8 Die Exponentialverteilung

8.1 Einführung

Modelle

Zuverlässigkeitsmodelle

Lebensdauermodelle

Bedienungsmodelle.

Def. 26 (Exponentialverteilung) *Sei X eine Zufallsvariable mit Werten in $[0, \infty)$. Sie heißt exponentialverteilt mit dem Parameter λ, $\lambda > 0$, falls die Verteilungsfunktion beschrieben wird durch*

$$F(t) = P(X < t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t} & \text{falls} \quad t \geq 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Dichte der Exponentialverteilung ist

$$f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{falls} \quad t \geq 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Erwartungswert

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}X &= \int_0^\infty x \cdot f(x)\,dx \\
&= \int_0^\infty \underset{u}{x} \cdot \underset{v'}{\lambda e^{-\lambda x}}\,dx \\
&= \underset{u}{x} \cdot \underset{v}{(-e^{-\lambda x})}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty \underset{u'}{1} \cdot \underset{v}{(-e^{-\lambda x})}\,dx \\
&= 0 + \int_0^\infty e^{-\lambda x}\,dx = \frac{-1}{\lambda} \cdot e^{-\lambda x}\Big|_0^\infty = \frac{1}{\lambda}.
\end{aligned}
$$

Der Erwartungswert einer exponential verteilten Zufallsvariable, $X \sim Exp(\lambda)$, ist

$$\mathbf{E}X = \frac{1}{\lambda}.$$

Varianz

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}X^2 &= \int_0^\infty x^2 \cdot f(x)\,dx \\
&= \int_0^\infty x^2 \cdot \lambda e^{-\lambda x}\,dx \\
&\qquad\quad u \qquad v' \\
&= x^2(-e^{-\lambda x})\Big|_0^\infty - \int_0^\infty 2x \cdot (-e^{-\lambda x})\,dx \\
&\quad u \qquad\qquad v \qquad\qquad\qquad\qquad u' \qquad\quad v \\
&= \frac{2}{\lambda} \cdot \mathbf{E}X = \frac{2}{\lambda^2}.
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}X &= \mathbf{E}X^2 - (\mathbf{E}X)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2} \\
\sigma_X &= \frac{1}{\lambda} \quad \text{(Standardabweichung)} \\
\text{Schiefe} &= \frac{\mathbf{E}(X - \mathbf{E}X)^3}{(\mathrm{Var}X)^{3/2}} = 2 \\
\text{Kurtosis} &= \frac{\mathbf{E}(X - \mathbf{E}X)^4}{(\mathrm{Var}X)^2} = 9
\end{aligned}$$

Bsp 47 *Die zufällige Wartezeit eines Kunden am Schalter sei exponentialverteilt mit einem Erwartungswert von 10 min.*

Wie groß ist die Wkt,. dass Sie mindestens 15 min. warten müssen?

X*: zufällige Wartezeit eines Kunden am Schalter,*

$$X \sim Exp(\lambda), \quad \lambda = \frac{1}{10}.$$

Frage: $P(X > 15)$ *?*

$$\begin{aligned} P(X > 15) &= e^{-15\lambda} \\ &= e^{-1.5} \approx 0.220. \end{aligned}$$

 W.Kössler, Humboldt-Universität zu Berlin

8.2 Gedächtnislosigkeit

Def. 27 (Gedächtnislosigkeit) *Eine Verteilung P (mit Verteilungsfunktion F) heißt gedächtnislos, wenn für alle $s, t \geq 0$, gilt:*

$$P(X > s + t | X > t) = P(X > s).$$

Bem. 9 *Bei stetigen Verteilungen ist das äquivalent zu*

$$P(X \geq s + t | X \geq t) = P(X \geq s).$$

Es gilt (Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit)

$$\begin{aligned} P(X \geq s+t | X \geq t) &= \frac{P(\{X \geq s+t\} \cap \{X \geq t\})}{P(X \geq t)} \\ &= \frac{P(X \geq s+t)}{P(X \geq t)}. \end{aligned}$$

Eine Verteilung(sfunktion) ist also gedächtnislos, genau dann wenn

$$\frac{P(X \geq s+t)}{P(X \geq t)} = P(X \geq s)$$

bzw.

$$\frac{1 - F(s+t)}{1 - F(t)} = 1 - F(s).$$

Def. 28 *Die Funktion*

$$G(t) = 1 - F(t)$$

heißt Überlebensfunktion (oder Zuverlässigkeitsfunktion).

Die Verteilungsfunktion F (mit der Überlebensfunktion G) ist also gedächtnislos genau dann wenn

$$G(s+t) = G(s) \cdot G(t) \quad \text{für alle} \quad s, t \geq 0$$

Cauchy- Funktionalgleichung

Satz 20 *Die Exponentialverteilung ist gedächtnislos.*

Beweis: Die Verteilungsfunktion ist

$$F(t) = P(X < t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t} & \text{falls} \quad t \geq 0 \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

und die Überlebensfunktion

$$G(t) = 1 - F(t) = 1 - (1 - e^{-\lambda t}) = e^{-\lambda t}.$$

Folglich erhalten wir

$$G(s + t) = e^{-\lambda(s+t)} = e^{-\lambda s} e^{-\lambda t} = G(s) \cdot G(t).$$

$\square$

Satz 21 *Sei F eine stetige Verteilungsfunktion mit $F(0) = 0 \quad$ und $\quad G(t) = 1 - F(t)$. Es gelte die Cauchy-Funktionalgleichung*

$$G(s+t) = G(s) \cdot G(t) \quad \textit{für alle} \quad s, t \geq 0. \qquad (1)$$

Dann gilt für alle t, $t > 0$,

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t},$$

wobei $\lambda > 0$. D.h. F ist Exponential-Verteilungsfunktion.

Beweis: 1. Es gilt:

$$G(t) = G(\frac{t}{2} + \frac{t}{2}) = \big(G(\frac{t}{2})\big)^2 \geq 0,$$

d.h. $G(t) \geq 0$ für alle t.

Angenommen, es existiert ein t_0 mit $G(t_0) = 0$, dann folgt:

$$G(t) = G(t - t_0 + t_0) = G(t - t_0) \cdot G(t_0) = 0$$

für alle t, d.h. wir erhalten die triviale Lösung für die obige Cauchy-Funktionalgleichung, die jedoch wegen $G(0) = 1 - F(0) = 1$ nicht zugelassen ist.

2. Es gilt also $G(t) > 0$ für alle t.

Sei m, $m > 0$, eine natürliche Zahl. Dann folgt aus (1) für alle $t > 0$:

$$G(t) \quad = \quad G(\underbrace{\frac{t}{m} + \ldots + \frac{t}{m}}_{m \text{ mal}}) = \big(G(\frac{t}{m})\big)^m,$$

insbesondere

$$G(1) = \big(G(\frac{1}{m})\big)^m \qquad \text{oder} \qquad G(\frac{1}{m}) = \big(G(1)\big)^{\frac{1}{m}}$$

3. Für rationale Zahlen $r = \frac{m}{n}$ erhalten wir

$$\begin{aligned} G(r) &= G(\frac{n}{m}) = G(\underbrace{\frac{1}{m} + \ldots + \frac{1}{m}}_{n \text{ mal}}) \\ &= \big(G(\frac{1}{m})\big)^n \\ &= \big(G(1)\big)^{\frac{n}{m}} \\ &= \big(G(1)\big)^r. \end{aligned}$$

4. Da die Funktion $(G(1))^t$ stetig ist auf $\mathbb{R}^+$ folgt für alle $t > 0$:

$$G(t) = G(1)^t = e^{t \cdot \ln(G(1))}$$

5. Wir setzen $\lambda := -\ln G(1)$.

Da F als Verteilungsfunktion monoton wachsend ist, ist G monoton fallend, d.h. $\ln G(1) < 0$ und $\lambda > 0$. Wir erhalten demnach

$$G(t) = e^{-\lambda \cdot t},$$

also

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda \cdot t}.$$

Bsp 48 (Fortsetzung von Beispiel 1) *Der Kunde hat schon 10 min. gewartet. Wie groß ist die Wkt., daß er insgesamt länger als 15 min. warten muss ?*

$$
\begin{aligned}
P(X > 15 | X > 10) = P(X > 5) &= e^{-5\lambda} = e^{-0.5} \\
&\approx 0.604.
\end{aligned}
$$

Bsp 49 *Postschalter mit 2 Personen besetzt. Die Bedienungszeit sei zufällig, exponential verteilt, mit Erwartungswert $\frac{1}{\lambda}$. Es werden gerade zwei Kunden bedient, Sie sind der nächste.*

Frage: Wkt. dafür, daß Sie nicht der letzte der 3 Kunden sind?

Antwort: Sie werden bedient, sobald der erste Platz frei wird.
Wegen der Gedächtnislosigkeit der Exponentialverteilung hat die Bedienungszeit des anderen Kunden dieselbe Verteilung wie Ihre.

$$P = 0.5.$$

Bem. 10 *Unter den diskreten Verteilungen hat nur die geometrische Verteilung diese Eigenschaft (siehe Abschnitt 6).*

8.3 Zuverlässigkeitsmodelle

Def. 29 (Zuverlässigkeit) *Die Zuverlässigkeit eines Systems ζ ist die Wahrscheinlichkeit, dass das System zum Zeitpunkt t intakt ist:*

$$\textit{Rel}(\zeta) = P(X \geq t).$$

Annahme:

Das System besteht aus mehreren Komponenten

Die Komponenten sind unabhängig

$X_i \sim Exp(\lambda_i)$.

- Reihensystem
- Parallelsystem
- k aus n System
- Proversionswahrscheinlichkeit
- Faltung

Reihensystem ζ_R

$G_1(t)$ $\qquad$ $G_n(t)$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Rel}(\zeta_R) &= P(X_R \geq t) = P(X_1 \geq t, \ldots, X_n \geq t) = \\
&= \prod_{i=1}^{n} P(X_i \geq t) = \prod_{i=1}^{n} G_i(t) = \\
&= \prod_{i=1}^{n} e^{-\lambda_i t} = \exp\Big(-\sum_{i=1}^{n} \lambda_i t\Big).
\end{aligned}$$

Die zufällige Lebensdauer X_R des Reihensystems ist

$$X_R \sim Exp\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right).$$

Die mittlere Lebensdauer des Reihensystems ist

$$\mathbf{E}X_R = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i}.$$

Reihensystem:

$$\mathrm{Rel}(\zeta_R) = e^{\left(-\sum_{i=1}^{n} \lambda_i t\right)},$$

$$n \to \infty, \lambda_i = \lambda: \quad \mathrm{Rel}(\zeta_R) \quad \to 0.$$

$$n \to \infty, \sum_{i=1}^{n} \lambda_{i,n} \to \lambda: \quad \mathrm{Rel}(\zeta_R) \quad \to e^{-\lambda t}$$

D.h. die Lebensdauer X_R des Reihensystems ist, wenn

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i < \infty,$$

asymptotisch wieder exponentialverteilt.

Die Exponentialverteilung ist eine sogenannte Extremwertverteilung.

Bem. 11 *Die Lebensdauer X_R des Reihensystems kann beschrieben werden durch*

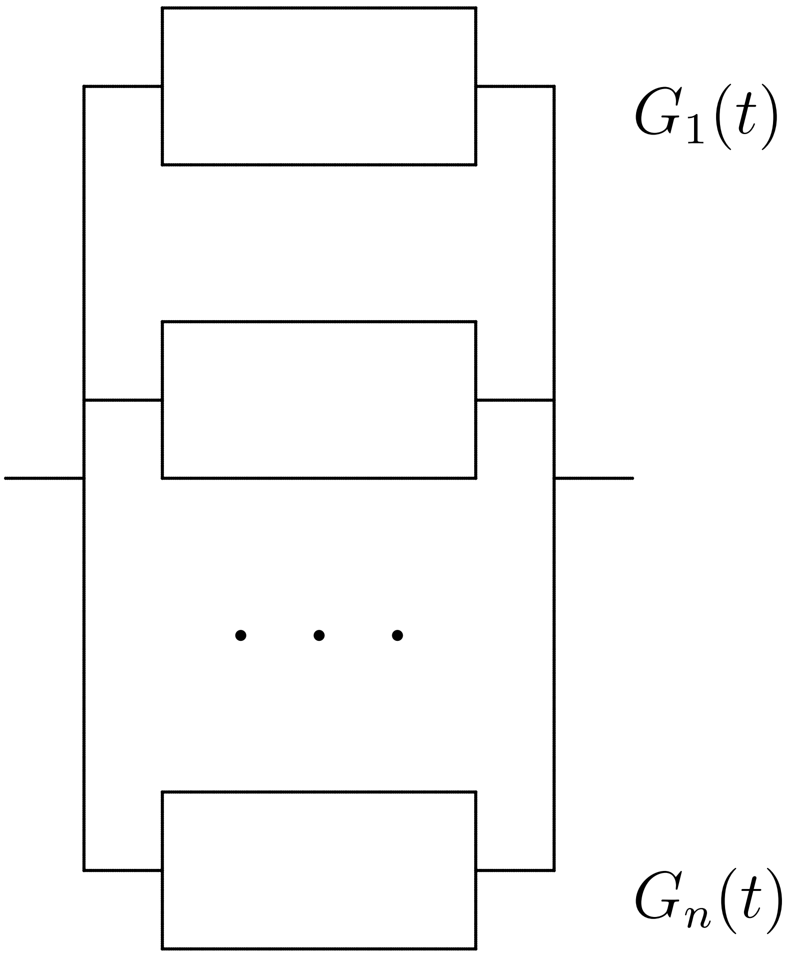
$$X_R = \min_i X_i.$$

Die Zufallsvariable X_R hat oft (auch dann wenn nicht $X_i \sim Exp(\lambda)$) asymptotisch eine Weibull-Verteilung mit der Dichte

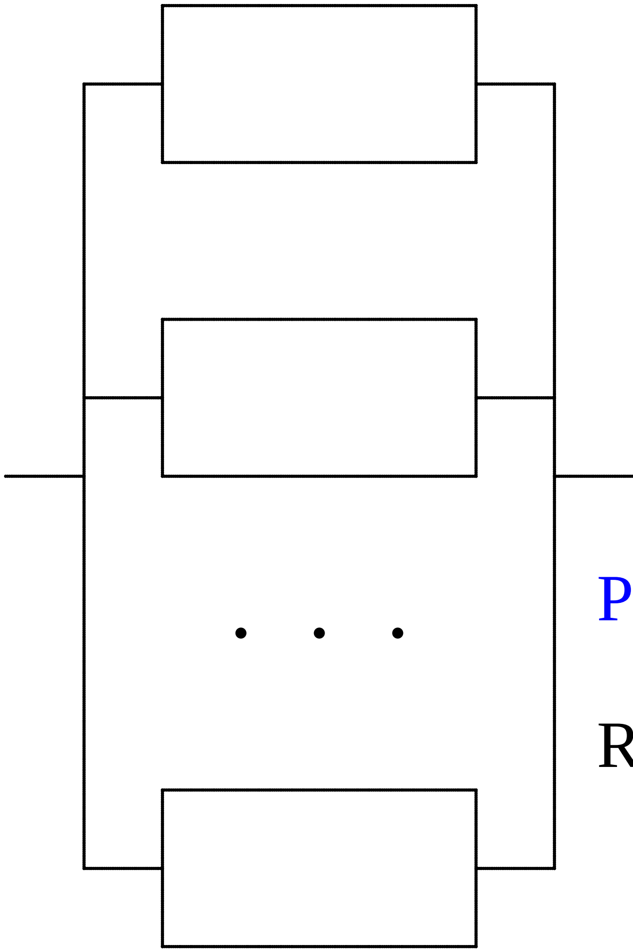
$$f(t) = b(\lambda t)^{b-1} e^{-(\lambda t)^b}, \quad t > 0, b > 0, \lambda > 0.$$

Das ist dann der Fall, wenn die Dichte der unabhängig und identisch verteilten Zufallsvariablen X_i 'kurze' Tails hat.

Parallelsystem ζ_P



$$
\begin{aligned}
\text{Rel}(\zeta_P) &= P(X_P \geq t) = 1 - P(X_P < t) \\
&= 1 - \underbrace{P(X_1 < t, \ldots, X_n < t)}_{\substack{\text{alle Komponenten sind} \\ \text{vor dem Zeitpunkt } t \\ \text{ausgefallen}}} = \\
&= 1 - \prod_{i=1}^{n} P(X_i < t) \\
&= 1 - \prod_{i=1}^{n} F_i(t) \\
&= 1 - (1 - e^{-\lambda t})^n \quad \text{wenn} \quad \lambda_i = \lambda \quad \forall i
\end{aligned}
$$



Parallelsystem

$$\text{Rel}(\zeta_P) \;=\; 1-(1-e^{-\lambda t})^n$$

$$n\to\infty, \lambda_i=\lambda: \quad \text{Rel}(\zeta_P) \;\to 1$$

$$n\to\infty: \quad \text{Rel}(\zeta_P) \;\sim 1-e^{-e^{-\lambda t+\ln n}}$$

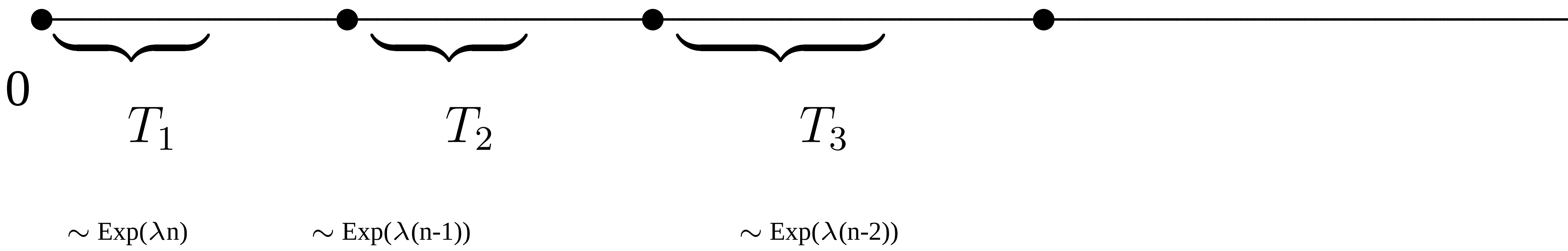
Das ist auch eine Extremwertverteilung, die sogenannte Gumbel-Verteilung.

Bem. 12 *Die Lebensdauer* X_P *des Parallelsystems kann beschrieben werden durch*

$$X_P = \max_i X_i.$$

Der Fall der Gumbel-Verteilung tritt ein, wenn X_i *'mittlere' Tails hat.*

Mittlere Lebensdauer des Parallelsystems ($\lambda_i = \lambda$)



T_1: Wartezeit bis zum ersten Ausfall einer Komponente

T_i: Wartezeit zwischen $(i-1)$-tem und i-tem Ausfall einer Komponente

$$X_P = \sum_{i=1}^{n} T_i.$$

Zwischen $(i-1)$-tem und i-tem Ausfall einer Komponente arbeiten genau $n-i+1$ Komponenten gleichzeitig. Die Lebensdauer dieses Teilsystems aus $n-i+1$ Komponenten (Reihensystem) hat eine Exponentialverteilung mit Parameter $\mu_i = (n-i+1)\cdot\lambda$,

$$\mathbf{E}T_i = \frac{1}{\mu_i} = \frac{1}{n-i+1}\cdot\frac{1}{\lambda}$$

$$\mathbf{E}X_P = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\mu_i} = \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n-i+1} = \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}.$$

k **aus** n **Systeme**

Das System fällt aus, wenn k Komponenten ausgefallen sind.

Lebensdauer:

$$T = \sum_{i=1}^{k} T_i.$$

Mittlere Lebensdauer:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}T &= \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\mu_i} \\
&= \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{n-i+1} \\
&= \frac{1}{\lambda} \Big(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \cdots \frac{1}{n-k+1} \Big).
\end{aligned}
$$

n aus n-System: Parallelsystem

1 aus n-System: Reihensystem

Proversionswahrscheinlichkeiten

Problem: Reihensystem mit 2 Komponenten und der
zufälligen Lebensdauer X_1, X_2:
$X_1 \sim Exp(\lambda_1), \quad X_2 \sim Exp(\lambda_2).$
System fällt aus.

Mit welcher Wkt. liegt das an der ersten Komponente?

$$
\begin{aligned}
P(X_1 < X_2) &= \int_0^\infty P(X_1 < X_2 | X_2 = t) f_2(t) dt \\
&= \int_0^\infty P(X_1 < t) \cdot \lambda_2 e^{-\lambda_2 t}\, dt \\
&= \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda_1 t}) \cdot \lambda_2 e^{-\lambda_2 t}\, dt \\
&= 1 - \int_0^\infty \lambda_2 e^{-(\lambda_1 + \lambda_2) t}\, dt
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(X_1 < X_2) &= 1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \\
&= \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}.
\end{aligned}
$$

Beispiel: $\frac{1}{\lambda_1} = 1000h, \frac{1}{\lambda_2} = 500h:$

$$
P(X_1 < X_2) = \frac{1}{3}.
$$

Faltung der Exponentialverteilung

System mit 2 Komponenten: Zunächst ist nur die erste Komponente eingeschaltet. Wenn diese ausfällt, wird automatisch die 2. Komponente zugeschaltet. Das System fällt aus, wenn beide Komponenten defekt sind.

Die Lebensdauern X_1, X_2 seien unabhängig und exponential, $X_1, X_2 \sim Exp(\lambda)$ verteilt.

Frage: Wkt. für Systemausfall?

$$\begin{aligned}
F(t) &= P(X_1 + X_2 < t) \\
&= \int_0^\infty P(X_1 + X_2 < t | X_2 = s) f(s) ds \\
&= \int_0^\infty P(X_1 < t - s) f(s) ds \\
&= \int_0^\infty F(t - s) f(s) ds \\
&= \int_0^t \left(1 - e^{-\lambda(t-s)}\right) \lambda e^{-\lambda s}\, ds \\
&= \int_0^t \lambda e^{-\lambda s}\, ds - \int_0^t \lambda e^{-\lambda t}\, ds \\
&= 1 - e^{-\lambda t} - \lambda t e^{-\lambda t}.
\end{aligned}$$

Dichte ($t > 0$):

$$\begin{aligned} F'(t) &= \lambda e^{-\lambda t} + \lambda^2 t e^{-\lambda t} - \lambda e^{-\lambda t} \\ &= \lambda^2 \cdot t \cdot e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

Erlang-Verteilung mit Parameter $(2, \lambda)$.

Bem. 13 *Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig, $X_i \sim Exp(\lambda)$, $i = 1, \ldots, n$. Dann ist*

$$X_1 + X_2 + \cdots X_n \sim \textit{Erlang}(n, \lambda).$$

Dichte:

$$f_{Erl}(t) = \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Beweis: *durch Induktion.* $\square$

Ausfallrate-Funktion

Def. 30 (Ausfallrate-Funktion) *Sei F eine Verteilungsfunktion mit Dichte f. Dann heißt*

$$\mu(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)}$$

Ausfallrate-Funktion (oder Hazardrate-Funktion).

Interpretation: Die Zufallsvariable X habe bereits die Zeit t überlebt.

Frage: Wie groß ist die Wkt., dass X den Zeitraum $[t, t + dt]$

nicht überlebt, also

$$
\begin{aligned}
P(X \le t + dt | X > t) &= \frac{P(X \in [t, t+dt])}{P(X > t)} \\
&= \frac{\int_t^{t+dt} f(x) dx}{1 - F(t)} \\
&= \frac{F(t+dt) - F(t)}{1 - F(t)} \\
&\approx \frac{f(t)dt}{1 - F(t)} = \mu(t)dt.
\end{aligned}
$$

$\mu(t)$: Rate mit der ein Bauteil, das t alt ist, ausfällt.

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

$$\mu(t) = \frac{\lambda e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t}} = \lambda.$$

Bei Exponentialverteilung ist die Ausfallrate konstant,

sie hängt nicht vom Zeitpunkt ab!

Übungsaufgabe: Sei F eine stetige Verteilungsfunktion mit

Dichte f und konstanter Ausfallrate. Zeigen Sie,

dass f Exponential-Dichte ist.

Hinweis: Setzen Sie $u(t) := 1 - F(t)$ und lösen

Sie die Differentialgleichung $u' - \lambda u = 0$.

Def. 31 (IFR, DFR)

- *Eine Verteilungsfunktion F hat Increasing Failure Rate (IFR), falls $\mu(t)$ monoton wachsend ist.*
- *F hat Decreasing Failure Rate (DFR), falls $\mu(t)$ monoton fallend ist.*

Bsp. 50 (Weibull-Verteilung)

Verteilungsfkt.: $\quad F(t) = 1 - e^{-(\lambda t)^b}, \quad t, \lambda, b > 0,$

Dichtefkt.: $\quad f(t) = b(\lambda t)^{b-1} e^{-(\lambda t)^b}$

$$\mu(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)} = \frac{b(\lambda t)^{b-1} e^{-(\lambda t)^b}}{e^{-(\lambda t)^b}} = b(\lambda t)^{b-1}$$

IFR *falls* $b > 1$

IFR, DFR *falls* $b = 1$ *(exp)*

DFR *falls* $b < 1$

- *System mit verdeckten Mängeln, aber langsamen "Altern"* $\rightarrow$ *Ausfallrate sinkt* $\rightarrow$ *Weibull,* $b < 1$

- *System mit wenig verdeckten Mängeln, aber schnellem "Altern"* $\rightarrow$ *Ausfallrate steigt* $\rightarrow$ *Weibull,* $b > 1$

Bsp. 51 (Hjorth-Verteilung)

Verteilungsfkt.: $F(t) = 1 - \frac{e^{-\lambda t^2/2}}{(1+bt)^{\gamma/b}}, \quad t, \lambda, \gamma, b > 0,$

Dichtefkt.: $f(t) = \frac{\lambda t(1+bt)+\gamma}{(1+bt)^{\gamma/b+1}}$

$$\mu(t) = \frac{f(t)}{1-F(t)} = \lambda t + \frac{\gamma}{1+\beta t}$$

fallend für $\lambda = 0$

badewannenförmig für $0 < \lambda < b\gamma$.

Die Hjorth-Verteilung modelliert also badewannenförmige Ausfallraten.

- zunächst fallen viele Objekte aus (Kinderkrankheiten)
- dann Ausfallrate zeitweilig konstant
- schliesslich mehren sich die Ausfälle aufgrund von Alterungserscheiningen.

Bedienungstheorie

M/M/s - Wartesystem

- $X \sim Exp(\lambda)$ Zeit zwischen Ankünften/Anforderungen
- Forderungen reihen sich in eine Warteschlange ein.
- $B \sim Exp(\mu)$ Bedienungszeiten, unabhängig
- s parallele Bedienungsplätze
- Bei frei werdendem Bedienungsplatz wird die nächste Forderung sofort bedient.

Fragestellungen:

- Mittlere Anzahl der Forderungen im System
- Mittlere Warteschlangenlänge
- Mittlere Wartezeit $\mathbf{E}W_t$

- Besetztwahrscheinlichkeit P_B
- Wartezeitverteilung

$$P(W_t \leq u) = 1 - P_B e^{-(s\mu-\lambda)u}$$

$$\mathbf{E}W_t = \frac{P_B}{s\mu - \lambda}.$$

Stationärer Fall, wenn $\frac{1}{s\mu} < \frac{1}{\lambda}$.

M/M/s - Verlustsystem

• $X \sim Exp(\lambda)$ Zeit zwischen Ankünften/Anforderungen

• Eine ankommende Forderung wird sofort bedient, wenn ein Bedienungsplatz frei ist, ansonsten geht sie verloren.

• $B \sim Exp(\mu)$ Bedienungszeiten, unabhängig

• s parallele Bedienungsplätze

Fragestellungen:

- Verlustwahrscheinlichkeit
- Mittlere Anzahl der besetzten Bedienungsplätze

Zusammenfassung (Exponentialverteilung)

- Exponentialdichte

$$f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{if} \quad t \geq 0 \\ 0 & \text{else.} \end{cases}$$

- Erwartungswert

$$\mathbf{E}X = \frac{1}{\lambda}.$$

- Überlebensfunktion

$$G(t) = 1 - F(t) = e^{-\lambda t}.$$

- Cauchy-Funktionalgleichung

$$G(s+t) = G(s) \cdot G(t).$$

- Die Exponential-Verteilung ist gedächtnislos.

- Die einzige gedächtnislose stetige Verteilung ist die
  Exponential-Verteilung

- Exponential-Verteilung ist eine Extremwertverteilung.

- Anwendungen in der Zuverlässigkeitstheorie.

  Reihensystem

  Parallelsystem

- Ausfallrate-Funktion

$$\mu(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)}.$$

- Die Ausfallratefunktion der Exponentialverteilung ist konstant.