3 Bedingte Wahrscheinlichkeit, Unabhängigkeit von Ereignissen

Bsp. 1.19 (3-maliges Werfen einer Münze)

Menge der Elementarereignisse:

$$\Omega = \{zzz, zzw, zwz, wzz, zww, wzw, wwz, www\}.$$

Dabei gilt: $|\Omega| = 2^3 = 8 = N$.

Wir definieren zwei Ereignisse:

A: *Das Wappen fällt genau einmal, d.h.:*

$$A = \{zzw, zwz, wzz\}.$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{N} = \frac{3}{8}.$$

B: *Die Anzahl der Wappenwürfe ist ungerade,d.h.:*

$$B = \{zzw, zwz, wzz, www\}.$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{N} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

Wir nehmen jetzt an, das Ereignis B sei bereits eingetreten. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß unter dieser Bedingung das Ereignis A eintritt? Offenbar $A \subset B$.

Bei diesem Experiment ist die Menge der Elementarereignisse die Menge B. Damit gilt $N = 4$. Folglich erhalten wir:

$$P(A, \textit{falls } B \textit{ bereits eingetreten ist}) = P(A/B) = \frac{3}{4}.$$

Def. 1.9 *Es seien $A, B \in \mathcal{E}$ zwei zufällige Ereignisse und es gelte $P(B) > 0$. Dann wird*

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

als bedingte Wahrscheinlichkeit von A unter der Bedingung B bezeichnet.

Bem.: Oft wird auch die folgende Bezeichnung verwendet:

$$P_B(A) := P(A/B).$$

Bem.: Wir unterscheiden folgende Fälle:

1. $A \supseteq B$:
   Dann gilt: $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$.
2. $A \subseteq B$:
   Dann gilt: $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)}$.
3. $A \cap B \neq \emptyset$ (teilweise Überschneidung):
   Dann gilt: $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

Def. 1.10 *Zwei Ereignisse $A, B \in \mathcal{E}$ heißen* *unabhängig, wenn gilt:*

$$P(A/B) = P(A).$$

Bem.: Für zwei unabhängige Ereignisse gilt:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Bsp. 1.20 (Skatblatt) *Skatspiel mit 32 Karten. Daraus wird eine Karte gezogen. (*$N = |\Omega = 32$*).*
Wir betrachten die beiden folgenden zufälligen Ereignisse:

A: *Ziehen eines Königs.*

$$P(A) = \frac{n(A)}{N} = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}.$$

B: *Ziehen einer Herzkarte.*

$$P(B) = \frac{n(B)}{N} = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}.$$

Sind diese beiden Ereignisse voneinander unabhängig?

Offenbar $P(B) > 0$*. Es sei eine Herzkarte gezogen worden (Ereignis* B *also eingetreten). Wahrscheinlichkeit, daß dann der Herzkönig gezogen wurde:*

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{32}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{8} = P(A).$$

Folglich sind nach Definition 1.10 die Ereignisse A *und* B *voneinander unabhängig.*

Satz 1.4 *Es seien* $A, B \in \mathcal{E}$ *zwei Ereignisse, wobei* $P(B) > 0$ *gelte. Dann ist das Tripel* $(\Omega, \mathcal{E}, P_B)$ *ein Wahrscheinlichkeitsraum, d.h. die bedingte Wahrscheinlichkeit* P_B *genügt den* KOLMOGOROFF*–Axiomen.*

Beweis: Wir zeigen stellvertretend Axiom 2. Es gilt:

$$\begin{aligned} P_B(\Omega) &= P(\Omega/B) \\ &= \frac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Die anderen beiden Axiome (vgl. Definition 1.6) sind ebenfalls erfüllt. $\square$

Satz 1.5 *Es seien $A, B, C \in \mathcal{E}$ drei Ereignisse. Dann gilt:*

$$P_B(A/C) = P(A/B \cap C).$$

Beweis: Es gilt:

$$\begin{aligned}
P_B(A/C) &= \frac{P_B(A \cap C)}{P_B(C)} \\
&= \frac{P(A \cap C/B)}{P(C/B)} \\
&= \frac{P(A \cap B \cap C) \cdot P(B)}{P(B) \cdot P(B \cap C)} \\
&= \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(B \cap C)} \\
&= P(A/B \cap C)
\end{aligned}$$

□

Lemma 1.6 *Es seien $A, B \in \mathcal{E}$ zwei unabhängige Ereignisse. Dann sind die Ereignisse A und $\overline{B}$ ebenfalls unabhängig. Gleiches gilt für die Ereignisse $\overline{A}$ und B sowie für $\overline{A}$ und $\overline{B}$.*

Beweis: Wir zeigen die Aussage am Beispiel der Ereignisse A und $\overline{B}$. Es gilt:

$$\begin{aligned}
P(A/\overline{B}) &= \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} \\
&= \frac{P(A \setminus (A \cap B))}{1 - P(B)} \quad \text{(Folgerung 2.1))} \\
&= \frac{P(A) - P(A \cap B)}{1 - P(B)} \quad \text{(Folgerung 2.3b))} \\
&= \frac{P(A) - P(A)P(B)}{1 - P(B)} \\
&= \frac{P(A)(1 - P(B))}{1 - P(B)} \\
&= P(A)
\end{aligned}$$

Diese beiden Ereignisse sind folglich unabhängig.

Zusammenfassend gilt

$$\begin{aligned} P(A/B) = P(A) &\iff P(A/\overline{B}) = P(A) \\ &\iff P(\overline{A}/\overline{B}) = P(\overline{A}) \\ &\iff P(\overline{A}/B) = P(\overline{A}) \end{aligned}$$

$\square$

Def. 1.11 *Es sei* $(\Omega, \mathcal{E}, P)$ *ein Wahrscheinlichkeitsraum. Eine Folge von Ereignissen*

$$\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \; (A_n \in \mathcal{E}, \forall n \in \mathbb{N})$$

heißt vollständig (oder ausschöpfend), falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \Omega$;
2. $A_i \cap A_j = \emptyset$, *für alle* $i \neq j$.

Satz 1.7 *Es sei* $A_1, A_2, \ldots$ *eine vollständige Folge von Ereignissen. Weiterhin sei* B *ein beliebiges Ereignis und es gelte* $P(A_i) \neq 0$ *für alle* i *. Dann gilt:*

$$P(B) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B|A_i)P(A_i).$$

Dieser Ausdruck heißt

Formel der totalen Wahrscheinlichkeit.

Beweis: Aus $B = B \cap (\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \bigcup_{i=1}^{\infty}(B \cap A_i)$ folgt (da die $(B \cap A_i)$ ebenfalls unvereinbar sind):

$$\begin{aligned} P(B) &= P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}(B \cap A_i)\right) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} P(B \cap A_i) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} P(B|A_i)P(A_i) \end{aligned}$$

□

Gegeben: $P(A_i)$ und $P(A/A_i)$, ($i \in \mathbb{N}$).

Gesucht: $P(A_i/A)$.

Unter Benutzung der Definition der bedingte Wahrscheinlichkeit und der Formel für die totale Wahrscheinlichkeit erhalten wir:

$$\begin{aligned} P(A_i/A) &= \frac{P(A_i \cap A)}{P(A)} \\ &= \frac{P(A_i) \cdot P(A/A_i)}{P(A)} \\ &= \frac{P(A_i) \cdot P(A/A_i)}{\sum_{j=1}^{\infty} (P(A/A_j) \cdot P(A_j))} \quad \text{(Formel der totalen Wkt)} \end{aligned}$$

Der Ausdruck

$$\boxed{P(A_i/A) = \frac{P(A_i) \cdot P(A/A_i)}{\sum\limits_{j=1}^{\infty} (P(A/A_j) \cdot P(A_j))}}$$

heißt <u>Formel von BAYES</u> (bzw. <u>Theorem von BAYES</u>).