5 Klassische Beispiele

5.1 Ruin des Spielers

Zwei Spieler werfen abwechselnd eine (nicht manipulierte) Münze. Fällt Kopf, so erhält Spieler A den vereinbarten Einsatz (1 Euro) von Spieler B, anderenfalls erhält Spieler B denselben Einsatz von Spieler A. Zu Beginn des Spieles besitzt A a Euro und B b Euro. Das Spiel wird solange fortgesetzt, bis einer der beiden Spieler kein Geld mehr besitzt.

Zustände: $S = \{0, 1, \ldots, N\}$, $\quad N = a + b$.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ .. & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{2} \;\; 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Frage: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit des Ruins von Spieler A bzw. B?

Sei E_i das Ereignis, daß ein Spieler, der genau i Euro besitzt, ruiniert wird und sei $p_i = P(E_i)$.

1. Die Übergangswktn. sind

$$p_{i,i+1} = p_{i,i-1} = \frac{1}{2}$$

und offenbar ist $p_0 = 1$ und $p_N = 0$.

2. Satz der totalen Wkt.: Es gilt für alle $i, i = 0, \ldots, N$:

$$\begin{aligned} p_i = P(E_i) \;=\; & P(E_i|\text{Übergang nach } i\text{-1}) \cdot p_{i,i-1} + \\ & P(E_i|\text{ Übergang nach } i\text{+1}) \cdot p_{i,i-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{1}{2}p_{i-1} + \frac{1}{2}p_{i+1} \\ 2p_i &= p_{i-1} + p_{i+1} \\ p_i - p_{i-1} &= p_{i+1} - p_i =: d \\ p_i - p_0 &= \underbrace{p_i - p_{i-1}}_{=d} + \underbrace{p_{i-1} - p_{i-2}}_{=d} + p_{i-2} - + \cdots - p_1 + p_1 - \\ p_i - 1 &= i \cdot d \\ p_i &= 1 + i \cdot d, \quad \text{insbesondere} \\ p_N &= 1 + N \cdot d \\ d &= -\frac{1}{N}, \quad N = a + b \end{aligned}$$

3.

$$p_i = 1 - i \cdot \frac{1}{a+b} = \frac{a+b-i}{a+b}$$

$$p_a = \frac{b}{a+b}, \quad p_b = \frac{a}{a+b}$$

4. $a = b : p_a = p_b = \frac{1}{2}$

$a >> b : p_a \approx 0, p_b \approx 1.$

3 Klassen von Zuständen:

$T = \{1, \ldots, N-1\}$: transiente Zustände

$S_1 = \{0\}$, $S_2 = \{N\}$: absorbierende Zustände

$T^c := S_1 \cup S_2$

Umordnung von $\mathbf{M}$:

$$\mathbf{M}^* = \begin{pmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{R} \\ \mathbf{0} & \mathbf{P} \end{pmatrix}$$

$\mathbf{Q} = (p_{ij}; i, j \in T\}$

$\mathbf{R} = (p_{ik}; i \in T, k \in T^c\}$

Übergang von $i \in T$ nach $k \in T^c$ einschrittig oder nach Übergängen innerhalb von T und anschließendem Übergang von T nach k.

u_{ik}: Wkt. von $i \in T$ (irgendwann) nach $k \in T^c$ zu kommen

$$u_{ik} = \sum_{j \in T} Q_{ij} u_{jk} + p_{ik}, \quad Q_{ij} = p_{ij}$$

$\mathbf{U} = \big(U_{ik}\big)_{i \in T, k \in T^c}$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{U} &= \mathbf{Q}\mathbf{U} + \mathbf{R}, \quad \text{Rekursion} \\
\mathbf{U} &= (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}\mathbf{R} \\
(\mathbf{I} - \mathbf{Q})\mathbf{U} &= \mathbf{R}
\end{aligned}
$$

Die Matrix $(\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}$ existiert, falls T endlich!

Lit.: Resnick, S.I. Adventures in Stochastic Processes, Birkhäuser 1992.

hier:

$$(\mathbf{I} - \mathbf{Q})\mathbf{U} = \mathbf{R}$$

$$
\begin{pmatrix}
1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
-\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & \cdots & 0 & 0 \\
.. & & & & & & \\
 & & & & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\
 & & & & 0 & -\frac{1}{2} & 1
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
u_{10} & u_{1N} \\
u_{20} & u_{2N} \\
u_{30} & u_{3N} \\
.. & \\
u_{N-2,0} & u_{N-2,N} \\
u_{N-1,0} & u_{N-1,N}
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
\frac{1}{2} & 0 \\
0 & 0 \\
0 & 0 \\
.. & \\
0 & 0 \\
0 & \frac{1}{2}
\end{pmatrix}
$$

$$
\begin{array}{cccccccc}
u_{1,0} & -\frac{1}{2}u_{2,0} & & & & & = & \frac{1}{2} \\
-\frac{1}{2}u_{1,0} & +u_{2,0} & -\frac{1}{2}u_{3,0} & & & & = & 0 \\
 & -\frac{1}{2}u_{2,0} & +u_{3,0} & -\frac{1}{2}u_{4,0} & & & = & 0 \\
 & & .. & & & & & \\
 & & & -\frac{1}{2}u_{N-3,0} & +u_{N-2,0} & -\frac{1}{2}u_{N-1,0} & = & 0 \\
 & & & & -\frac{1}{2}u_{N-2,0} & +u_{N-1,0} & = & 0
\end{array}
$$

$N-1$. Gleichung (1. **U**-Spalte)

$$u_{N-1,0} = \frac{1}{2} u_{N-2,0}$$

$N-2$. Gleichung (1. **U**-Spalte)

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2} u_{N-3,0} + u_{N-2,0} - \frac{1}{2} u_{N-1,0} &= 0 \\
u_{N-2,0} - \frac{1}{4} u_{N-2,0} &= \frac{1}{2} u_{N-3,0} \\
\frac{3}{4} u_{N-2,0} &= \frac{1}{2} u_{N-3,0} \\
u_{N-2,0} &= \frac{2}{3} u_{N-3,0}
\end{aligned}$$

$N-3$. Gleichung (1. **U**-Spalte)

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2} u_{N-4,0} + u_{N-3,0} - \frac{1}{2} u_{N-2,0} &= 0 \\
u_{N-3,0} - \frac{1}{3} u_{N-3,0} &= \frac{1}{2} u_{N-4,0} \\
\frac{2}{3} u_{N-3,0} &= \frac{1}{2} u_{N-4,0} \\
u_{N-3,0} &= \frac{3}{4} u_{N-4,0}
\end{aligned}$$

$N-i$. Gleichung (1. **U**-Spalte)

$$u_{N-i,0} = \frac{i}{i+1} u_{N-(i+1),0}, \qquad i = 1, \ldots, N-2$$

1. Gleichung:

$$u_{1,0} - \frac{1}{2}u_{2,0} = \frac{1}{2}$$

Da

$$u_{2,0} = u_{N-(N-2),0} = \frac{N-2}{N-1}u_{N-(N-1),0} = \frac{N-2}{N-1}u_{1,0}$$

folgt

$$\begin{aligned} u_{1,0} - \frac{1}{2}\frac{N-2}{N-1}u_{1,0} &= \frac{1}{2} \\ u_{1,0}(1 - \frac{N-2}{2(N-1)} &= \frac{1}{2} \\ u_{1,0}\frac{N}{2(N-1)} &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{1,0} &= \frac{N-1}{N} = 1 - \frac{1}{N} \\ u_{2,0} &= \frac{N-2}{N-1}u_{1,0} = \frac{N-2}{N-1} \cdot \frac{N-1}{N} = \frac{N-2}{N} = 1 - \frac{2}{N} \\ u_{N-i,0} &= \frac{N-i}{N} = 1 - \frac{i}{N}, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1. \end{aligned}$$

5.2 Irrfahrten

Bsp. 5.11 (Irrfahrt auf der Geraden)

Zustände: $k \in \mathbb{Z}$, *Anfangszustand:* 0

Bewegung: ein Schritt nach rechts mit Wkt. p *oder nach links mit Wkt.* $q = 1 - p$

Übergangswktn.:

$$p_{k,k+1} = p = 1 - p_{k,k-1}; \quad p_{ij} = 0, \textit{falls} |i - j| \neq 1$$

$$M = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & \\ & & 0 & q & 0 & p & 0 & \\ & & & 0 & q & 0 & p & 0 \\ & & & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & & & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

$A_{n,k}$: *Ereignis, nach* n *Schritten im Zustand* k *zu sein*

$$D_{n,k} := P(A_{n,k})$$

Satz der totalen Wkt.:

$$\begin{aligned} D_{n,k} &= P(A_{n,k}) \quad \Omega_{n-1} = A_{n-1,k-1} \cup A_{n-1,k+1} \\ &= P(A_{n,k}|A_{n-1,k-1}) \cdot P(A_{n-1,k-1}) + \\ &\quad P(A_{n,k}|A_{n-1,k+1}) \cdot P(A_{n-1,k+1}) \\ &= pD_{n-1,k-1} + qD_{n-1,k+1} \end{aligned}$$

$$k = -n, \ldots, n$$

Explizite Formel:

$$D_{n,k} = \begin{cases} \binom{n}{\frac{n+k}{2}} p^{\frac{n+k}{2}} q^{\frac{n-k}{2}} & \text{falls } k = -n, -n+2, \ldots, n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

In den Zustand k gelangt man in genau n Schritten, indem man $\frac{n+k}{2}$ mal nach rechts und $\frac{n-k}{2}$ mal nach links geht.
Es gibt genau $\binom{n}{\frac{n+k}{2}}$ Möglichkeiten die Zeitpunkte für einen Schritt nach rechts auszuwählen.

Insbesondere

$$D_{2n,0} = \binom{2n}{n} p^n q^n.$$

Abschätzung: Stirling'sche Formel

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\Big(\frac{n}{e}\Big)^n e^{\frac{1}{12n}}.$$

Damit

$$\begin{aligned}\binom{2n}{n} &= \frac{(2n)!}{n!n!} \\ &\sim \frac{\sqrt{2\pi 2n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{\left(\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\right)^2} \frac{e^{\frac{1}{12\cdot 2n}}}{\left(e^{\frac{1}{12n}}\right)^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi n}} 2^{2n} e^{-\frac{3}{4n}}\end{aligned}$$

$$p = q = \frac{1}{2}: \quad D_{2n,0} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}} e^{-\frac{3}{4n}}$$

$$p \neq q: \quad D_{2n,0} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}} 4^n p^n (1-p)^n e^{-\frac{3}{4}n}.$$

Mittlere Rückkehrhäufigkeit:

$$\sum_{n=1}^{\infty} D_{2n,0} \sim \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi n}} = \infty & (p = \frac{1}{2}) \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4p(1-p))^n}{\sqrt{\pi n}} < \infty & (p \neq \frac{1}{2}) \end{cases}$$

Der Zustand “0” (und die anderen Zustände auch) ist also

rekurrent, falls $p = q = \frac{1}{2}$

transient, falls $p \neq q$

nullrekurrent, falls $p = q = \frac{1}{2}$ da $D_{2n,0} \rightarrow_{n\rightarrow\infty} 0$.

$$D_{2n,0} = p_{00}(n) \rightarrow 0 \Rightarrow \mu_i = \infty$$

Bsp. 5.12 (symmetrische Irrfahrt in der Ebene) *Zustände:* $(k, l) \in \mathbb{Z}^2$, *Anfangszustand:* $(0, 0)$

Bewegung: Punkt (X, Y)

X*: ein Schritt nach rechts mit Wkt.* $p = \frac{1}{2}$ *oder nach links mit Wkt.* $q = \frac{1}{2}$

Y*: ein Schritt nach oben mit Wkt.* p *oder nach unten mit Wkt.* $q = \frac{1}{2}$

Die ZV X *und* Y *sind unabhängig.*

$B_{n,k}$*: Ereignis, nach* n *Schritten im Zustand* k *zu sein*

$$E_{n,k} := P(B_{n,k})$$

$$E_{2n,0} = P(X_{2n,0} = 0 \wedge Y_{2n,0} = 0) = D^2_{2n,0} \sim (\frac{1}{\sqrt{\pi n}})^2$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} E_{2n,0} \sim \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

$$\frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \sim \frac{\ln N}{\pi} \to_{N\to\infty} \infty.$$

Der Zustand "0*" (und die anderen Zustände auch) ist also rekurrent,* *falls* $p = q = \frac{1}{2}$

Bsp. 5.13 (symmetrische Irrfahrt im Raum)

Zustände: $(j, k, l) \in \mathbb{Z}^3$, *Anfangszustand:* $(0, 0, 0)$

Bewegung: Punkt (X, Y, Z)

X: *ein Schritt nach rechts mit Wkt.* $p = \frac{1}{2}$ *oder nach links mit Wkt.* $q = 1 - p$

Y: *ein Schritt nach oben mit Wkt.* p *oder nach unten mit Wkt.* $q = 1 - p$

Z: *ein Schritt nach hinten mit Wkt.* p *oder nach vorn mit Wkt.* $q = 1 - p$

Die ZV X, Y *und* Z *sind unabhängig.*

$C_{n,k}$: *Ereignis, nach* n *Schritten im Zustand* k.

$$F_{n,k} := P(C_{n,k})$$

$$F_{2n,0} = P(X_{2n,0} = 0, Y_{2n,0} = 0, Z_{2n,0} = 0) = D^3_{2n,0} \sim (\frac{1}{\sqrt{\pi n}})^3$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_{2n,0} \sim \frac{1}{(\pi)^{3/2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} < \infty$$

Der Zustand "0" (und die anderen Zustände auch) ist also *transient*.