Bsp. 5.14 (Irrfahrt auf der Geraden mit Barriere)

Zustände: $k \in \mathbb{N}$, *Anfangszustand:* 0

Bewegung: ein Schritt nach rechts mit Wkt. p *oder*

nach links mit Wkt. $q = 1 - p$

von $k = 0$ *aus geht es nur nach rechts*

$0 < p, q < 1$.

Übergangswktn.:

$$\begin{aligned} p_{k,k+1} &= p = 1 - p_{k,k-1} \\ p_{ij} &= 0, \quad \textit{falls} \ |i-j| \neq 1 \quad \textit{und} \quad k \neq 0 \\ p_{01} &= 1 \end{aligned}$$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & & & \\ q & 0 & p & 0 & & & \\ 0 & q & 0 & p & 0 & & \\ & & & . & . & . & \\ & & & & . & . & . \end{pmatrix}$$

Wir klassifizieren die Zustände: (an der Tafel hatten wir uns verrrechnet)

alle transient, wenn $p > q$

alle nullrekurrent, wenn $p = q = \frac{1}{2}$

alle positiv rekurrent, falls $q > p$.

Alle Zustände haben die Periode 2.

Die ersten beiden Fälle sind analog zur Irrfahrt ohne Barriere

Der dritte Fall erfordert etwas Rechenaufwand.

Wir bestimmen die stationäre Verteilung $\boldsymbol{\pi}$ im Fall $p < q$.

Sie ist (falls sie ex.) Lösung von

$$\mathbf{M}^T \cdot \boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}$$

$$
\begin{aligned}
\pi_0 &= q\pi_1 \\
\pi_1 &= \pi_0 + q\pi_2 \\
\pi_i &= p\pi_{i-1} + q\pi_{i+1}, \quad i \geq 2 \\
1 &= \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j
\end{aligned}
$$

Behauptung:

$$\pi_i = \frac{p^{i-1}}{q^i}\pi_0, \quad i \geq 1$$

Beweis: vollständige Induktion.

$$
\begin{aligned}
1 &= \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i \\
&= \pi_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{p^{i-1}}{q^i} \pi_0 \\
&= \pi_0 + \frac{1}{q} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{p^i}{q^i} \pi_0 \\
&= \pi_0 + \frac{1}{q} \frac{1}{1 - \frac{p}{q}} \pi_0 \\
&= \pi_0 + \frac{1}{q-p} \pi_0 \\
\pi_0 &= \frac{1}{1 + \frac{1}{q-p}} \\
&= \frac{q-p}{q-p+1} \\
\pi_i &= \frac{p^{i-1}}{q^i} \cdot \frac{q-p}{q-p+1}
\end{aligned}
$$

stationäre Verteilung

Wir berechnen die stationären Verteilungen zu den Markoff-ketten aus den Übungsaufgaben von Blatt 14.

$$M = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.3 & 0.4 \\ 0.2 & 0.7 & 0.1 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \end{pmatrix}$$

$$(M-I)^T = \begin{pmatrix} -0.7 & 0.2 & 0.2 \\ 0.3 & -0.3 & 0.1 \\ 0.4 & 0.3 & -0.5 \end{pmatrix}$$

Gaußschen Algorithmus anwenden:

$$\begin{pmatrix} -0.7 & 0.3 & 0.4 \\ 0 & -0.15 & 0.27 \\ 0 & 0.15 & -027 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -0.105 & 0 & 0.084 \\ 0 & -0.15 & 0.27 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
-0.105p_1 + 0.084p_3 &= 0 \\
-0.15p_2 + 0.27p_3 &= 0 \\
p_1 &= \frac{4}{5}p_3 \\
p_2 &= \frac{9}{5}p_3 \\
1 = p_1 + p_2 + p_3 &= \frac{4}{5}p_3 + \frac{9}{5}p_3 + p_3 = \frac{18}{5}p_3
\end{aligned}
$$

$p_3 = \frac{5}{18}, \quad p_2 = \frac{1}{2}, \quad p_1 = \frac{2}{9}$

Bsp. 5.15 (Harry's Restaurant mit Finanzspritze)

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

alle Zustände positiv rekurrent und aperiodisch.

Stationäre Verteilung:

$$(M-I)^T = \begin{pmatrix} -1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -3/4 & 1/4 \\ 1 & 1/4 & -3/4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -3/4 & 1/4 \\ 0 & 3/4 & -1/4 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 0 & -3/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} -3p_1 + 2p_3 &= 0 \quad p_1 = \frac{2}{3}p_3 \\ -3p_2 + p_3 &= 0 \quad p_2 = \frac{1}{3}p_3 \\ 1 = p_1 + p_2 + p_3 &= \frac{2}{3}p_3 + \frac{1}{3}p_3 + p_3 = 2p_3 \end{aligned}$$

$p_3 = \frac{1}{2}, \quad p_2 = \frac{1}{6}, \quad p_1 = \frac{1}{3}$

ist stationäre Verteilung

Anschließend werden wir beginnen, die wichtigsten Aussagen der Vorlesung und Übung zusammenzufassen.