7 Charakteristika von Verteilungsfunktionen

7.1 Der Erwartungswert

Bsp. Eine Münze wird 3 mal geworfen.

Wie oft können wir erwarten, daß Blatt oben liegt?

Wie oft wird im Mittel Blatt oben liegen?

$$X: \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1/8 & 3/8 & 3/8 & 1/8 \end{pmatrix}$$

Erwartungswert: $0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{12}{8} = 1.5$

D.h. bei 10maliger Durchführung des Experiments können wir im Mittel mit 15mal Blatt rechnen.

Def. 19 *: Sei X diskrete Zufallsvariable,*

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_n & \ldots \\ p_1 & \ldots & p_n & \ldots \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{E}X = \sum_{i=1}^{\infty} p_i x_i$$

heißt <u>Erwartungswert</u> von X.

Bsp.: a) $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \ldots \\ p_0 & p_1 & p_2 & p_3 & \ldots \end{pmatrix}$$

$$p_i = \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}$$

$$\mathbf{E}X = \sum_{i=0}^{\infty} p_i i = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} \cdot i = \lambda \underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda^{i-1}}{(i-1)!}}_{e^{\lambda}} e^{-\lambda} = \lambda.$$

z.B. mittlere Ankunftsrate.

b) $X \sim B(n,p)$

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}X &= \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}p^k \cdot (1-p)^{n-k} \\
&= p\sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}p^{k-1}(1-p)^{n-k} \\
&= p \cdot n\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1}p^{k-1}(1-p)^{n-k} \\
&= p \cdot n\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i}p^{i}(1-p)^{n-1-i}, \qquad\qquad k = i+1 \\
&= n \cdot p.
\end{aligned}$$

c) $X \sim Geo(p)$

$$X : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & k & \ldots \\ p & pq & pq^2 & \ldots & pq^{k-1} & \ldots \end{pmatrix} \qquad q = 1 - p$$

$$\mathbf{E}X = \sum_{k=0}^{\infty} x_k p_k = \sum_{k=1}^{\infty} kpq^{k-1} = p \cdot \sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}.$$

Beweis des vorletzten Gleichheitszeichens:

a) durch vollst. Induktion

b) Differenzieren der geometrischen Reihe

Def. 20 *: Sei X stetig mit Dichtefunktion $f(x)$. Die Größe*

$$\mathbf{E}X = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx$$

heißt <u>*Erwartungswert*</u> *von X.*

Bsp. a) $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}X &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} e^{-(\frac{x-\mu}{\sigma})^2/2} dx \\
&= \int\limits_{-\infty}^{\infty} (\sigma t + \mu) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-t^2}{2}} dt \\
&= \mu + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sigma \cdot t \cdot e^{\frac{-t^2}{2}} \, dt \\
&= \mu.
\end{aligned}$$

$\frac{x-\mu}{\sigma} = t, \quad dt = \frac{1}{\sigma} dx$

b) $X \sim Exp(\lambda), \qquad \lambda > 0$

$$\mathbf{E}X = \int_0^\infty x \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x} dx = \frac{1}{\lambda}$$

c) $X \sim R(a, b)$

gleichverteilt auf dem Intervall (a,b).

$$\begin{aligned}\mathbf{E}X &= \frac{1}{b-a} \int_a^b x dx = \frac{1}{b-a} \frac{x^2}{2}\Big|_a^b \\ &= \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}.\end{aligned}$$

Bem. 3 *Die Erwartungswerte sind für stetige und diskrete Zufallsgrößen zweckmäßigerweise unterschiedlich definiert. Sie läßt sich jedoch (maßtheoretisch) vereinheitlichen.*

Satz 11 (Eigenschaften des Erwartungswertes) *Es seien* X, X_1 *und* X_2 *beliebige zufällige Variablen.* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *seien ebenfalls beliebig gewählt. Dann gelten folgende Aussagen:*

1. *Wenn* $P(X = c) = 1$, *d.h. nimmt die zufällige Variable* X *genau einen festen Wert an, so folgt* $\mathbf{E}X = \mathbf{E}c = c$.
2. *Wenn* $P(X \geq c) = 1$, *so* $\mathbf{E}X \geq c$.
3. $\mathbf{E}(c \cdot X) = c \cdot \mathbf{E}X$.
4. $\mathbf{E}(X + c) = \mathbf{E}X + \mathbf{E}c = \mathbf{E}X + c$.
5. $\mathbf{E}(a \cdot X_1 + b \cdot X_2) = a \cdot \mathbf{E}X_1 + b \cdot \mathbf{E}X_2$.

Beweis: Wir beweisen stellvertretend Aussage 2 dieses Satzes. Da wir den Erwartungswert für diskrete und stetige zufällige Variablen unterschiedlich definiert haben, müssen wir die Aussage für beide Arten von Zufallsgrößen getrennt beweisen.

- Es sei X eine diskrete Zufallsgröße,

$$X: \quad \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n & \ldots \\ p_1 & p_2 & \ldots & p_n & \ldots \end{pmatrix}$$

  Nach Voraussetzung: $c = x_1 < x_2 < \ldots < x_n < \ldots$.
  Daraus folgt:

$$\mathbf{E}X = \sum_{i \in \mathbb{N}} x_i \cdot p_i \geq \sum_{i \in \mathbb{N}} c \cdot p_i = c \cdot \sum_{i \in \mathbb{N}} p_i = c.$$

  Das ist die Aussage.

- Es sei X eine stetige zufällige Variable mit der Dichtefunktion f. Dann gilt:

$$P(X \geq c) = \int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx = 1. \quad \Rightarrow$$

$$P(X < c) = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx = 0. \quad \Rightarrow$$

$$\mathbf{E}X = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)\,dx = \int_{c}^{+\infty} x \cdot f(x)\,dx \geq c \cdot \underbrace{\int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx}_{=1} = c$$

$\square$

Bem.: Ergänzungen:

- Aus Aussage 4 folgt:

$$\mathbf{E}(X - \mathbf{E}X) = \mathbf{E}X - \mathbf{E}(\mathbf{E}X) = 0.$$

- Aussage 5 besagt, daß der Erwartungswert eine linearer Operator ist.

Frage: Wie berechnen wir $\mathbf{E}(g(X))$?

1. Variante: Dichte von $Y = g(X)$ ausrechnen. Wie man das macht, sehen wir später.
   Dann $\mathbf{E}(Y) = \int y f_Y(y)\,dy$ ausrechnen.

2. Variante (einfacher)

Satz 12 (Regel des faulen Statistikers) *Seien X und $Y = g(X)$ Zufallsgrößen. Dann gilt:*

$$\mathbf{E}(g(X)) = \begin{cases} \sum_{i=0}^{\infty} g(x_i) p_i, & \text{falls } X \text{ diskret} \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x)\,dx, & \text{falls } X \text{ stetig} \end{cases}$$

vorausgesetzt die Erwartungswerte existieren.

Bem. 4 *Intuitive Erläuterung: Spiel, wobei wir X zufällig ziehen. Dann zahle ich den 'Gewinn' $Y = g(X)$. Ihr erwartetes Einkommen ist dabei*

$$\sum_x g(x)P(X = x)$$

(oder das Integral).

Bem. 5 *Spezialfall: $g(x) = I_A(x)$ Indikatorfunktion eines Ereignisses A.*

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(I_A(X)) &= \int I_A(x)f_X(x)\,dx = \int_A f_X(x)\,dx \\
&= P(X \in A) = P(A).
\end{aligned}$$

D.h. Die Wahrscheinlichkeit ist ein Speziallfall eines Erwartungswertes!

Bsp. 43 *Sei* $X \sim \mathbb{R}(0,1)$ *und* $Y = g(X) = e^X$. *Dann*

$$\mathbf{E}(Y) = \int_0^1 e^x f(x)\,dx = \int_0^1 e^x\,dx = e - 1.$$

Bsp. 44 *Nehmen einen Stab der Länge 1, und brechen ihn zufällig. Sei* Y *die Länge des längeren Stücks. Gesucht ist die erwartete Länge* $\mathbf{E}(Y)$.

Wenn X *der zufälllige Bruchpunkt ist, dann* $X \sim \mathbf{R}(0,1)$ *und* $Y = g(X) = \max(X, 1-X)$. *D.h.*

$$g(x) = \begin{cases} 1-x & \textit{falls} \quad 0 < x < 0.5 \\ x & \textit{falls} \quad 0.5 < x < 1 \end{cases}$$

$$\mathbf{E}(Y) = \int_0^1 g(x) f(x)\,dx = \int_0^{0.5} (1-x)\,dx + \int_{0.5}^1 x\,dx = \frac{3}{4}.$$

Beweis: (Regel des Faulen Statistikers)

Wir zeigen die letzte Behauptung unter der Annahme g: $R \longrightarrow R$ differenzierbar, $g'(x) \neq 0 \quad \forall x$.
Nach der Def. des Erwartungswertes gilt:

$$\mathbf{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot h(y)\, dy,$$

wobei $h(y)$ die Dichte von $Y = g(X)$ ist.

Wir bestimmen jetzt $h(y)$:

1. Fall: Sei g monoton wachsend.

$$\begin{aligned} F_Y(t) &= F_{g(X)}(t) = \\ P(g(X) < t) &= P(X < g^{-1}(t)) = \int\limits_{-\infty}^{g^{-1}(t)} f(x)\,dx \end{aligned}$$

Substitution: $g(x) = y, \quad g'(x)dx = dy.$

$$F_{g(X)}(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} \frac{f(g^{-1}(y))}{g'(g^{-1}(y))} dy$$

$$\Rightarrow \quad \frac{f(g^{-1}(y))}{g'(g^{-1}(y))} = h(y) \qquad \text{ist Dichte von} \quad g(X)$$

2. Fall: Sei g monoton fallend.

$$\begin{aligned} F_Y(t) &= F_{g(X)}(t) = \\ P(g(X) < t) &= P(X > g^{-1}(t)) = \int\limits_{g^{-1}(t)}^{\infty} f(x)\,dx \end{aligned}$$

Substitution: $g(x) = y, \quad g'(x)dx = dy, \quad g(\infty) = -\infty$

$$\begin{aligned} F_{g(X)}(t) &= \int\limits_{t}^{-\infty} \frac{f(g^{-1}(y))}{g'(g^{-1}(y)} dy = - \int\limits_{t}^{-\infty} \frac{f(g^{-1}(y))}{|g'(g^{-1}(y)|} dy \\ &= \int\limits_{-\infty}^{t} \frac{f(g^{-1}(y))}{|g'(g^{-1}(y)|} dy \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{f(g^{-1}(y))}{|g'(g^{-1}(y))|} = h(y)$$ ist Dichte von $g(X)$

$$\Rightarrow \mathbf{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot h(y)\, dy = \int\limits_{-\infty}^{\infty} y \cdot \frac{f(g^{-1}(y))}{g'(g^{-1}(y))} dy$$

Substitution: $y = g(x), dy = g'(x)dx$

$$\mathbf{E}(g(X)) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx.$$

$\square$

Bsp. 45 (Fortsetzung von Bsp. 43)

Es war $X \sim \mathbf{R}(0,1)$, $Y = g(X) = e^X$. *Also*

$g(x) = e^x, \quad g'(x) = e^x, \quad g^{-1}(y) = \ln y$. *Also*

$$h(y) = \frac{f(g^{-1}(y))}{g'(g^{-1}(y))} = \frac{1}{e^{\ln y}} = \frac{1}{y},$$

$1 \leq y \leq e$.

$$\mathbf{E}(Y) = \int_1^e y \cdot h(y)\, dy = \int_1^e y \cdot \frac{1}{y}\, dy = \int_1^e 1\, dy = e - 1$$

dasselbe Resultat wie mit der Regel des Faulen Statistikers.

7.2 Moment und Varianz

Def. 21 *Es sei X eine zufällige Variable. Falls der Erwartungswert $\mathbf{E}(|X|^p)$ existiert, heißt der Erwartungswert $\mathbf{E}X^p$ <u>p–tes Moment</u> der zufälligen Variablen X. Es gilt dann:*

$$\mathbf{E}X^p = \begin{cases} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^p \cdot f(x)\,dx, & \text{falls } X \text{ stetig ist} \\ \sum\limits_{i\in\mathbb{N}} x_i^p \cdot p_i, & \text{falls } X \text{ diskret ist} \end{cases}$$

Def. 22 *Es sei X eine zufällige Variable. Wir nennen den Erwartungswert $\mathbf{E}(X - \mathbf{E}X)^p$ <u>p–tes zentrales Moment</u> der Zufallsgröße X.*

Das zweite zentrale Moment $\mathbf{E}(X - \mathbf{E}X)^2$ nennen wir auch <u>Streuung</u> oder <u>Varianz</u> der Zufallsgröße X. Wir

Bez. 6 $\mathrm{Var}\, X$ *oder* σ_X^2.

Def. 23 *Die Größe*

$$\sigma = \sqrt{Var(X)}$$

heißt <u>Standardabweichung</u> der Zufallsvariablen X.

Bez.: σ, σ_X.

Sei $\mu = \mathbf{E}X$.

Bem.: : $\mathrm{Var}\,(X)$: mittlere quadratische Abweichung zwischen X und EX.

Def. 24 *Es seien X_1 und X_2 zwei zufällige Variablen. Wir nennen den Erwartungswert*

$$\underline{\mathrm{cov}\,(X_1, X_2)} := \mathbf{E}((X_1 - \mathbf{E}X_1) \cdot (X_2 - \mathbf{E}X_2))$$

die Kovarianz der zufälligen Variablen X_1 und X_2.

Def.: Zwei Zufallsvariablen X_1 und X_2 heißen unabhängig, falls

$$P(X_1 < x_1, X_2 < x_2) = P(X_1 < x_1) \cdot P(X_2 < x_2)$$

für alle $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$.

Satz 13 (Eigenschaften der Varianz)

1. *Für beliebige* $c \in \mathbb{R}$ *gilt: Ist* $P(X = c) = 1$*, so folgt* $\mathrm{Var}\, X = 0$*. Ist umgekehrt* $\mathrm{Var}\, X = 0$*, so existiert ein* $c \in \mathbb{R}$*, so daß gilt:* $P(X = c) = 1$*.*
2. *Für beliebige* $c \in \mathbb{R}$ *gilt:* $\mathrm{Var}\,(X + c) = \mathrm{Var}\, X$*.*
3. *Für beliebige* $a \in \mathbb{R}$ *gilt:* $\mathrm{Var}\,(a \cdot X) = a^2 \cdot \mathrm{Var}\, X$*.*
4. *Für zwei zufällige Variablen* X_1 *und* X_2 *gilt:* $\mathrm{Var}\,(X_1 + X_2) = \mathrm{Var}\, X_1 + \mathrm{Var}\, X_2 + 2 \cdot \mathrm{cov}\,(X_1, X_2)$*.*

Beweis: Es seien X, X_1 und X_2 beliebige zufällige Variablen. $a, c \in \mathbb{R}$ seien ebenfalls beliebig gewählt.

1. Es gelte: $P(X = c) = 1$. Nach Satz 11 folgt daraus:

$\mathbf{E}X = c$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\operatorname{Var} X &= \mathbf{E}(X - \mathbf{E}X)^2 \\ &= \mathbf{E}(X - c)^2 \\ &= \mathbf{E}(c - c)^2 \\ &= 0\end{aligned}$$

Es sei nun $\operatorname{Var} X = 0 = \mathbf{E}(X - \mathbf{E}X)^2 = 0$. Allgemein gilt für $c \in \mathbb{R}$: $\mathbf{E}(X - c)^2 \geq 0$. Also,

$$P(X - EX = 0) = 1.$$

$c := \mathbf{E}X$ leistet das Verlangte.

2. Es gilt mit Satz 11:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}\,(X+c) &= \mathbf{E}(X+c-\mathbf{E}(X+c))^2 \\
&= \mathbf{E}(X+c-\mathbf{E}X-\mathbf{E}c)^2 \\
&= \mathbf{E}(X+c-\mathbf{E}X-c)^2 \\
&= \mathbf{E}(X-\mathbf{E}X)^2 \\
&= \mathrm{Var}\,X
\end{aligned}$$

3. Es gilt mit Satz 11:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}\,(a \cdot X) &= \mathbf{E}(a \cdot X - \mathbf{E}(a \cdot X))^2 \\
&= \mathbf{E}(a \cdot X - a \cdot \mathbf{E}X)^2 \\
&= \mathbf{E}(a \cdot (X - \mathbf{E}X))^2 \\
&= \mathbf{E}\left(a^2 \cdot (X - \mathbf{E}X)^2\right) \\
&= a^2 \cdot \mathbf{E}(X - EX)^2 \\
&= a^2 \cdot \mathrm{Var}\, X
\end{aligned}$$

4. Es gilt mit Satz 11:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Var}(X_1 + X_2) &= \mathbf{E}(X_1 + X_2 - \mathbf{E}(X_1 + X_2))^2 \\
&= \mathbf{E}(X_1 + X_2 - \mathbf{E}X_1 - \mathbf{E}X_2)^2 \\
&= \mathbf{E}((X_1 - \mathbf{E}X_1) + (X_2 - \mathbf{E}X_2))^2 \\
&= \mathbf{E}\Big((X_1 - \mathbf{E}X_1)^2 + (X_2 - \mathbf{E}X_2)^2 \\
&\quad +2 \cdot (X_1 - \mathbf{E}X_1) \cdot (X_2 - \mathbf{E}X_2)\Big) \\
&= \mathbf{E}(X_1 - \mathbf{E}X_1)^2 + \mathbf{E}(X_2 - \mathbf{E}X_2)^2 \\
&\quad +2 \cdot \mathbf{E}((X_1 - \mathbf{E}X_1) \cdot (X_2 - \mathbf{E}X_2)) \\
&= \operatorname{Var} X_1 + 2 \cdot \operatorname{cov}(X_1, X_2) + \operatorname{Var} X_2
\end{aligned}
$$

$\square$

Lemma 14 *Es seien X_1 und X_2 zwei unabhängige Zufallsgrößen. Dann gilt:*

$$\text{cov}\,(X_1, X_2) = 0.$$

Beweis: Wir betrachten den zufälligen Vektor $\mathbf{X} = (X_1, X_2)^T$. Wir führen den Beweis nur für den Fall, daß die beiden Zufallsgrößen X_1 und X_2 und damit der Vektor $\mathbf{X}$ stetig sind. Für den diskreten Fall verfährt man analog.
Es sei f die Dichtefunktion des zufälligen Vektors $\mathbf{X}$. Wir definieren eine Funktion $g\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ durch:

$$g(X_1, X_2) := (X_1 - \mathbf{E}X_1) \cdot (X_2 - \mathbf{E}X_2).$$

Offenbar,

$$\operatorname{cov}(X_1, X_2) = \mathbf{E}g(X_1, X_2).$$

Außerdem ist:

$$\mathbf{E}g(X_1, X_2) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} (x_1 - \mathbf{E}X_1) \cdot (x_2 - \mathbf{E}X_2) \cdot f(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2.$$

Nach Voraussetzung sind die zufälligen Variablen X_1 und X_2 unabhängig, also

$$f(x_1, x_2) = f_{X_1}(x_1) \cdot f_{X_2}(x_2).$$

Somit gilt dann:

cov (X_1, X_2) =

$$
\begin{aligned}
&= \int\limits_{\mathbb{R}^2} (x_1 - \mathbf{E}X_1) \cdot (x_2 - \mathbf{E}X_2) \cdot f_{X_1}(x_1) \cdot f_{X_2}(x_2)\, dx_1\, dx_2 \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}} (x_1 - \mathbf{E}X_1) \cdot f_{X_1}(x_1)\, dx_1 \cdot \int\limits_{\mathbb{R}} (x_2 - \mathbf{E}X_2) \cdot f_{X_2}(x_2)\, dx_2 \\
&= \mathbf{E}(X_1 - \mathbf{E}X_1) \cdot \mathbf{E}(X_2 - \mathbf{E}X_2) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Das ist die Aussage. □

Bem. 6 *Wir haben beim Beweis des Satzes zwei Aussagen verwendet, die erst im Abschnitt Unabhängigkeit behandelt werden.*

Die Umkehrung der Aussage von Lemma 14 gilt im allgemeinen nicht, wie das folgende Beispiel zeigt:

Bsp. 46 *Es sei* X_1 *eine über dem Intervall* $[0, \pi[$ *gleichverteilte Zufallsgröße,* $X_1 \sim R(0, \pi)$*) mit der Dichtefunktion*

$$f_{X_1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & \text{, falls } 0 \leq x < \pi \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases} .$$

Die Zufallsgröße X_2 *definieren wir durch* $X_2 = \sin X_1$. *Offenbar,* X_1 *und* X_2 *sind streng abhängig. Für die Kovarianz der beiden Zufallsgrößen gilt:*

$\mathrm{cov}\,(X_1, X_2) =$

$$\begin{aligned}
&= \mathbf{E}((X_1 - \mathbf{E}X_1) \cdot (X_2 - \mathbf{E}X_2)) \\
&= \mathbf{E}(X_1 \cdot X_2 - X_1 \cdot \mathbf{E}X_2 - X_2 \cdot \mathbf{E}X_1 + \mathbf{E}X_1 \cdot \mathbf{E}X_2) \\
&= \mathbf{E}(X_1 \cdot X_2) - \mathbf{E}(X_1 \cdot \mathbf{E}X_2) - \mathbf{E}(X_2 \cdot \mathbf{E}X_1) + \mathbf{E}X_1 \cdot \mathbf{E}X_2 \\
&= \mathbf{E}(X_1 \cdot X_2) - \mathbf{E}X_1 \cdot \mathbf{E}X_2
\end{aligned}$$

Nun gilt für die Erwartungswerte $\mathbf{E}X_1$ *und* $\mathbf{E}X_2$*:*

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}X_1 &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_{X_1}(x)\,dx = \int\limits_{0}^{\pi} x \cdot \frac{1}{\pi}\,dx \\
&= \frac{1}{\pi} \cdot \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi^2}{2} = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{E}X_2 &= \mathbf{E}(\sin X_1) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin x \cdot f_{X_1}(x)\, dx \\ &= \int\limits_0^{\pi} \sin x \cdot \frac{1}{\pi}\, dx = \frac{1}{\pi} \cdot [-\cos x]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\end{aligned}$$

Für den Erwartungswert $\mathbf{E}(X_1 \cdot X_2)$ *gilt nach der Regel des*

Faulen Statistikers

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}(X_1 \cdot X_2) &= \mathbf{E}(X_1 \cdot \sin X_1) = \int_0^\pi x \cdot \sin x \cdot \tfrac{1}{\pi}\, dx \\
&= \left[-\tfrac{1}{\pi} \cdot x \cdot \cos x\right]_0^\pi + \tfrac{1}{\pi} \cdot \underbrace{\int_0^\pi \cos x\, dx}_{=0} \\
&= -\tfrac{1}{\pi} \cdot ((-1)\pi) = 1
\end{aligned}
$$

Wir setzen alle diese Werte in die Ausgangsgleichung ein und erhalten:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{cov}(X_1, X_2) &= \mathbf{E}(X_1 \cdot X_2) - \mathbf{E}X_1 \cdot \mathbf{E}X_2 \\
&= 1 - \tfrac{\pi}{2} \cdot \tfrac{2}{\pi} = 0
\end{aligned}
$$

Trotz der Abhängigkeit der beiden Zufallsgrößen X_1 und X_2 ist ihre Kovarianz gleich Null. Folglich läßt sich die Aussage von Lemma 14 nicht umkehren.

Folg. 5 *Falls zwei zufällige Variablen X_1 und X_2 unabhängig sind, gilt für die Varianz ihrer Summe:*

$$\mathrm{Var}\,(X_1 + X_2) = \mathrm{Var}\,(X_1) + \mathrm{Var}\,(X_2).$$

Beispiele

a) Poisson-Verteilung, $X \sim Poi(\lambda)$.

$$p_i = P(X = i) = \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\begin{aligned}
\text{Var}\,(X) &= \mathbf{E}(X - \mathbf{E}X)^2 = \sum_{i=0}^{\infty} (i-\lambda)^2 p_i \\
&= \sum_{i=2}^{\infty} i \cdot (i-1) p_i + \sum_{i=0}^{\infty} i p_i - 2\lambda \sum_{i=0}^{\infty} i p_i + \lambda^2 \sum_{i=0}^{\infty} p_i \\
&= \lambda^2 \sum_{i=2}^{\infty} \frac{\lambda^{i-2}}{(i-2)!} e^{-\lambda} + \lambda - 2\lambda^2 + \lambda^2 = \lambda.
\end{aligned}$$

b) Binomialverteilung, $X \sim B(n,p)$.

$$\mathrm{Var}\,(X) = np(1-p).$$

(ohne Beweis, ÜA)

c) Gleichverteilung auf (a, b), $X \sim R(a, b)$.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in (a, b) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \\
\mathbf{E}X &= \frac{a+b}{2}. \\
\mathbf{E}X^2 &= \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a}\, dx = \frac{1}{3} x^3 \Big|_a^b \cdot \frac{1}{b-a} \\
&= \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} = \frac{a^2 + ab + b^2}{3}. \\
\operatorname{Var}(X) &= \mathbf{E}X^2 - (\mathbf{E}X)^2 \\
&= \frac{1}{12}(4a^2 + 4ab + 4b^2 - 3a^2 - 6ab - 3b^2) \\
&= \frac{1}{12}(a^2 - 2ab + b^2) = \frac{(b-a)^2}{12}.
\end{aligned}$$

d) Exponentialverteilung

$$\begin{aligned}
f(x) &= \begin{cases} \lambda e^{-\lambda \cdot x} & \text{falls } x \geq 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \\
\mathbf{E}X &= \frac{1}{\lambda}. \\
\mathbf{E}X^2 &= \int_0^\infty x^2 \lambda e^{-\lambda \cdot x}\, dx = \frac{2}{\lambda^2} \quad \text{(ÜA)}. \\
\mathrm{Var}\,(X) &= \frac{1}{\lambda^2}.
\end{aligned}$$

e) Normalverteilung

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}\,dx \\
\mathbf{E}(X-\mu)^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}\,dx \\
&= \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} t^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt \\
&= \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} (-t)(-t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}})\,dt \\
&= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \Big(-te^{-t^2/2}\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} (-1) e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt \Big) \\
&= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt \\
&= \sigma^2.
\end{aligned}
$$

$$t = \frac{x-\mu}{\sigma}, \qquad \sigma\, dt = dx$$

Bei Normalverteilung sind also die Parameter μ und σ^2 Erwartungswert und Varianz.

7.3 Schiefe und Exzeß

Angenommen, das 4. Moment existiert.

$$\sigma_X = \sqrt{Var(X)} \quad \text{(Standardabweichung)}$$

$$\text{Schiefe} \quad \gamma_1 = \frac{\mathbf{E}(X - \mathbf{E}X)^3}{(\text{Var}X)^{3/2}}$$

$$\text{Kurtosis} \quad \gamma_2 = \frac{\mathbf{E}(X - \mathbf{E}X)^4}{(\text{Var}X)^2}$$

$\gamma_1 > 0$: rechtsschiefe Verteilung

$\gamma_1 = 0$: symmetrische Verteilung

$\gamma_1 < 0$: linksschiefe Verteilung

$\gamma_2 > 3$: starke Tails

$\gamma_2 = 3$: Wölbung wie bei NV

$\gamma_2 < 3$: schwache Tails

Bem.: Diese Klassifikation ist recht vage. Es gibt mehrere Verteilungen mit gleichem Erwartungswert, gleicher Varianz, gleicher Schiefe und gleicher Kurtosis, die aber recht unterschiedlich aussehen.

7.4 Charakteristische Funktionen

Def. 25 *Sei X Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion F_X und Dichte f_X (falls X stetig) oder Wkt.funktion p_i (falls X diskret). Die Funktion*

$$\phi_X(t) := \mathbf{E}e^{itX} = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f_X(x)\, dx \\ \sum_{j=1}^{\infty} e^{itx_j} p_j \end{cases}$$

heißt <u>charakteristische Funktion</u> von X.

Bem. 7 *Die Funktion ϕ_X ist (bis auf den Faktor $\sqrt{2\pi}$) die Fourier-Transformierte von f_X.*

Bem. 8 *Die charakterische Funktion existiert.*

Satz 15 (Eigenschaften)

(i) *$\phi_X(t)$ ist in $-\infty < t < \infty$ gleichmäßig stetig.*

$$\begin{aligned} |\phi_X(t)| &\leq 1 \\ \phi_X(0) &= 1 \\ \phi_X(-t) &= \overline{\phi_X(t)} \end{aligned}$$

(ii) *Für die Zufallsvariable*

$$Y = aX + b$$

gilt:

$$\phi_Y(t) = \phi_X(at)e^{ibt}$$

(iii) *$\phi_X(t)$ ist reellwertig $\Leftrightarrow$ X bzgl. $x = 0$ symmetrisch ist.*

Beweis: ÜA, Eigenschaften der Fkt. e^{it}. $\square$

Satz 16 (Multiplikationssatz) *Seien die Zufallsvariablen X_1 und X_2 unabhängig mit den charakteristischen Funktionen ϕ_1 und ϕ_2. Dann hat die Zufallsvariable $X_1 + X_2$ die charakteristische Funktion $\phi_1 \cdot \phi_2$.*

Beweis: Es gilt:

$$\phi_{X_1+X_2}(t) = \mathbf{E}e^{it(X_1+X_2)} = \mathbf{E}e^{itX_1} \cdot \mathbf{E}e^{itX_2} = \phi_1(t) \cdot \phi_2(t)$$

$\square$

Satz 17 (Eindeutigkeitssatz) *Die Beziehung*

$$F_X \Leftrightarrow \phi_X$$

ist eineindeutig.

Für X stetig gilt:

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \phi_X(t)\, dt$$

Für X diskret gilt:

$$p_j = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} e^{-itx_j} \phi_X(t)\, dt$$

Beweis: siehe z.B. Günther, Grundkurs Analysis, Teil 3. $\square$

Satz 18 (Konvergenzsatz) *Seien X_n Zufallsvariablen mit $X_n \sim F_n$. Dann gilt*

$$F_n \to F \Leftrightarrow \phi_n \to \phi, \quad \phi \quad \textit{stetig in} \quad t = 0.$$

Satz 19 (Erzeugung der Momente) *Sei* $\mathbf{E}X^k < \infty$.
Dann gilt:

$$\alpha_k := \mathbf{E}X^k = \frac{1}{i^k}\phi_X^{(k)}(0)$$

Beweis: Vertauschen von Integration und Differentiation. $\square$

Die charakteristische Funktion hat also die Taylor-Entwicklung

$$\begin{aligned}\phi_X(t) &= \mathbf{E}e^{itX} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(it)^j}{j!}\mathbf{E}X^j \\ &= \sum_{j=0}^{k} \alpha_j \frac{(it)^j}{j!} + o(t^k), \quad t \to 0.\end{aligned}$$

$X \sim \mathcal{N}(0,1)$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}e^{itX} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2-2itx+(it)^2-(it)^2}{2}}\, dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-it)^2}{2}}\, dx \qquad z = x - it \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \int_{-\infty+it}^{\infty+it} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz \\
&= e^{-\frac{t^2}{2}}.
\end{aligned}$$

$Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$:

$$\mathbf{E}e^{itY} = \mathbf{E}e^{it(\sigma X+\mu)} = e^{it\mu}\phi_X(\sigma t)$$