

6 Diskrete zufällige Variablen

$$X(\omega) \in \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$$

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n & \cdots \\ p_1 & p_2 & p_3 & \cdots & p_n & \cdots \end{pmatrix}$$

$$p_i = P(X = x_i) > 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$$

Die Funktion

$$f(x_i) = p_i$$

heißt Wahrscheinlichkeitsfunktion.

Bem: $f(x_i)$ nennt man manchmal auch Zehldichte.

6.1 Allgemeine Übersicht

a) Zweimaliges Werfen einer Münze

$$\Omega = \{ZZ, ZB, BZ, BB\}$$

$X :=$ Anzahl von Blatt

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

b) Erfolge bei n Versuchen

X : Anzahl der “Erfolge” bei n Versuchen, wobei jeder

der n Versuche eine Erfolgswahrscheinlichkeit p hat.

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} \quad \text{Binomialwkt.}$$

$$F_X(k) = P(X < k) = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i} p^i (1 - p)^{n-i}$$

Verteilungsfunktion von X .

Beispiele: Es seien $p = \frac{1}{2}$ und $n = 5$. Für $x = 2.5$ gilt:

$$\begin{aligned} F(2.5) &= \sum_{i: i < 2,5} p_i \\ &= p_0 + p_1 + p_2 \\ &= \binom{5}{0} \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \binom{5}{1} \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \binom{5}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^5 \\ &= \frac{1}{32} + \frac{5}{32} + \frac{10}{32} \\ &= 0.5 \end{aligned}$$

2. Würfeln 20 mal. Wie groß ist die Wkt. für
mindestens 4 Sechsen?

X: Anzahl der Sechsen.

$$P(X \geq 4) = 1 - P(X < 4) = 1 - F_X(4)$$

$$= 1 - \sum_{i=0}^3 P(X = i) =$$

$$1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{20} - 20\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^{19} - \frac{20 \cdot 19}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^{18} - \\ - \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{6}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^{17}$$

$\approx 0.43.$

c) Telefonzentrale

X : Anzahl der Anrufe, die pro Zeiteinheit von einer Telefonzentrale vermittelt werden.

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots \\ p_0 & p_1 & p_2 & p_3 & \cdots \end{pmatrix}$$

$$P(X = i) = p_i = \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}, \quad \lambda > 0$$

Poisson- Wahrscheinlichkeiten.

$$\sum_{i=0}^{\infty} p_i = \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}} = 1.$$

Bez.: $X \sim Poi(\lambda)$.

Satz 9 Seien $X_n \sim \text{Bi}(n, p)$, $Y \sim \text{Poi}(\lambda)$

Für $n \cdot p = \lambda$ gilt:

$$P(X_n = k) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P(Y = k).$$

Beweis: Es gilt:

$$\begin{aligned} P(X_n = k) &= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\ &= \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!(n-\lambda)^k} \frac{(\lambda)^k}{n^k} \frac{(n-\lambda)^{n-k}}{n^{n-k}} \\ &= \frac{1}{k!} \underbrace{\frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{(n-\lambda)^k}}_{\longrightarrow 1} \underbrace{\lambda^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n}_{\longrightarrow e^{-\lambda}} \end{aligned}$$

d) Münzwurf solange bis B(Blatt) kommt

$$\Omega = \{B, ZB, ZZB, \dots\}$$

X := Anzahl der Würfe bis zum ersten Blatt.

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n & \dots \\ \frac{1}{2} & (\frac{1}{2})^2 & (\frac{1}{2})^3 & (\frac{1}{2})^4 & \dots & (\frac{1}{2})^n & \dots \end{pmatrix}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = \sum_{i=1}^{\infty} (1/2)^i = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} - 1 = 1$$

geometrische Reihe

geometrische Verteilung mit $p=1/2$,

$$p_i = (1/2)^i.$$

Def. 17 : *Eine Zufallsvariable X mit*

$$P(X = i) = p(1 - p)^{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots$$

heißt geometrisch verteilt.

Bez.: $X \sim \text{Geo}(p)$.

Anzahl der Schritte bis zum ersten “Erfolg”.

e) Qualitätskontrolle

Gegeben sei eine Grundgesamtheit (z.B. eine Warenlieferung) mit N Stücken, von denen genau n schlecht seien. Wie groß ist die Wkt., daß in einer Stichprobe vom Umfang m höchstens k Stück schlecht sind?

X : zufällige Anzahl der schlechten Stücke in der Stichprobe.

$$P(X = x) = \frac{\binom{n}{x} \cdot \binom{N-n}{m-x}}{\binom{N}{m}}$$

$\binom{N}{m}$: # möglichen Stichproben.

$\binom{n}{x}$: # Möglichkeiten, aus n schlechten Stücken in der Grundgesamtheit x schlechte Stücke zu ziehen.

$\binom{N-n}{m-x}$: # Möglichkeiten, aus $N - n$ guten Stücken in der Grundgesamtheit $m - x$ gute Stücke zu ziehen.

Offenbar:

$$0 \leq x \leq \min(n, m)$$

$$m - x \leq N - n.$$

Def. 18 *Eine Zufallsvariable mit der Wkt.funktion*

$$f(x|H_{N,n,m}) = P(X = x)$$

heißt hypergeometrisch verteilt.

Bez.: $X \sim H_{N,n,m}$. Verteilungsfunktion:

$$F(k|H_{N,n,m}) = \sum_{x=0}^{k-1} \frac{\binom{n}{x} \cdot \binom{N-n}{m-x}}{\binom{N}{m}}$$

Bemerkung: Für $N \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$, $\frac{n}{N} \rightarrow p$ gilt:

$$f(x|H_{N,n,m}) \rightarrow \binom{m}{x} p^x (1-p)^{m-x} = f(x|Bi(m,p))$$

ÜA.

Wkt. für höchstens k schlechte Stücke: $F(k+1|H_{N,n,m})$.

Weitere Eigenschaften und Anwendungen diskreter Zufallsvariablen

6.2 Binomialverteilung

Bsp. 37 (Kommunikationskanal) *Schicken
Binärzahlen durch einen Kommunikationskanal.*

p: Wkt. einer fehlerhaften Übertragung

n: Anzahl der übertragenen Zeichen

Wkt. für genau i Fehler:

$$P(i) = \binom{N}{i} p^i (1 - p)^{n-i} =: b(i; n, p)$$

Bsp. 38 (Qualitätskontrolle) *Stichprobe von 10*

Computerchips aus einer sehr großen Lieferung (Los). Wenn keine defekt, so wird die Lieferung angenommen, sonst nicht.

p: Wkt., ein zufällig ausgewählter Chip ist defekt.

Wkt. für genau i defekte Stücke = $b(i; 10, p)$.

$$P(\text{Los angenommen}) = (1 - p)^{10}$$

Bsp. 39 (*k* aus *n* Systeme) *Jede Komponente habe die Intaktwkt. p .*

Wkt., daß genau i Komponenten ausfallen:

$$P(X = i) = \binom{n}{i} p^{n-i} (1-p)^i$$

Wkt., daß höchstens k Komponenten ausfallen:

$$\begin{aligned} P(X \leq k) &= \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} p^{n-i} (1-p)^i \\ &= \sum_{i=n-k}^n \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \end{aligned}$$

6.3 Geometrische Verteilung

Bem. 2 Sei $Y \sim \text{Geo}(p)$, d.h.

$$P(Y > s) = 1 - \sum_{i=1}^s (1-p)^{i-1} \cdot p = (1-p)^s$$

$$P(Y > t) = 1 - \sum_{i=1}^t (1-p)^{i-1} \cdot p = (1-p)^t$$

$$\begin{aligned} P(Y > s) \cdot P(Y > t) &= (1-p)^{s+t} \\ &= 1 - \sum_{i=1}^{s+t} (1-p)^{i-1} \cdot p \\ &= P(Y > s+t). \end{aligned}$$

also:

$$\begin{aligned} P(Y > s + t | Y > t) &= \frac{P(Y > s + t, Y > t)}{P(Y > t)} \\ &= \frac{P(Y > s + t)}{P(Y > t)} \\ &= P(Y > s) \end{aligned}$$

Bez. 5 *Wir sagen, Verteilungen mit*

$$P(Y > s + t | Y > t) = P(Y > s)$$

besitzen die sogenannte Markov-Eigenschaft oder sie sind gedächtnislos.

Satz 10 Sei X diskrete Zufallsvariable mit Werten in $\{1, 2, 3, \dots\}$ und X habe die Markov-Eigenschaft. Dann ist $X \sim \text{Geo}(p)$ für ein $p, p \in (0, 1)$

Beweis: : Sei

$$X : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots \\ p_1 & p_2 & p_3 & \dots \end{pmatrix}$$

Aus der Markov-Eigenschaft folgt:

$$\begin{aligned} P(X > s) \cdot P(X > t) &= P(X > s + t) \quad \forall s, t \\ \left(1 - \sum_{i=1}^s p_i\right) \left(1 - \sum_{i=1}^t p_i\right) &= 1 - \sum_{i=1}^{s+t} p_i \end{aligned}$$

Setzen $p := p_1$. Einsetzen von

$s = 1, t = 1$ liefert $(1 - p)^2 = (1 - p - p_2)$; $p_2 = p(1 - p)$.

$s = 1, t = 2$ liefert $(1 - p)(1 - p - p_2) = (1 - p - p_2 - p_3)$;

$(1 - p - p_2)(1 - p - 1) = -p_3$; also

$p_3 = p(1 - p)^2$ usw. □

Bsp. 40 (Qualitätskontrolle) *Wkt., daß das i -te Item das erste defekte ist.*

Bsp. 41 (Time-sharing computer system) *mit festen Zeitscheiben.*

*Programm wird in der Zeitscheibe vollständig abgearbeitet
mit Wkt. p*

Wenn nicht, neuer Versuch in der neuen Zeitscheibe

X : # benötigten Zeitscheiben

$$X \sim \text{Geo}(p).$$

Bsp. 42 (Repeat-Schleife) *A: aussagenlogischer Ausdruck,*
A = true mit Wkt. p.

repeat *S* until *A*.

der Durchläufe von S: $\sim \text{Geo}(p)$.

6.4 Poisson-Verteilung

Sei $\{N_t\}_{t \in T}$ eine Menge von Zufallsvariablen (ein stochastischer Prozeß) mit folgenden Eigenschaften:

V1: Zuwächse sind unabhängig, dh. die Zufallsvariablen

$N_{t+h} - N_t$ und $N_t - N_{t-h}$ sind unabhängig^a

V2: es ist egal wo wir Zeitintervall betrachten, dh.

N_{t+h} und N_t haben dieselbe Verteilung

V3: Wkt., daß mindestens ein Ereignis in der Zeit h eintritt, z.B. ein Kunde ankommt.

$$p(h) = a \cdot h + o(h), \quad a > 0, h \rightarrow 0$$

V4: Wkt. für ≥ 2 Ereignisse in der Zeit h : $o(h)$

Anmerkung: Zwei Zufallsvariablen X und Y heißen unabhängig, falls

$$\forall A, B \in \mathcal{B}; \quad P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A) \cdot P(X \in B)$$

Frage: Wkt. daß bis zum Zeitpunkt t genau k Ereignisse eintreten? (eingetroffene Kunden, zerfallene Teilchen)

$$P_k(t) := P(N_t = k), \quad P_k(t) = 0 \quad \text{für} \quad k < 0$$

$$p(h) = \sum_{k=1}^{\infty} P_k(h) \quad \geq 1 \text{ Ereignis tritt ein}$$

Offenbar:

$$1 = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(t)$$

$$V3 \Rightarrow P_0(h) = 1 - p(h) = 1 - ah + o(h)$$

$$V4 \Rightarrow \sum_{k=2}^{\infty} P_k(h) = o(h), \quad (h \rightarrow 0)$$

1. Schritt: Bestimmen $P_0(t)$.

$$\begin{aligned}P_0(t+h) &= P(N_t = 0, N_{t+h} - N_t = 0) \\&= P_0(t)P(N_{t+h} - N_t = 0) \quad \text{wegen V1} \\&= P_0(t)P(N_h - N_0 = 0) \quad \text{wegen V2} \\&= P_0(t)P_0(h) \quad \text{wegen } N_0 = 0 \\&= P_0(t)(1 - p(h)) \\&= P_0(t)(1 - ah + o(h)) \quad \text{wegen V4}\end{aligned}$$

Nacheinander folgt:

$$\frac{P_0(t+h) - P_0(t)}{h} = P_0(t)\left(-a + \frac{o(h)}{h}\right)$$

$$P_0'(t) = -aP_0(t)$$

$$P_0(t) = ce^{-at}$$

Wegen $P_0(0) = 1$ folgt: $c = 1$ und

$$P_0(t) = e^{-at}$$

2. Schritt: Bestimmen $P_k(t)$.

Zerlegen das Ereignis $\{N_{t+h} = k\}$ in disjunkte Teilereignisse.

$$\begin{aligned}\{N_{t+h} = k\} &= \{N_t = 0, N_{t+h} - N_t = k\} \cup \\ &\quad \{N_t = 1, N_{t+h} - N_t = k - 1\} \cup \\ &\quad \{N_t = 2, N_{t+h} - N_t = k - 2\} \cup \dots \cup \\ &\quad \{N_t = k, N_{t+h} - N_t = 0\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_k(t+h) &= \sum_{j=0}^k P(N_t = k-j, N_{t+h} - N_t = j) \\
&= \sum_{j=0}^k P_{k-j}(t) \underbrace{P(N_{t+h} - N_t = j)}_{=P(N_h - N_0 = j)} \quad \text{wegen V1} \\
&= \sum_{j=0}^k P_{k-j}(t) P_j(h) \quad \text{wegen V2} \\
&= P_k(t) P_0(h) + P_{k-1}(t) P_1(h) + \sum_{j=2}^k P_{k-j}(t) P_j(h)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_1(h) &= \sum_{j=1}^{\infty} P_j(h) - \sum_{j=2}^{\infty} P_j(h) \\
&= p(h) + o(h) \\
&= ah + o(h)
\end{aligned}$$

$$\sum_{j=2}^{\infty} P_{k-j}(t)P_j(h) \leq \sum_{j=2}^{\infty} P_j(h) = o(h) \quad \text{wegen V2}$$

Nacheinander folgt:

$$\begin{aligned}
P_k(t+h) - P_k(t) &= (P_0(h) - 1)P_k(t) + P_{k-1}(t)P_1(h) + o(h) \\
&= -ahP_k(t) + ahP_{k-1}(t) + o(h)
\end{aligned}$$

$$\frac{P_k(t+h) - P_k(t)}{h} = -aP_k(t) + aP_{k-1}(t) + \frac{o(h)}{h}$$

$$P'_k(t) = -aP_k(t) + aP_{k-1}(t), \quad P_k(0) = 0$$

$$Q_k(t) := P_k(t)e^{at}$$

\Rightarrow

$$Q'_k(t) = P'_k(t)e^{at} + P_k(t)ae^{at}$$

$$Q'_k(t) = e^{at} \underbrace{(-aP_k(t) + aP_{k-1}(t) + aP_k(t))}_{P'_k(t)}$$

$$= aQ_{k-1}(t)$$

$$Q'_1(t) = aQ_0(t) = ae^{-at}e^{at} = a \Rightarrow Q_1(t) = at$$

$$Q'_2(t) = aQ_1(t) = a^2t \Rightarrow Q_2(t) = \frac{a^2t^2}{2}$$

Durch vollständige Induktion:

$$Q_k(t) = \frac{a^k t^k}{k!}$$

$$P_k(t) = \frac{a^k t^k}{k!} e^{-at}$$

Poisson-Verteilung mit Parameter $\lambda = at$.

Programme:

Descr_Binomial_neu.sas

Descr_Poisson.sas

Descr_Geometr.sas

Descr_Hypergeom.sas

Bem: In den Wahrscheinlichkeiten können Parameter auftreten, die in der Regel unbekannt sind.

Die Parameter sind anhand der Beobachtungen
(der Daten) zu bestimmen/zu schätzen!
→ Aufgabe der Statistik