

2.3 Arithmetische Beziehungen zwischen den Binomialkoeffizienten

• 1.

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

• 2.

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

• 3.

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

• 4.

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$

• 5.

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

• 6.

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \binom{m}{k-i} = \binom{n+m}{k}$$

• 7.

$$\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1}$$

• 8. Definieren die Folge

$$S_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \binom{n-k}{k}$$

Zeigen Sie: $S_{n+1} = S_n + S_{n-1}$.

Beweis: 3 Methoden,

vollständige Induktion

algebraisch

kombinatorisch

teilweise Übungsaufgabe, teilweise Übung

□

2.4 Die Stirling Formel

Satz 1.3 *Es gilt*

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Beweis: Die Aussage des Satzes ist äquivalent zu

$$\ln n! \sim \ln \sqrt{2\pi} + \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n - n.$$

Sei

$$d_n := \ln n! - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n + n.$$

Es genügt zu zeigen,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = \ln \sqrt{2\pi}.$$

Wir schätzen jetzt die Differenz $d_n - d_{n+1}$ ab, daraus dann das Verhalten der Folge $\{d_n\}$ und versuchen dann den Grenzwert zu bestimmen.

Es gilt

$$\begin{aligned}d_n - d_{n+1} &= \ln n! - \ln(n+1)! \\ &\quad - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n + \left(n + 1 + \frac{1}{2}\right) \ln(n+1) \\ &\quad + n - (n+1) \\ &= \ln \frac{n!}{(n+1)!} + \left(n + \frac{1}{2}\right) (\ln(n+1) - \ln n) \\ &\quad + \ln(n+1) - 1 \\ &= -\ln(n+1) + \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln \frac{n+1}{n} + \ln(n+1) - 1 \\ &= \frac{2n+1}{2} \ln \frac{n+1}{n} - 1 \\ &= (2n+1) \cdot \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \frac{1}{2n+1}}{1 - \frac{1}{2n+1}} - 1.\end{aligned}$$

Es gilt für $-1 < x < 1$:

$$\ln(1+x) = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \frac{x^i}{i}$$

$$\ln(1-x) = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \frac{(-x)^i}{i}$$

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = \ln(1+x) - \ln(1-x) = 2 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^{2i+1}}{2i+1}$$

Setzen $x := \frac{1}{2n+1}$ und erhalten ($x \neq 0$)

$$\begin{aligned}
 d_n - d_{n+1} &= \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \left(x + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2i+1} x^{2i+1} \right) - 1 \\
 &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2i+1} \frac{1}{(2n+1)^{2i}} \\
 &< \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{3} \frac{1}{(2n+1)^{2i}} \\
 &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1-q} - 1 \right) \quad \text{wobei} \quad q = \frac{1}{(2n+1)^2} \\
 &= \frac{1}{3((2n+1)^2 - 1)}
 \end{aligned}$$

Offenbar gilt auch

$$\frac{1}{3(2n+1)^2} = \sum_{i=1}^1 \frac{1}{2i+1} \cdot \frac{1}{(2n+1)^{2i}} < d_n - d_{n+1},$$

also

$$\frac{1}{3(2n+1)^2} < d_n - d_{n+1} < \frac{1}{3((2n+1)^2 - 1)}.$$

Wegen

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{3((2n+1)^2-1)} &= \frac{1}{12n(n+1)} = \frac{1}{12n} - \frac{1}{12(n+1)} \\
 \frac{1}{3(2n+1)^2} &= \frac{1}{12n(n+1)+3} = \frac{1}{12(12n(n+1)+3)} \\
 &= \frac{1}{12 \cdot 12n(n+1) + 36} \\
 &> \frac{1}{12 \cdot 12n^2 + 12 \cdot 12n + 24n + 13} \\
 &= \frac{1}{12 \cdot 12n^2 + 12 \cdot 14n + 13} \\
 &= \frac{1}{(12n+1)(12n+13)} \\
 &= \frac{1}{12n+1} - \frac{1}{12(n+1)+1}
 \end{aligned}$$

Beide Ungleichungen zusammen

$$\frac{1}{12n+1} - \frac{1}{12(n+1)+1} < d_n - d_{n+1} < \frac{1}{12n} - \frac{1}{12(n+1)}$$

$$\left(d_n - \frac{1}{12n}\right) - \left(d_{n+1} - \frac{1}{12(n+1)}\right) < 0 <$$

$$\left(d_n - \frac{1}{12n+1}\right) - \left(d_{n+1} - \frac{1}{12(n+1)+1}\right)$$

\Rightarrow Folge $\{d_n - \frac{1}{12n+1}\}$ monoton fallend

Folge $\{d_n - \frac{1}{12n}\}$ monoton wachsend.

Beide Folgen haben denselben Grenzwert $c := \lim d_n$,

$$d_n - \frac{1}{12n} < c < d_n - \frac{1}{12n+1}$$

$$c + \frac{1}{12n+1} < d_n < c + \frac{1}{12n}$$

Erinnerung:

$$d_n = \ln n! - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n + n$$

$$\Rightarrow e^{d_n} = n! \left(\frac{n}{e}\right)^{-n} n^{-\frac{1}{2}}$$

$$e^{c+\frac{1}{12n+1}} < e^{d_n} < e^{c+\frac{1}{12n}}$$

$$e^c e^{\frac{1}{12n+1}} < n! \left(\frac{n}{e}\right)^{-n} n^{-\frac{1}{2}} < e^c e^{\frac{1}{12n}}$$

$$e^c \sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{1}{12n+1}} < n! < e^c \sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{1}{12n}}$$

Bleibt zu zeigen

$$e^c = \sqrt{2\pi}.$$

Hilfsrechnungen

$$I_n := \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx$$

Es gilt

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\pi/2} \sin^{n-1} x \cdot \sin x \, dx \\ &= \sin^{n-1} x \cdot (-\cos x) \Big|_0^{\pi/2} - \\ &\quad \int_0^{\pi/2} (n-1) \sin^{n-2} x \cos x \cdot (-\cos x) \, dx \\ &= (n-1) \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x (1 - \sin^2 x) \, dx \\ &= (n-1)(I_{n-2} - I_n) \\ I_n &= \frac{n-1}{n} I_{n-2} \\ I_0 &= \frac{\pi}{2} \\ I_1 &= 1 \\ I_2 &= \frac{1}{2} I_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \\ I_3 &= \frac{2}{3} I_1 = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$I_{2n} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1) \pi}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \frac{\pi}{2}$$

$$I_{2n+1} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)}$$

$$0 < x < \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow 0 < \sin x < 1$$

$$\Rightarrow \sin^{2n-1} x > \sin^{2n} x > \sin^{2n+1} x$$

$$\Rightarrow I_{2n-1} > I_{2n} > I_{2n+1}$$

$$\Rightarrow \frac{I_{2n-1}}{I_{2n+1}} > \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} > 1$$

$$\Rightarrow \frac{2n+1}{2n} > \frac{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n-1) \cdot (2n+1)}{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdots (2n) \cdot (2n)} \cdot \frac{\pi}{2} > 1$$

$$\Rightarrow \lim \frac{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n-1) \cdot (2n+1)}{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdots (2n) \cdot (2n)} \cdot \frac{\pi}{2} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{2} = \lim \left(\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)} \right)^2 \cdot \frac{1}{2n+1}$$

$$= \lim \frac{2^{4n} (n!)^4}{((2n)!)^2 (2n+1)}$$

$$n! = e^c \sqrt{n} n^n e^{-n} e^{\alpha_n}$$
$$(2n)! = e^c \sqrt{2n} 2^{2n} n^{2n} e^{-2n} e^{\beta_n}$$

wobei $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = 0$.

Einsetzen oben liefert

$$e^c = \sqrt{2\pi}.$$