2 Allgemeine Eigenschaften einer Verteilungsfunktion

Satz 2.1 *Es sei X eine zufällige Variable mit der Verteilungsfunktion*

$$F(x) = P(X < x) = P(\{\omega\colon X(\omega) < x\}) = P_X(]-\infty, x[).$$

Dann gelten die folgenden Aussagen:

1. *Die Funktion $F(x)$ ist monoton wachsend.*
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$.
3. *Die Funktion $F(x)$ ist linksseitig stetig. Es gilt also:*
   $\lim\limits_{x\to x_0-} F(x) = F(x_0)$.
4. $P(a \le X < b) = F(b) - F(a)$.

Beweis:

1. Es sei $x_1 < x_2 < x$. Wir definieren zwei Mengen:

$$A := \{\omega\colon X(\omega) < x_1\},$$

$$B := \{\omega\colon X(\omega) < x_2\}.$$

Dann gilt:

$$F(x_1) = P(\{\omega\colon X(\omega) < x_1\}) = P(A),$$

$$F(x_2) = P(\{\omega\colon X(\omega) < x_2\}) = P(B).$$

Wegen $A \subseteq B$ folgt: $P(A) \leq P(B)$, d.h.

$$F(x_1) \leq F(x_2),$$

d.h. die Funktion $F(x)$ monoton wachsend.

2. Sei (x_n) eine monoton fallende Folge mit $x_n \to -\infty$. Sei (y_n) eine monoton wachsende Folge mit $y_n \to \infty$. Wir definieren:

$$A_n := \{\omega\colon X(\omega) < x_n\},$$

$$B_n := \{\omega\colon X(\omega) < y_n\}.$$

Für die Folgen (A_n) und $B_n)$ gilt:
(A_n) ist monoton fallend ($A_n \supseteq A_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$),
(B_n) monoton wachsend ($B_n \subseteq B_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$). Offensichtlich gilt:

$$F(x_n) = P(A_n), \qquad F(y_n) = P(B_n).$$

Wegen der Stetigkeit der Wkt. von oben und unten ist

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(\lim_{n\to\infty} A_n) = P(X < -\infty) = 0.$$
$$\lim_{n\to\infty} P(B_n) = P(\lim_{n\to\infty} B_n) = P(X < +\infty) = 1.$$

Das bedeutet jedoch nichts anderes als:

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = \lim_{n\to\infty} F(x_n) = 0,$$
$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{n\to\infty} F(y_n) = 1.$$

(Das können wir schlußfolgern, da Grenzwerte von Funktionen von der Wahl der Folgen unabhängig sind.)

3. Wir definieren eine Menge

$$A = \{\omega \colon X(\omega) < x_0\}$$

und eine Folge von Mengen

$$A_n = \{\omega \colon X(\omega) < x_n\},$$

wobei (x_n) eine monotone Folge ist, die von links gegen x_0 konvergiert ($x_n \longrightarrow x_0 - 0$). Offenbar ist die Folge (A_n) monoton wachsend ($A_n \subseteq A_{n+1}$). Außerdem gilt:

$$\lim_{n\to\infty} A_n = A.$$

Dann können wir schlußfolgern:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} F(x_n) &= \lim_{n\to\infty} P(X < x_n) \\
&= \lim_{n\to\infty} P(A_n) \\
&= P(\lim_{n\to\infty} A_n) \\
&= P(A) = P(X < x_0) \\
&= F(x_0)
\end{aligned}$$

Das bedeutet aber:

$$\lim_{x\to x_0-} F(x) = F(x_0).$$

4. Es gilt:

$$\begin{aligned}
P(a \leq X < b) &= P(\{X < b\} \setminus \{X < a\}) \\
&= P(X < b) - P(X < a) \quad \text{(Subtraktivität (vg} \\
&= F(b) - F(a)
\end{aligned}$$

□

3 Diskrete zufällige Variablen

$$X \in \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$$

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots x_n & \cdots \\ p_1 & p_2 & p_3 & \cdots p_n & \cdots \end{pmatrix}$$

$$p_i = P(X = x_i) > 0, \quad i = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$$

Die Funktion

$$f(x_i) = p_i$$

heißt <u>Wahrscheinlichkeitsfunktion</u>.

Bem: $f(x_i)$ nennt man manchmal auch Zähldichte.

Beispiele

a) Zweimaliges Werfen einer Münze

$\Omega = \{ZZ, ZB, BZ, BB\}$

$X :=$ Anzahl von Blatt

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

b) Erfolge bei n Versuchen

X: Anzahl der "Erfolge" bei n Versuchen, wobei jeder der n Versuche eine Erfolgswahrscheinlichkeit p hat.

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad \text{Binomialwkt.}$$

$$F_X(k) = P(X < k) = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$$

Verteilungsfunktion von X.

Übungsaufgabe

Würfeln 20 mal. Wie groß ist die Wkt. für

mindestens 4 Sechsen?

X: Anzahl der Sechsen.

$$\begin{aligned} P(X \geq 4) &= 1 - P(X < 4) = 1 - F_X(4) \\ &= 1 - \sum_{i=0}^{3} P(X = i) = \end{aligned}$$

$$1 - \Big(\frac{5}{6}\Big)^{20} - 20\Big(\frac{1}{6}\Big)\Big(\frac{5}{6}\Big)^{19} - \frac{20 \cdot 19}{2}\Big(\frac{1}{6}\Big)^{2}\Big(\frac{5}{6}\Big)^{18} -$$

$$- \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{6}\Big(\frac{1}{6}\Big)^{3}\Big(\frac{5}{6}\Big)^{17}$$

$\approx 0.43.$

c) Telefonzentrale

X: Anzahl der Anrufe, die pro Zeiteinheit von einer Telefonzentrale vermittelt werden.

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots \\ \\ p_0 & p_1 & p_2 & p_3 & \cdots \end{pmatrix}$$

$$P(X = i) = p_i = \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}, \quad \lambda > 0$$

Poisson- Wahrscheinlichkeiten.

Es gilt:

$$\sum_{i=0}^{\infty} p_i = \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!}}_{} e^{-\lambda} = 1.$$

Bez.: $X \sim Poi(\lambda)$.

Satz 2.2 *Seien* $X_n \sim Bi(n,p), Y \sim Poi(\lambda)$

Für $n \cdot p = \lambda$ ***gilt:***

$P(X_n = k) \longrightarrow_{n\to\infty} P(Y = k)$.

Beweis: Es gilt:

$$\begin{aligned}
P(X_n = k) &= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} (\frac{\lambda}{n})^k (1-\frac{\lambda}{n})^{n-k} \\
&= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!(n-\lambda)^k} \frac{(n-\lambda)^k \lambda^k}{n^k} \frac{(n-\lambda)^{n-k}}{n^{n-k}} \\
&= \frac{1}{k!} \underbrace{\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{(n-\lambda)^k}}_{\longrightarrow 1} \lambda^k \underbrace{(1-\frac{\lambda}{n})^n}_{\longrightarrow e^{-\lambda}}
\end{aligned}$$

λ fest

k fest

$$= \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = P(Y = k)$$

$\square$

d) Münzwurf solange bis B(Blatt) kommt

Ω = {B, ZB, ZZB, ...}

X := Anzahl der Würfe bis zum ersten Blatt.

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n & \cdots \\ \frac{1}{2} & (\frac{1}{2})^2 & (\frac{1}{2})^3 & (\frac{1}{2})^4 & \cdots & (\frac{1}{2})^n & \cdots \end{pmatrix}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = \sum_{i=1}^{\infty} (1/2)^i = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1 = 1$$

geometrische Reihe

geometrische Verteilung mit p=1/2, $p_i = (1/2)^i$.

allgemeiner:

Def. 2.6 *: Eine Zufallsvariable X mit*

$$P(X = i) = p(1-p)^{i-1}, \quad i = 1, 2, \ldots$$

heißt geometrisch verteilt.

Bez.: $X \sim Geo(p)$.

e) Qualitätskontrolle

Gegeben sei eine Grundgesamtheit (z.B. eine Warenlieferung) mit N Stücken, von denen genau n schlecht seien. Wie groß ist die Wkt., daß in einer Stichprobe vom Umfang m höchstens k Stück schlecht sind?

X: zufällige Anzahl der schlechten Stücke in der Stichprobe.

$$P(X = x) = \frac{\binom{n}{x} \cdot \binom{N-n}{m-x}}{\binom{N}{m}}$$

$\binom{N}{m}$: # möglichen Stichproben.

$\binom{n}{x}$: # Möglichkeiten, aus n schlechten Stücken in der Grundgesamtheit x schlechte Stücke zu ziehen.

$\binom{N-n}{m-x}$: # Möglichkeiten, aus $N-n$ guten Stücken in der Grundgesamtheit $m-x$ gute Stücke zu ziehen.

Offenbar:

$$0 \le x \le \min(n, m)$$
$$m - x \le N - n.$$

Def. 2.7 *Eine Zufallsvariable mit der Wkt.funktion*

$$f(x|H_{N,n,m}) = P(X = x)$$

heißt hypergeometrisch verteilt.

Bez.: $X \sim H_{N,n,m}$. Verteilungsfunktion:

$$F(k|H_{N,n,m}) = \sum_{x=0}^{k} \frac{\binom{n}{x} \cdot \binom{N-n}{m-x}}{\binom{N}{m}}$$

Bemerkung: Für $N \to \infty$, $n \to \infty$, $\frac{n}{N} \to p$ gilt:

$$f(x|H_{N,n,m}) \to \binom{m}{x} p^x (1-p)^{m-x} = f(x|Bi(m,p))$$

ÜA.

Wkt. für höchstens k schlechte Stücke: $F(k+1|H_{N,n,m})$.