Def. 20 : *Sei X stetig mit Dichtefunktion $f(x)$. Die Größe*

$$\mathbf{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx$$

heißt Erwartungswert von X.

Bsp. a) $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}X &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} e^{-(\frac{x-\mu}{\sigma})^2/2} dx \\
&= \int\limits_{-\infty}^{\infty} (\sigma t + \mu) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-t^2}{2}} dt \\
&= \mu + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sigma \cdot t \cdot e^{\frac{-t^2}{2}} \, dt \\
&= \mu.
\end{aligned}
$$

$$\frac{x-\mu}{\sigma} = t, \quad dt = \frac{1}{\sigma} dx$$

b) $X \sim Exp(\lambda), \qquad \lambda > 0$

$$\mathbf{E}X = \int\limits_0^\infty x \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x} dx = \frac{1}{\lambda}$$

c) $X \sim R(a, b)$

gleichverteilt auf dem Intervall (a,b).

$$\begin{aligned} \mathbf{E}X &= \frac{1}{b-a} \int\limits_a^b x dx = \frac{1}{b-a} \frac{x^2}{2} \Big|_a^b \\ &= \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}. \end{aligned}$$

Bem. 3 *Die Erwartungswerte sind für stetige und diskrete Zufallsgrößen zweckmäßigerweise unterschiedlich definiert. Sie läßt sich jedoch (maßtheoretisch) vereinheitlichen.*

Satz 11 (Eigenschaften des Erwartungswertes) *Es seien X, X_1 und X_2 beliebige zufällige Variablen. $a, b, c \in \mathbb{R}$ seien ebenfalls beliebig gewählt. Dann gelten folgende Aussagen:*

1. *Wenn $P(X = c) = 1$, d.h. nimmt die zufällige Variable X genau einen festen Wert an, so folgt $\mathbf{E}X = \mathbf{E}c = c$.*

2. *Wenn $P(X \geq c) = 1$, so $\mathbf{E}X \geq c$.*

3. $\mathbf{E}(c \cdot X) = c \cdot \mathbf{E}X$.

4. $\mathbf{E}(X + c) = \mathbf{E}X + \mathbf{E}c = \mathbf{E}X + c$.

5. $\mathbf{E}(a \cdot X_1 + b \cdot X_2) = a \cdot \mathbf{E}X_1 + b \cdot \mathbf{E}X_2$.

Beweis: Wir beweisen stellvertretend Aussage 2 dieses Satzes. Da wir den Erwartungswert für diskrete und stetige zufällige Variablen unterschiedlich definiert haben, müssen wir die Aussage für beide Arten von Zufallsgrößen getrennt beweisen.

- Es sei X eine diskrete Zufallsgröße,

$$X : \quad \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n & \ldots \\ p_1 & p_2 & \ldots & p_n & \ldots \end{pmatrix}$$

  Nach Voraussetzung: $c = x_1 < x_2 < \ldots < x_n < \ldots$.
  Daraus folgt:

$$\mathbf{E}X = \sum_{i \in \mathbb{N}} x_i \cdot p_i \geq \sum_{i \in \mathbb{N}} c \cdot p_i = c \cdot \sum_{i \in \mathbb{N}} p_i = c.$$

  Das ist die Aussage.

- Es sei X eine stetige zufällige Variable mit der Dichtefunktion f. Dann gilt:

$$P(X \geq c) = \int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx = 1. \quad \Rightarrow$$

$$P(X < c) = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx = 0. \quad \Rightarrow$$

$$\mathbf{E}X = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)\,dx = \int_{c}^{+\infty} x \cdot f(x)\,dx \geq c \cdot \underbrace{\int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx}_{=1} = c$$

$\square$

Bem.: Ergänzungen:

- Aus Aussage 4 folgt:

$$\mathbf{E}(X - \mathbf{E}X) = \mathbf{E}X - \mathbf{E}(\mathbf{E}X) = 0.$$

- Aussage 5 besagt, daß der Erwartungswert eine linearer Operator ist.

Frage: Wie berechnen wir $\mathbf{E}(g(X))$?

1. Variante: Dichte von $Y = g(X)$ ausrechnen. Wie man das macht, sehen wir später.
   Dann $\mathbf{E}(Y) = \int y f_Y(y)\, dy$ ausrechnen.

2. Variante (einfacher)

Satz 12 (Regel des faulen Statistikers) *Seien X und $Y = g(X)$ Zufallsgrößen. Dann gilt:*

$$\mathbf{E}(g(X)) = \begin{cases} \sum_{i=0}^{\infty} g(x_i) p_i, & \textit{falls X diskret} \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x)\, dx, & \textit{falls X stetig} \end{cases}$$

vorausgesetzt die Erwartungswerte existieren.

Bem. 4 *Intuitive Erläuterung: Spiel, wobei wir X zufällig ziehen. Dann zahle ich den 'Gewinn' $Y = g(X)$. Ihr erwartetes Einkommen ist dabei*

$$\sum_x g(x)P(X = x)$$

(oder das Integral).

Bem. 5 *Spezialfall: $g(x) = I_A(x)$ Indikatorfunktion eines Ereignisses A.*

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(I_A(X)) &= \int I_A(x) f_X(x)\, dx = \int_A f_X(x)\, dx \\ &= P(X \in A) = P(A).\end{aligned}$$

D.h. Die Wahrscheinlichkeit ist ein Speziallfall eines Erwartungswertes!

Bsp. 43 *Sei* $X \sim \mathbb{R}(0,1)$ *und* $Y = g(X) = e^X$. *Dann*

$$\mathbf{E}(Y) = \int_0^1 e^x f(x)\,dx = \int_0^1 e^x\,dx = e - 1.$$

Bsp. 44 *Nehmen einen Stab der Länge 1, und brechen ihn zufällig. Sei* Y *die Länge des längeren Stücks. Gesucht ist die erwartete Länge* $\mathbf{E}(Y)$.

Wenn X *der zufälllige Bruchpunkt ist, dann* $X \sim \mathbf{R}(0,1)$ *und* $Y = g(X) = \max(X, 1-X)$. *D.h.*

$$g(x) = \begin{cases} 1-x & \textit{falls} \quad 0 < x < 0.5 \\ x & \textit{falls} \quad 0.5 < x < 1 \end{cases}$$

$$\mathbf{E}(Y) = \int_0^1 g(x) f(x)\,dx = \int_0^{0.5} (1-x)\,dx + \int_{0.5}^1 x\,dx = \frac{3}{4}.$$

Beweis: (Regel des Faulen Statistikers)

Wir zeigen die letzte Behauptung unter der Annahme g: $R \to R$ differenzierbar, $g'(x) \neq 0 \quad \forall x$.
Nach der Def. des Erwartungswertes gilt:

$$\mathbf{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot h(y)\, dy,$$

wobei $h(y)$ die Dichte von $Y = g(X)$ ist.

Wir bestimmen jetzt $h(y)$:

1. Fall: Sei g monoton wachsend.

$$\begin{aligned} F_Y(t) &= F_{g(X)}(t) = \\ P(g(X) < t) &= P(X < g^{-1}(t)) = \int\limits_{-\infty}^{g^{-1}(t)} f(x)\,dx \end{aligned}$$

Substitution: $g(x) = y, \quad g'(x)dx = dy.$

$$F_{g(X)}(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} \frac{f(g^{-1}(y))}{g'(g^{-1}(y))} dy$$

$$\Rightarrow \quad \frac{f(g^{-1}(y))}{g'(g^{-1}(y))} = h(y) \qquad \text{ist Dichte von} \quad g(X)$$

2. Fall: Sei g monoton fallend.

$$\begin{aligned} F_Y(t) &= F_{g(X)}(t) = \\ P(g(X) < t) &= P(X > g^{-1}(t)) = \int\limits_{g^{-1}(t)}^{\infty} f(x)\,dx \end{aligned}$$

Substitution: $g(x) = y, \quad g'(x)dx = dy, \quad g(\infty) = -\infty$

$$\begin{aligned} F_{g(X)}(t) &= \int\limits_{t}^{-\infty} \frac{f(g^{-1}(y))}{g'(g^{-1}(y)} dy = -\int\limits_{t}^{-\infty} \frac{f(g^{-1}(y))}{|g'(g^{-1}(y)|} dy \\ &= \int\limits_{-\infty}^{t} \frac{f(g^{-1}(y))}{|g'(g^{-1}(y)|} dy \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{f(g^{-1}(y))}{|g'(g^{-1}(y))|} = h(y) \qquad \text{ist Dichte von} \quad g(X)$$

$$\Rightarrow \mathbf{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot h(y)\, dy = \int\limits_{-\infty}^{\infty} y \cdot \frac{f(g^{-1}(y))}{g'(g^{-1}(y))} dy$$

Substitution: $y = g(x), dy = g'(x)dx$

$$\mathbf{E}(g(X)) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx.$$

$\square$

Bsp. 45 (Fortsetzung von Bsp. 43)

Es war $X \sim \mathbf{R}(0,1)$, $Y = g(X) = e^X$. *Also*

$g(x) = e^x, \quad g'(x) = e^x, \quad g^{-1}(y) = \ln y$. *Also*

$$h(y) = \frac{f(g^{-1}(y))}{g'(g^{-1}(y))} = \frac{1}{e^{\ln y}} = \frac{1}{y},$$

$1 \le y \le e$.

$$\mathbf{E}(Y) = \int_1^e y \cdot h(y)\, dy = \int_1^e y \cdot \frac{1}{y}\, dy = \int_1^e 1\, dy = e - 1$$

dasselbe Resultat wie mit der Regel des Faulen Statistikers.