehrere Verteilungen mit gleichem Erwartungswert, gleicher Varianz, gleicher Schiefe und gleicher Kurtosis, die aber recht unterschiedlich aussehen.